Ellisse

L'ellise in forma canonica *è il luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissati F_1 e F_2 (**fuochi**) è data.* Ossia è l'isieme dei punti P tali che

$$\text{dist}\,(P, F_1) + \text{dist}\,(P, F_2) = 2a$$

dove $a \in \mathbf{R}$. Se mettiamo i due fuochi su uno dei due assi, per esempio sull'asse delle x, simmetrici ristetto all'origine, per esempio in modo che $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$

In altre parole la condizione perché un punto $P = (x, y)$ appartenga all'ellisse di fuochi F_1 e F_2 è che si abbia

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\,.$$

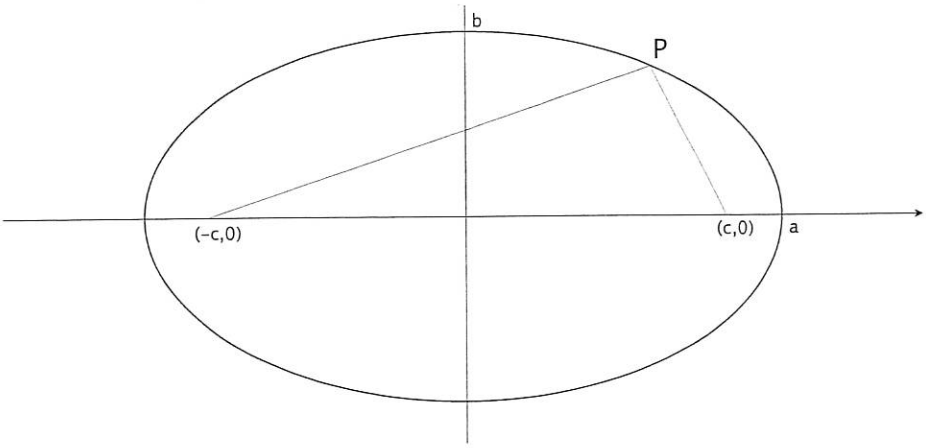


Figura 80: L'ellisse come luogo geometrico

Facendo un po' di conti, che non abbiamo voglia di fare qui ma che si trovano in tutti i libri, questa equazione si può semplificare e si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

dove $b^2 = a^2 - c^2$. Questa è l'**equazione canonica dell'ellisse**. È facile vedere che questa ellisse è simmetrica rispetto agli assi (se scambio x con $-x$ o y con $-y$ l'equazione non cambia, quindi ha un centro di simmetria che è nell'origine. È anche facile vedere, facendo l'intersezione con gli assi che i due **semiassi** sono rispettivamente lunghi a e b.

È chiaro allora che la circonferenza è un particolare ellisse i cui fuochi coincidono come il centro e quindi l'equazione canonica della circonferenza di raggio R non è altro che

$$x^2 + y^2 = R^2\,,$$

ossia l'insieme dei punti a distanza R dal centro (l'origine in questo caso).

Ci sono due buoni metodi per disegnare un'ellisse: uno è noto come **il metodo del giardiniere** e si capisce subito se si pensa alla definizione come luogo geometrico che abbiamo appena dato. Si prende una cordicella (diciamo lunga $2a$), si fissano gli estremi della cordicella in due punti con due puntine (che poi saranno i fuochi) a una distanza minore della lunghezza della cordicella, quindi si tende la cordicella con la matita sul foglio. Se girate intorno ai fuochi con la matita tenendo la cordicella sempre tesa, disegnate un ellisse (quasi) perfetta, e questo perche' state segnando tutti i punti la cui somma delle distanze dai fuochi è costante.

Parabola

La parabola è l'insieme dei punti *che stanno alla stessa distanza da un punto (il* **fuoco***) e una retta (la* **generatrice***).*

Se mettiamo il fuoco nel punto $F = (0, p/2)$ e prendiamo come generatrice la retta $y = -p/2$, la condizione che abbiamo appena enunciato, diventa

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2}\,.$$

Facendo i conti si ottiene

$$y = \frac{x^2}{2p}\,.$$

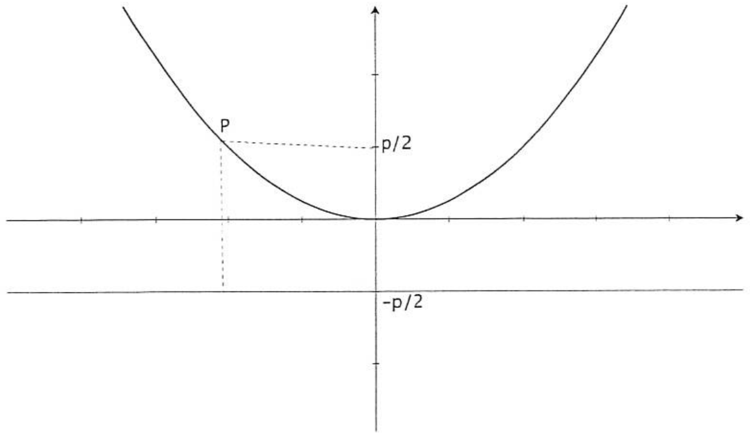


Figura 85: La parabola come luogo geometrico

Quindi **l'equazione canonica della parabola** è $y = ax^2$, con $a \in \mathbf{R}$, in particolare

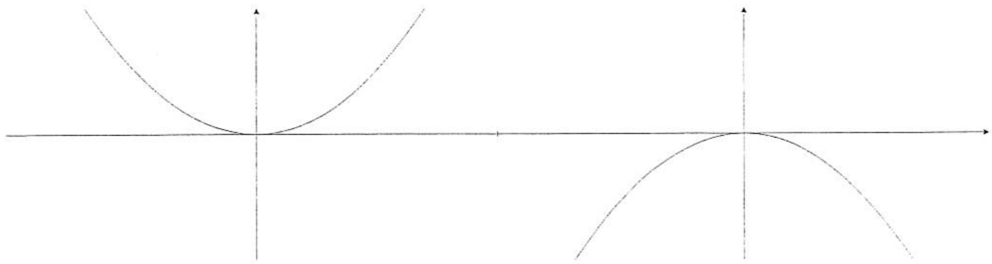


Figura 86: $a > 0$ Figura 87: $a < 0$

In generale, dovremmo già sapere che, tutte le curve di equazione $y = ax^2 + bx + c$, per fissati coefficienti a, b e $c \in \mathbf{R}$ sono parabole con l'asse parallelo all'asse delle y.

Esempio 123 Vediamo che effettivamente l'insieme delle coppie (x, y) che verificano $y = x^2 - 4x + 1$ è una parabola con asse parallelo all'asse delle y. Guardate basta riscrivere questa relazione così

$$y + 3 = (x - 2)^2\,,$$

fate i conti e vedrete che sono la stessa cosa. Ma allora è facile vedere che se trasliamo l'origine nel punto $(-3, 2)$, l'equazione nelle nuove variabili sarà

$$y' = (x')^2\,,$$

ossia la parabola canonica con vertice nell'origine degli assi x' e y' e asse dato dalla retta $x' = 0$. Da questo deduciamo che nel vecchio sistema di riferimento la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 1$ ha vertice nel punto $(-3, 2)$ e per asse la retta $x = 2$.

A questo punto dovrebbe essere chiaro che equazione hanno le parabole con asse parallelo all'asse delle x. Per esempio quelle con vertice nell'origine si ottengono prendendo l'equazione canonica e facendo il ribaltamento che scambia x con y, ottenendo

$$x = ay^2\,.$$

Anche la parabola ha tante belle proprietà e si ritrova spesso. Tanto per dirne una: se lanciate un sasso la sua traiettoria e sempre una parabola (fra un annetto saremo in grado di verificarlo per bene). Oppure: vi siete mai domandati perché si usa **l'antenna parabolica**? O ancora perché i fari sono fatti di una lampadina e un involucro parabolico riflettente? Ecco la risposta: si può verificare (usando la definizione della parabola come luogo geometrico, ma su questo soprassediamo) che se prendo un segmento che unisce il fuoco della parabola con un suo punto, questo segmento incide la parabola con lo stesso angolo a cui l'incide un segmento parallelo all'asse per quello stesso punto. In altre parole se un raggio parte dal fuoco, viene riflesso dalla parabola in un raggio parallelo all'asse e viceversa. Quindi dal fuoco viene diffuso un fasco di raggi paralleli (faro con la lampada nel fuoco) e nel fuoco vengono concentrati tutti i raggi che vengono da molto lontano e quindi paralleli (antenna parabolica).

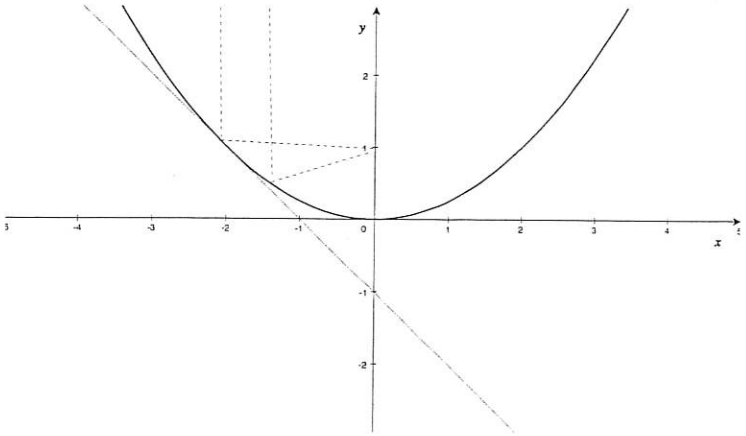


Figura 88: Le proprietà acustiche e ottiche della parabola

Iperbole

Concludiamo questa nostra carrellata sulle coniche con l'iperbole. L'ipebole è *il luogo geometrico dei punti il cui modulo della differenza delle distanze da due punti fissati (i* **fuochi**, *F_1 e F_2) è costante.* Se mettiamo i fuochi come nel caso dell'ellisse sull'asse delle x simmetrici rispetto all'origine nei punti $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, per $c > 0$ e fissiamo $a < c$, positivo, la condizione di appartenenza all'iperbole può essere scritta come

$$|\text{dist}\,(P, F_1) - \text{dist}\,(P, F_2)| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a\,.$$

ancora una volta facendo i conti (non c'è bisogno di farli, fidatevi) e ponendo $b^2 = c^2 - a^2$ otteniamo l'equazione canonica dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

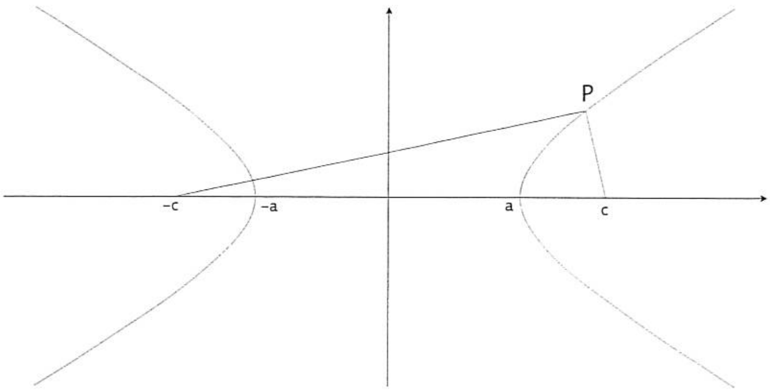


Figura 89: L'iperbole

Il caso particolare in cui $a = b$ si dice **iperbole equilatera**. Questa è caratterizzata dall'essere "tangente all'infinito" (detta cosìè un vaga, lo capiremo meglio più avanti cosa intendo con questa espressione) alle due bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto (queste rette le chiamiamo **asintoti dell'iperbole**).

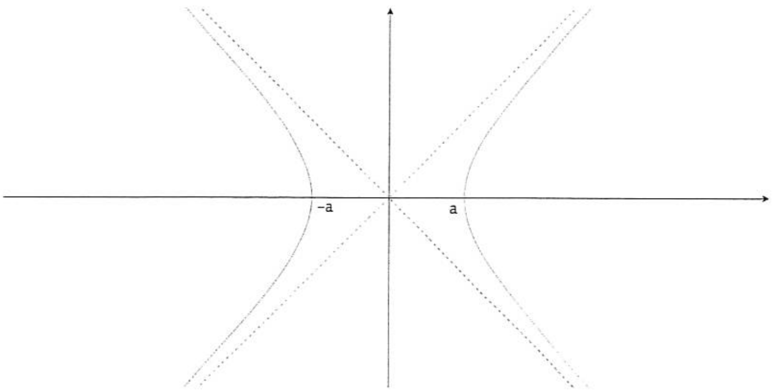


Figura 90: L'iperbole equilatera

Domanda: Come diventa l'equazione dell'iperbole se facciamo una rotazione del sistema di riferimento in modo che gli assi x' e y' siano le due bisettrici? Noi questo lo sappiamo fare. Basta fare una rotazione di 45 gradi del sistema di riferimento, ossia

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = y \end{cases} .$$

Sostituendo queste espressioni di x e y in termini di x' e y' nell'equazione canonica dell'iperbole equilatera si ottiene

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 = a^2,$$

da cui svolgendo i quadrati e semplificando quello che si può semplificare otteniamo

$$x'y' = a^2 .$$

«PUNTI DI VISTA» SULLE CONICHE

1. Alcune osservazioni preliminari

Le coniche, da qualunque punto di vista le si osservi, sono sempre ... coniche. La rappresentazione in prospettiva di una conica è infatti ancora una conica. In termini più strettamente geometrici questa proprietà si esprime dicendo che tali curve sono *invarianti per proiezione e sezione*: in prospettiva la proiezione è costituita dai raggi ottici condotti dall'occhio dell'osservatore all'oggetto, la sezione dal piano del quadro su cui lo si vuole rappresentare.

Dalla Scuola media all'Università, col crescere del bagaglio matematico, le coniche vengono presentate sotto aspetti diversi (si può partire dall'ombra di un cerchio fino ad arrivare alla forma quadratica proiettiva), ma accade talora che non vengano collegate fra loro le varie definizioni. Inoltre la trattazione può risultare isolata rispetto agli altri argomenti (cosa che avviene non di rado anche nei corsi di Geometria I), al punto che ci si chiede talvolta che cosa ci impedisca di abbandonare questo classico capitolo della geometria.

Eppure quei collegamenti fra le diverse definizioni permettono di passare da situazioni e metodi puramente geometrici a situazioni e metodi algebrico-analitici, sottolineando così l'unità esistente fra i due linguaggi principali della matematica. Gli stessi collegamenti rappresentano così a mio avviso un valido motivo per trattare ancora con una certa «cura» questo antico argomento.

Le considerazioni contenute nel seguito sono alla portata di uno studente degli ultimi anni di Scuola superiore che conosca le equazioni delle più semplici trasformazioni geometriche. Solo nell'ultimo paragrafo si fa riferimento alle coordinate omogenee e a qualche altro concetto di geometria proiettiva. Per queste nozioni un testo classico è [2]; tra i testi più recenti si può consultare [8].

Nell'attuale insegnamento scolastico italiano, se si esclude la trattazione geometrico-elementare della circonferenza, le prime coniche compaiono sotto forma di funzione. Si cominciano a disegnare i grafici di $y = x^2$ e di $y = 1/x$, e nelle superiori si arriva presto ad osservare (assumendolo per definizione, accettandolo per analogia o dimostrandolo con opportune trasformazioni) che tutte le funzioni $y = p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio di secondo grado, rappresentano parabole, così come tutte le funzioni del tipo $y = k/x$ rappresentano iperboli. L'equazione della circonferenza si introduce generalmente in un contesto diverso.

A distanza di uno o due anni compare l'ellisse, e ricompaiono l'iperbole e la parabola, definite ora come luoghi di punti soddisfacenti alle note condizioni. In questo contesto le equazioni vengono scritte nella cosiddetta forma canonica. E sempre in questo contesto i tre luoghi vengono accomunati sotto il nome di «coniche». È solo per analogia o perché hanno qualcosa in comune? Tutti sanno la risposta: le curve si ottengono come sezioni piane di un cono (in realtà il loro nome completo è «sezioni coniche»). A livello sperimentale-intuitivo possiamo facilmente ritrovare le forme incontrate in geometria analitica osservando la sabbia di una clessidra di forma conica, oppure sezionando un cono di luce (l'ombra di un cerchio o la luce prodotta sul muro da un paralume cilindrico – quest'ultimo, se la lampadina si trova nel centro, consente di vedere i due rami dell'iperbole).

Ma quali considerazioni permettono di passare dalle curve definite come luogo geometrico alle figure che si ottengono sezionando un cono?

Di solito gli strumenti per risolvere questo problema vengono forniti al primo anno di Università: ci si può servire della geometria analitica ad un livello non elementare, o della geometria proiettiva, di cui parleremo però solo nell'ultimo paragrafo.

Ma non occorre aspettare lo studio della geometria proiettiva per collegare le diverse definizioni di conica, come non aspettò *Apollonio di Perga* (247-205 a.C.) per scrivere il suo trattato *Le sezioni coniche*, come vedremo nel paragrafo seguente.

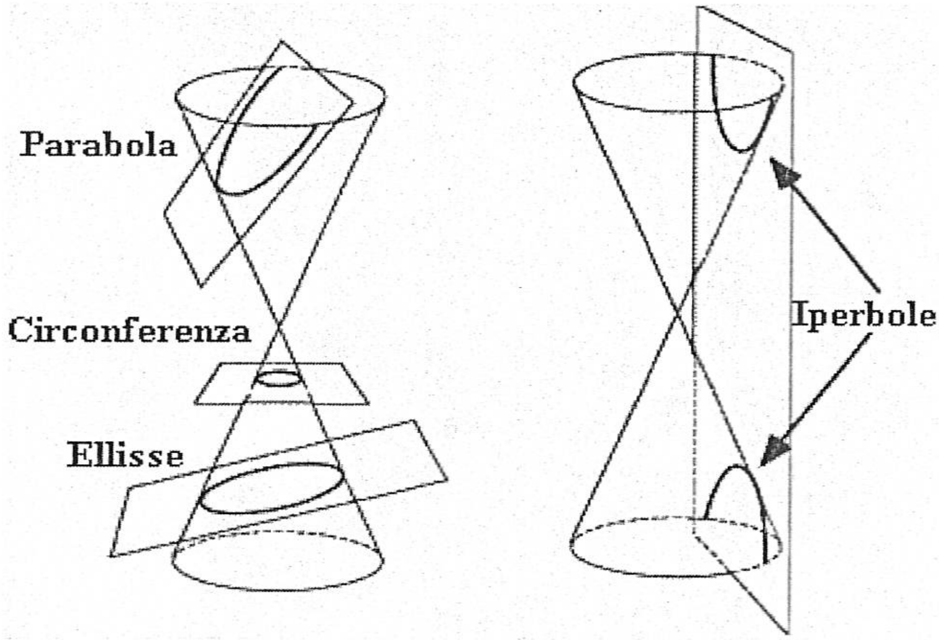
2. Dalle sezioni del cono alle equazioni canoniche

Nel trattato di Apollonio, consistente di otto libri, le coniche vengono per la prima volta presentate come sezioni di un unico cono al variare della posizione del piano secante (ricordiamo che in precedenza Archimede e Menecmo avevano considerato solo sezioni con un piano perpendicolare ad una generatrice: per ottenere ellisse, parabola e iperbole era allora necessario partire da un cono con angolo di apertura rispettivamente acuto, retto e ottuso.

Apollonio definisce il cono come la superficie descritta da una retta (generatrice) passante per un punto fissato (vertice) che si appoggia ad una circonferenza. Apollonio specifica che la sua superficie è «composta da due superfici» e che la generatrice è indefinitamente prolungabile. Il suo

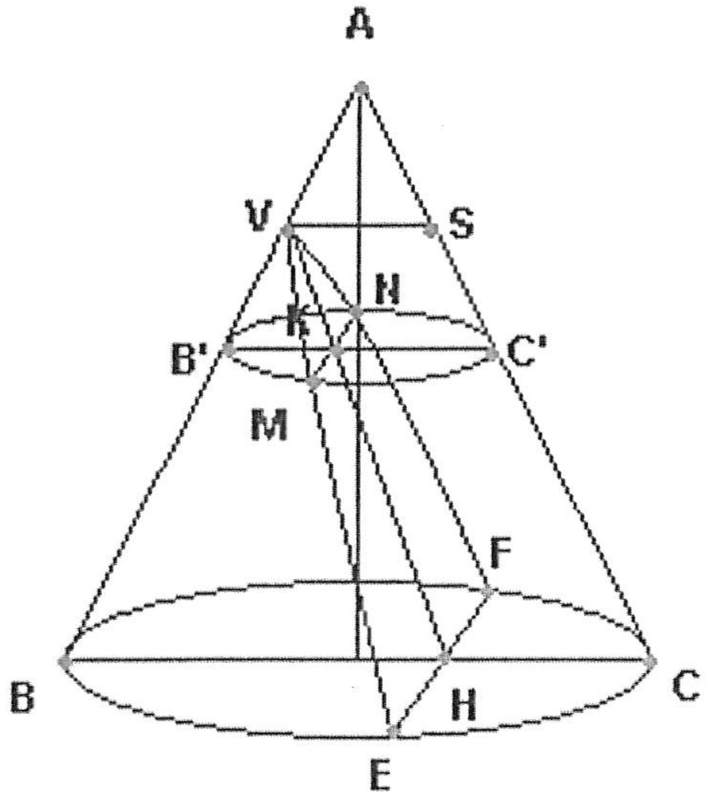
cono è quindi un *cono doppio obliquo*. In modo non troppo lontano dalla terminologia attuale, Apollonio definisce l'*asse* come la retta passante per il vertice e per il centro della circonferenza, che è la *base* del cono; se l'asse è perpendicolare alla circonferenza il cono è detto *retto*.

Sezionando un cono con un piano si ottiene:
- una parabola se il piano è parallelo ad una generatrice del cono
- un'ellisse se il piano interseca una sola falca del cono (come caso particolare si può ottenere una corconferenza)
- un'iperbole se il piano interseca due falde del cono (in figura è illustrato il caso in cui, ad esempio, il piano è parallelo all'asse del cono



Vediamo il modo in cui Apollonio determina quella che oggi chiameremmo l'equazione della parabola, ovvero la relazione fra due segmenti variabili tra loro perpendicolari che chiameremo x e y.

Nel cono ABC Apollonio traccia una perpendicolare FE a BC, e considera poi il punto V, intersezione del cono con un piano per FE parallelo ad AC. Seguendo la figura, vediamo che, sezionando il cono con un cerchio con diametro $B'C'$ parallelo a BC, a prendendo su questo piano MN parallela a FE, il punto $K = MN \cap B'C'$ diviene il punto medio di MN, così che $MK = KN$. Il triangolo $B'MC'$ è retto (inscritto in una semicirconferenza), e, per il teorema di Euclide, si ha
$MK^2 = B'K \cdot K'C$. $VSCK$ è un parallelogramma, quindi $VS = KC'$. Per la similitudine dei triangoli $VB'K$ e BCA abbiamo:



$$\frac{B'K}{B'V} = \frac{BC}{BA} \quad \text{e così} \quad \overline{B'K} = \overline{B'V} \cdot \frac{BC}{BA}$$

Per la similitudine dei triangoli VSA e BCA troviamo poi

$$\frac{VS}{VA} = \frac{BC}{BA} \qquad e\,\overline{VS} = \overline{VA} \cdot \frac{BC}{BA}$$

Infine

$$MK^2 = B'V \cdot VA \cdot \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$$

Possiamo porre $y = MK$ e $x = B'V = VK$. L'ultimo termine è un parametro che dipende da VA, lo chiamiamo p, $(BC/BA)^2$ essendo una costante che dipende dal cono.
Si arriva infine all'equazione $y^2 = xp$, alla quale Apollonio diede il nome di *parabola* (in greco: *para ballein* = uguale al termine di paragone). In modo analogo, egli trova le equazioni dell'*iperbole* (*hyper ballein* = più del termine di paragone):

$y^2 = xp + (p/d)x^2$,
e dell'*ellisse* (*en leipen* = togliere -dal termine di paragone-): $y^2 = xp - (p/d)x^2$.
Il procedimento è interessante perché può essere visto come un primo passo verso il piano cartesiano (è un'ipotesi affascinante che Descartes possa essere stato influenzato da tali procedimenti).
Poi Apollonio usa i *diametri* per creare le sezioni coniche: se una conica ha diametri fra loro paralleli è una parabola, se i diametri si incontrano in un punto dalla parte della concavità della curva, si tratta di un'ellisse; se si incontrano in un punto dalla parte della convessità, si tratta di un'iperbole (vedi sezione 4).
Apollonio introduce anche il centro e gli assi. Determina le proprietà dell'iperbole e dell'ellisse come luoghi geometrici, per i quali è costante la differenza o la somma delle distanze dai fuochi.
Nei tre libri che seguono, dei quali è nota una versione latina tradotta dall'arabo, Apollonio affronta problemi più raffinati (quale quello delle normali ad una curva) in un modo che non è molto diverso da quello che usiamo oggi. Spiega anche come costruire un cono di cui è data una sezione arbitraria.

~~altro~~ Apollonio può essere a pieno titolo considerato un anticipatore della geometria analitica: in particolare egli stesso chiama *ascissa* e *ordinata* le due grandezze che abbiamo indicato con x e y.

Le equazioni della parabola e dell'ellisse risultano rispettivamente $y^2 = px$ e $y^2 = px - px^2/d$.

L'equazione dell'iperbole ottenuta seguendo il procedimento di Apollonio corrisponde ad una curva che ha i fuochi sull'asse x. Se vogliamo passare da questa all'usuale forma canonica è sufficiente operare con una traslazione in modo da eliminare il termine di primo grado in x. Si verifica facilmente che la traslazione

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = x + d/2 \end{cases}$$

trasforma l'equazione precedente in

$$y^2 - px^2/d = -\,dp/4$$

che corrisponde ad un'iperbole con centro nell'origine e semiassi paralleli agli assi cartesiani; a questo punto dividendo per il termine noto ci riconduciamo alla forma

$$x^2/(d^2/4) - y^2/(dp/4) = 1.$$

3. Dalle equazioni particolari all'equazione generale

Dell'equazione dell'iperbole sono note sia la forma canonica, che la forma «ruotata» con il termine misto $xy = k$ (che rappresenta peraltro solo l'iperbole equilatera). Nel secondo caso, se $k = 0$ otteniamo la conica degenere $xy = 0$, formata dal «prodotto» dei due asintoti $x = 0$ e $y = 0$. Se ruotiamo di 45° gradi i due asintoti otteniamo le due bisettrici $x - y = 0$ e $x + y = 0$; la conica degenere formata dalle due rette ha equazione $(x - y)\,(x + y) = x^2 - y^2 = 0$. Per analogia le due bisettrici saranno allora

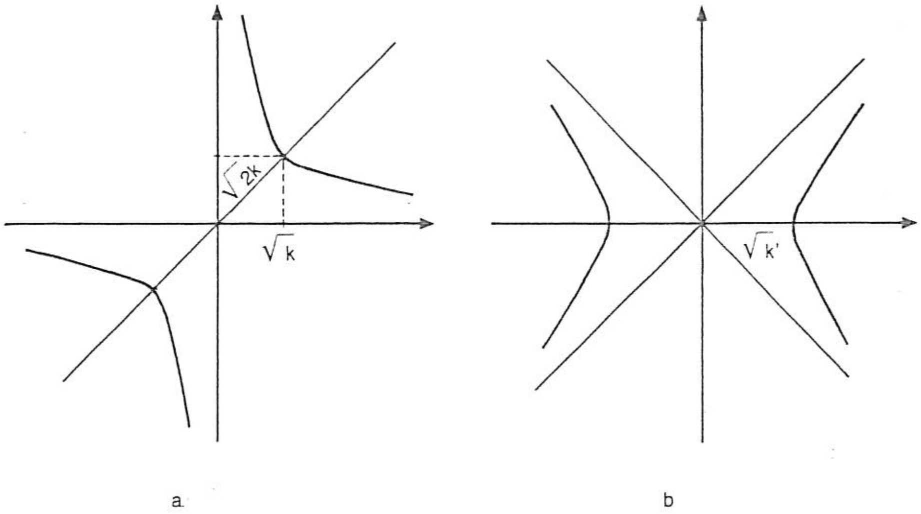


Fig. 2.

asintoti di una iperbole del tipo $x^2 - y^2 = k'$ (con $k' = 2k$, come si vede dalle figg. $2a$ e $2b$).

Un'equazione con i soli termini in x^2 e in y^2 (oltre al termine noto), come quelle canoniche di iperbole ed ellisse, corrisponde ovviamente ad una curva simmetrica rispetto all'asse x ed all'asse y. La parabola in forma canonica è invece simmetrica rispetto ad un solo asse. Una traslazione, che mantiene gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani, introduce nell'equazione solo termini di primo grado. Una rotazione porterà invece gli assi di simmetria in una posizione qualunque, e l'esempio dell'iperbole ci ha mostrato che può trasformare un'equazione canonica in un'altra con il termine misto in xy, o viceversa. Questo fatto si può dimostrare più in generale utilizzando l'equazione di una rotazione; ciò comporta alcuni calcoli, non troppo difficili ma piuttosto lunghi.

Dell'ellisse non conosciamo equazioni con termine misto. Usiamo però un procedimento diverso. Sappiamo che l'ellisse si ottiene dalla circonferenza mediante un'affinità, cioè una trasformazione che, nel caso in cui l'origine rimane fissa, ha equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{1}$$

Il caso più semplice è rappresentato da una *dilatazione* lungo uno degli assi: scegliendo per esempio l'asse x, come in fig. $3a$, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = y. \end{cases}$$

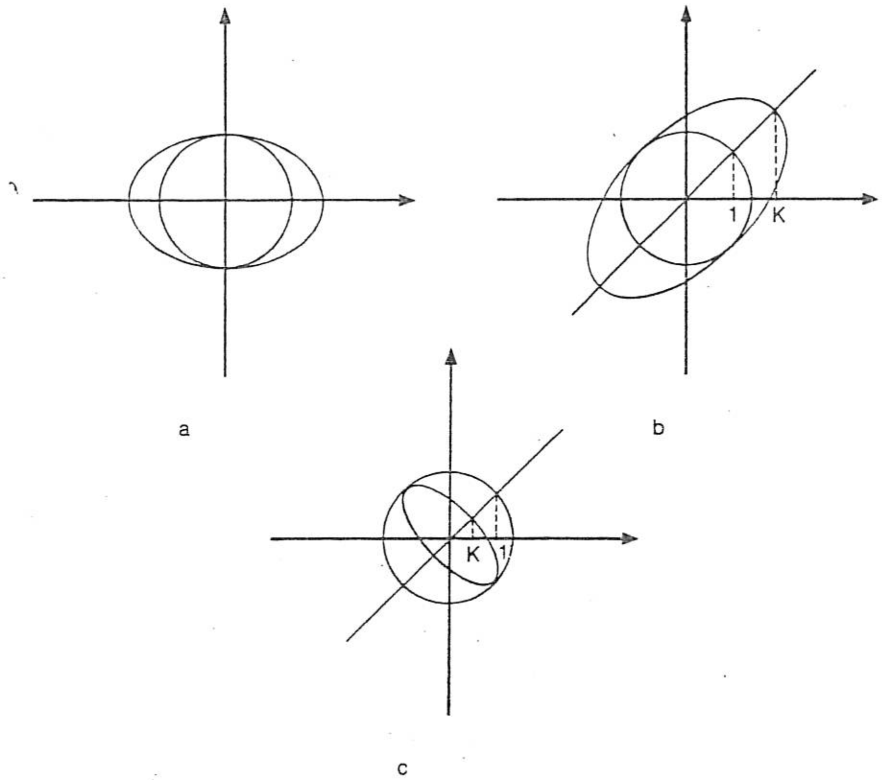


Fig. 3.

E se volessimo invece dilatare la circonferenza lungo la bisettrice del I e III quadrante? Occorre operare con un'affinità che trasformi il vettore (1, 1) in un suo multiplo (k, k), e il vettore $(1, -1)$ in se stesso. Sostituendo nelle equazioni (1) deve allora risultare $2a = k + 1$, $2b = k - 1$, $2c = k - 1$, $2d = k + 1$.

Ad esempio se $k = 1/3$ l'affinità ha equazioni

$$\begin{cases} x' = 2x/3 - y/3 \\ y' = -x/3 + 2y/3 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = 2x' + y' \\ y = x' + 2y'. \end{cases}$$

La circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si trasforma allora nell'ellisse

$$(2x + y)^2 + (x + 2y)^2 = 1$$

oppure, sviluppando i calcoli:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 1 = 0.$$

Se operiamo con la stessa affinità su una parabola, osserviamo tra l'altro lo «spostamento dell'asse»: ad esempio, la parabola $y = x^2$ si trasforma in $4x^2 + 4xy + y^2 - x - 2y = 0$, e l'asse $x = 0$ in $y = -2x$. Quest'ultima retta non è l'asse della nuova parabola; infatti la sua perpendicolare $y = x/2$ nell'origine non è tangente alla parabola; e di conseguenza l'origine non è il vertice della nuova parabola.

Componendo dilatazioni diverse e traslazioni, è facile ottenere equazioni con vari termini di primo e secondo grado, anche misti.

A questo punto, pur non pervenendo ad una dimostrazione completa, è plausibile affermare che la generica equazione di secondo grado

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

rappresenta, al variare dei coefficienti, tutte e sole le coniche.

6. Un metodo di costruzione della parabola

Dalla definizione delle coniche come luoghi discendono almeno tre metodi di costruzione: quelli cosiddetti «dei muratori», che fanno uso di spago e chiodi (e per iperbole e parabola di strumenti ausiliari quali rispettivamente una riga imperniata e una squadra scorrevole, fig. 12),

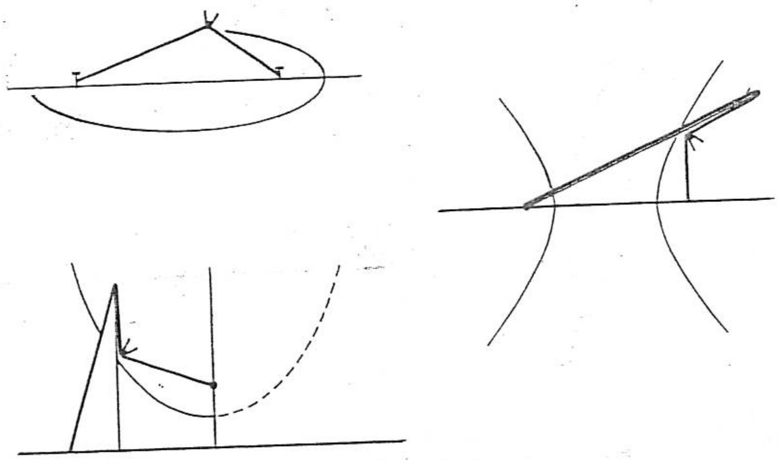


Fig. 12.

quelli tradizionali per punti con riga e compasso, e quelli per tangenti che utilizzano la piegatura della carta (cfr. [6]). Si tratta di metodi piuttosto noti, che si giustificano con le proprietà focali delle coniche.

Di genere diverso è una costruzione della parabola attribuita a Johannes Werner, che risale al 1522 (è tra l'altro interessante notare che dopo Apollonio non ci furono studi significativi relativi alle coniche fino a questo periodo).

Werner considera un fascio di semicirconferenze tangenti nel punto A (fig. 13a). Sia AB un segmento fissato sulla retta che contiene i diametri, e sia BF perpendicolare a tale retta. Tracciando le perpendicolari ad AB nei punti C, D, ecc. si ottengono, secondo la costruzione indicata, i punti C', D' ecc. che appartengono ad una parabola. Valgono infatti le relazioni

$$\overline{CC'}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}, \qquad \overline{DD'}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BD}, \qquad \text{ecc.}$$

se indichiamo quindi con x la misura del segmento XX', e con y quella del segmento BX, otteniamo la relazione

$$x^2 = \overline{AB} \cdot y$$

che è l'equazione di una parabola.

Da un punto di vista puramente geometrico la costruzione precedente si giustifica nel modo seguente: dato un cono retto, sia AB il segmento indicato in fig. 13b. Per una qualunque sezione parallela alla circonferenza base vale la relazione $\overline{XX'}^2 = \overline{A'X} \cdot \overline{KX}$, perché il piano della parabola è perpendicolare al piano di simmetria del cono passante per AB. Ma, per ogni sezione, $A'X$ è uguale a AB. «Schiacciamo» alcune di queste sezioni sul cerchio base (che possiamo ovviamente scegliere a una distanza qualunque dal vertice) con una proiezione parallela di direzione $A'A$. I punti come A' andranno su A, le circonferenze saranno tutte tangenti in A e i segmenti come XX' andranno sulla retta BF. Ritroviamo in sostanza la figura piana di partenza, con i segmenti XX' sovrapposti. La costruzione di Werner permette di «ridistribuirli» nel piano.

Un terzo modo di giustificare la costruzione consiste nel ricercare analiticamente il luogo dei punti X' che vi compaiono. Fissato allora un riferimento come in fig. 13c, l'equazione della circonferenza di raggio p (generico) è $x^2 - 2px + y^2 = 0$. Essa incontra la retta di equazione $x = b$ (dove b è la lunghezza di AB) nel punto di ordinata $y = \sqrt{2pb - b^2}$. Il punto di intersezione delle rette $y = \sqrt{2pb - b^2}$ e $x = 2p$ descrive il luogo $y^2 = bx - b^2$, che rappresenta appunto una parabola.

La costruzione di Werner può essere considerata semplicemente un buon esercizio per ritrovare, in un unico problema, le interpretazioni

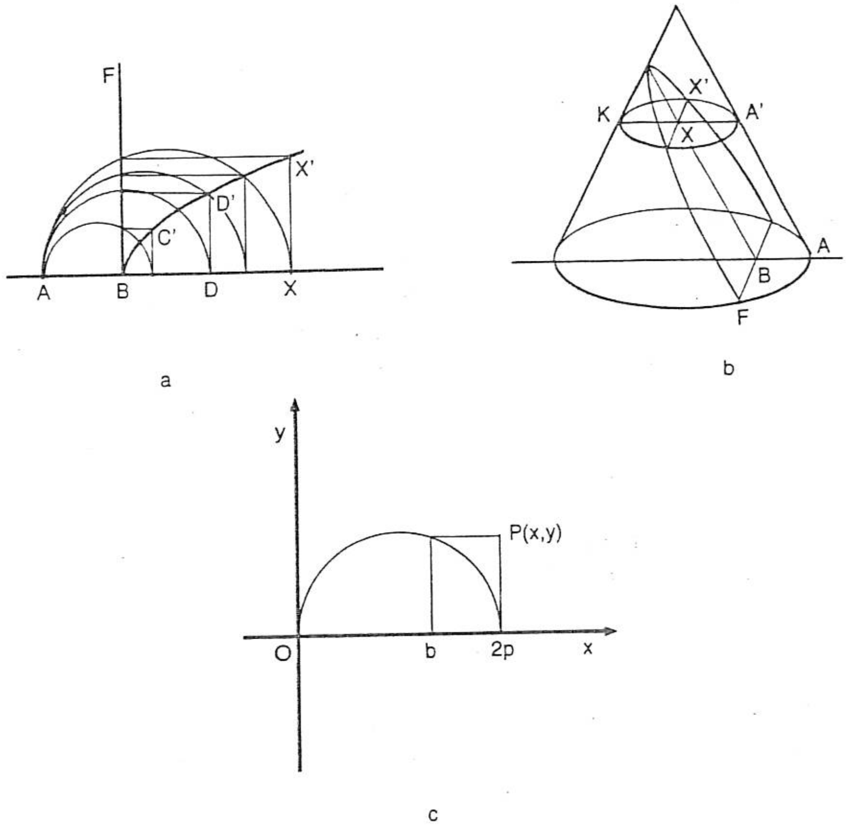
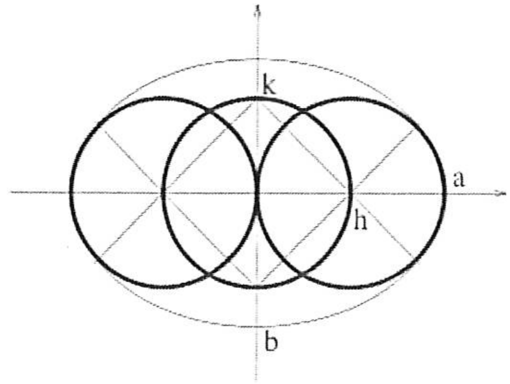


Fig. 13.

geometrica, analitica e algebrica. Ripercorrendo la storia delle coniche è facile incontrare altri esempi di questo tipo.

I metodi pratici per la costruzione delle coniche illustrati in figura 12 si riferiscono alla loro definizione come luogo di punti.
Nel caso dell'ellisse, la corda che collega i due chiodi ha proprio lunghezza $2a$, e la matita inserita tirando la corda ha somma delle distanze fissa dai due fuochi, percorre quindi un'ellisse (metodo del giardiniere).
Nel caso dell'iperbole, un'asta di lunghezza d è fissata ad uno dei due fuochi, mentre all'altro fuoco è fissata una corda di lunghezza k. La punta P della matita percorre un'iperbole, perché una parte della corda (diciamo di lunghezza h) si appoggia all'asta. Allora P dista d-h dal fuoco in cui è fissata l'asta, e dista k-h dall'altro fuoco. La differenza tra le due distanze è allora $(d\text{-}h) - (k\text{-}h) = d\text{-}k$, che è un valore fisso che normalmente si pone uguale a $2a$.
Nel caso della parabola, una corda di lunghezza l (pari al lato verticale di una squadra che scivola sulla retta base d - la direttrice) è fissata all'estremo superiore della squadra e ad un chiodo F (corrispondente al fuoco della parabola). Mentre la squadra si muove una parte l-h della corda rimane aderente alla squadra, e la matita P percorre una parabola, perché la sua distanza dal fuoco F e dalla direttrice d è sempre h.

Sebastiano Serlio (Bologna, 1475 Fontainebleau, 1554 circa) architetto, teorico dell'architettura del rinascimento, contemporaneo di Copernico, suggerisce metodi più pratici per approssimare un'ellisse, tramite la costruzione di *ovali*, fatti con raccordi di cerchi.
Nella figura seguente sono rappresentati due esempi, il secondo dei quali è quello usato da Bernini per la costruzione di piazza san Pietro.
Bernini però sottolinea il fatto di aver voluto rappresentare un'ellisse mettendo le fontane dove sarebbero i fuochi di un'ellisse con gli stessi semiassi.



construction II