Esempio Trovare e classificare i pti critici:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$$

$f_x(x,y) = 2x + 2y$ $\qquad f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 2 = f''_{yx}$

$f_y(x,y) = 2x - 3y^2.$ $\qquad f_{yy}(x,y) = -6y$

Pti critici
$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow y = -x \\ 2x - 3y^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow 2x - 3x^2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(x = 0) \vee \left(x = \frac{2}{3}\right)$$

Pti critici $(0,0)$ $\quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6y \end{bmatrix}.$$

<u>Studio di $(0,0)$</u>. $\quad D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}}_{D^2 f(0,0) - \lambda I} = 0$$

$$(2-\lambda)(-\lambda) - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$
$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5}$$

una positiva, una negativa.

$\Rightarrow$ matrice indefinita $\Rightarrow$ $(0,0)$ è punto di sella
(né di max né di min. relativo)

Studio di $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$D^2 f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Eq^{ne} caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5}$ entrambe positive

$\Rightarrow D^2 f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ definita positiva

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ min. relativo stretto.

OSS In realtà in dim 2 (non in dim. superiore) si può fare in modo più semplice, in quanto non ci interessa il valore delle soluzioni, ma solo il loro segno.

Prendiamo una matrice simmetrica 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow \text{eq}^{ne} \text{ caratteristica}$$

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0.$$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{= \lambda_1 + \lambda_2}\lambda + \underbrace{\overbrace{ac - b^2}^{\det A}}_{\lambda_1 \lambda_2} = 0.$$

sappiamo già che ammette radici reali. λ_1, λ_2

$\Rightarrow \det A = \lambda_1 \lambda_2$.

$\Rightarrow$ 1) [se $\det A < 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 discordi $\Rightarrow A$ indefinita]. ($\Rightarrow$ se A è l'hessiano di f il pto è una sella)

$\Rightarrow$ 2) se $\det A = 0 \Rightarrow$ almeno una delle radici è 0 $\Rightarrow$ matrice semidefinita $\Rightarrow$ il criterio non fornisce risposte.

$\Rightarrow$ 3) se $\det A > 0 \Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 sono concordi.

$\Downarrow$

OSS $ac > 0 \Rightarrow a$ e c concordi $\Rightarrow a+c$ ha lo stesso segno di a.

3a) $\det A > 0$, $a > 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$

$\Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow A$ def^{ta} positiva

3b) $\det A > 0$, $a < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$

$\Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow A$ def^{ta} negativa.

TEOREMA (solo dim 2) Sia $f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

A aperto, $f \in C^2(A)$

Sia $(x_0,y_0) \in A$ un pto critico di f $(\nabla f(x_0,y_0) = \underline{0})$

Allora:

1) Se $\det D^2 f(x_0,y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è pto di sella

(né max. né min. relativo)

2) Se $\det D^2 f(x_0,y_0) > 0$ $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Longrightarrow$

(x_0,y_0) è pto di min. relativo stretto.

3) Se $\det D^2 f(x_0,y_0) > 0$ $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Longrightarrow$

(x_0,y_0) è pto di max. relativo stretto.

4) se $\det D^2 f(x_0,y_0) = 0$, allora non si può dire nulla con lo studio di $D^2 f(x_0,y_0)$.

Torniamo all'esercizio precedente

$(0,0) \qquad D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\det D^2 f(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ sella.

$\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \quad D^2 f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\det D^2 f\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 8 - 4 = 4 > 0$

$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ min. rel. stretto.

Stesso compito (classificazione dei pti critici)
per $f(x,y) = e^{3x-y}(x^2-y^2)$

$$f_x(x,y) = 3e^{3x-y}(x^2-y^2) + 2x\, e^{3x-y} =$$
$$= e^{3x-y}(3x^2-3y^2+2x)$$

$$f_y(x,y) = e^{3x-y}\left[-x^2+y^2-2y\right]$$

<u>Pti critici</u>

$$\begin{cases} 3x^2-3y^2+2x=0 \\ \cancel{-x^2+y^2-2y=0} \end{cases}$$ molt. per 3

$$-3x^2+3y^2-6y=0$$

Sommo: $2x-6y=0$ $\quad \boxed{x=3y}$

$$-9y^2+y^2-2y=0$$
$$8y^2+2y=0$$
$$(4y+1)y=0$$

$y=0 \Rightarrow x=0$

$y=-\frac{1}{4} \Rightarrow x=-\frac{3}{4}$

Due pti critici: $(0,0)$ $\quad \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

<u>Classificazione:</u>

$$f_x(x,y) = 3e^{3x-y}(x^2-y^2) + 2x\,e^{3x-y} =$$
$$= e^{3x-y}(3x^2-3y^2+2x)$$
$$f_y(x,y) = e^{3x-y}\left[-x^2+y^2-2y\right]$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{3x-y}\left[9x^2-9y^2+6x+6x+2\right] =$$
$$= e^{3x-y}\left[9x^2-9y^2+12x+2\right]$$
$$f_{xy}(x,y) = e^{3x-y}\left[-3x^2+3y^2-2x-6y\right]$$
$$f_{yy}(x,y) = e^{3x-y}\left[x^2-y^2+2y+2y-2\right] =$$
$$= e^{3x-y}\left[x^2-y^2+4y-2\right]$$

$(0,0)$ $\quad D^2f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\det D^2f(0,0) < 0 \Longrightarrow$ sella

$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ $\quad D^2f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = e^{-2}$

$$f_{yy}(\ \ ) = e^{-2}\left[\frac{9}{16}-\frac{1}{16}-1-2\right] = e^{-2}\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$f_{xx}\left(-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}\right) = e^{-2}\left(\frac{81}{16}-\frac{9}{16}-9+2\right) = e^{-2}\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$f_{xy}\left(-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{4}\right) = e^{-2}\left(-\frac{27}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{2}-2\right) = e^{-2}(-2)$$

$$D^2 f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} e^{-2}\left(-\frac{5}{2}\right) & -2e^{-2} \\ -2e^{-2} & -\frac{5}{2}e^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\det D^2 f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = e^{-4} \det \begin{bmatrix} -5/2 & -2 \\ -2 & -5/2 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-4}\left(\frac{25}{4} - 4\right) > 0.$$

$$f_{xx}\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{2}e^{-2} < 0.$$

$\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ pto di max. relativo.

20. $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4-y^4)$ ~~Studiare~~ Trovare e classificare i pti critici.

$$f_x(x,y) = e^{x^2-y^2}\left[2x(x^4-y^4)+4x^3\right] =$$
$$= e^{x^2-y^2}2x\left[x^4-y^4+2x^2\right]$$
$$f_y(x,y) = e^{x^2-y^2}\left[-2y(x^4-y^4)-4y^3\right] =$$
$$= e^{x^2-y^2}\,2y\left[-x^4+y^4-2y^2\right]$$

Pti critici: $\begin{cases} x\,(x^4-y^4+2x^2)=0 \\ y\,(-x^4+y^4-2y^2)=0 \end{cases}$

1) $x=0$ $<$ $y=0$; $y^4-2y^2=0 \Rightarrow y^2=2 \quad y=\pm\sqrt{2}$

$(0,0)$, $(0,\pm\sqrt{2})$

2) $y=0$ $<$ $x=0$ già visto ; $x^4+2x^2=0 \Rightarrow x^2+2=0$ mai.

3) $\begin{cases} x^4-y^4+2x^2=0 \\ -x^4+y^4-2y^2=0 \end{cases}$

$0 \quad 0 \quad 2x^2-2y^2=0 \Rightarrow$ $x^2=y^2 \Rightarrow$ $<$ $x=y$; $x=-y$.

3) $\begin{cases} x^4 - y^4 + 2x^2 = 0 \\ -x^4 + y^4 - 2y^2 = 0 \end{cases}$

$\quad 0 \quad\quad 0 \quad 2x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow \quad x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{x^4} - \cancel{x^4} + 2x^2 = 0 \\ -\cancel{x^4} + \cancel{x^4} - 2x^2 = 0 \end{cases} \quad\quad x = 0 \quad y = 0$

(già visto.)

3 pti critici $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt{2})$.

Classifico:

$$f_x(x,y) = e^{x^2-y^2}\left[2x(x^4-y^4) + 4x^3\right] =$$

$$= e^{x^2-y^2} 2x \left[x^4 - y^4 + 2x^2\right] = 2e^{x^2-y^2}\left(x^5 - xy^4 + 2x^3\right)$$

$$f_y(x,y) = e^{x^2-y^2}\left[-2y(x^4-y^4) - 4y^3\right] =$$

$$= e^{x^2-y^2} 2y\left[-x^4 + y^4 - 2y^2\right]$$

$$= 2e^{x^2-y^2}\left[-yx^4 + y^5 - 2y^3\right].$$

$$f_{xx}(x,y) = 2e^{x^2-y^2}\left\{2x\underbrace{\left[\quad\right]}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + 5x^4 - y^4 + 6x^2\right\}$$

nei pti critici!

$$f_{xy}(x,y) = 2e^{x^2-y^2}\left\{2x\underbrace{\left(\quad\right)}_{\shortparallel} - 4xy^3\right\}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2e^{x^2-y^2}\left\{-2y\underbrace{\left(\quad\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - x^4 + 5y^4 - 6y^2\right]$$

nei pti critici

In $(0,0)$: $\quad D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ nessuna conclusione. (per ora).

Studio di $D^2 f(0, \pm\sqrt{2})$ <u>farlo da soli!</u>

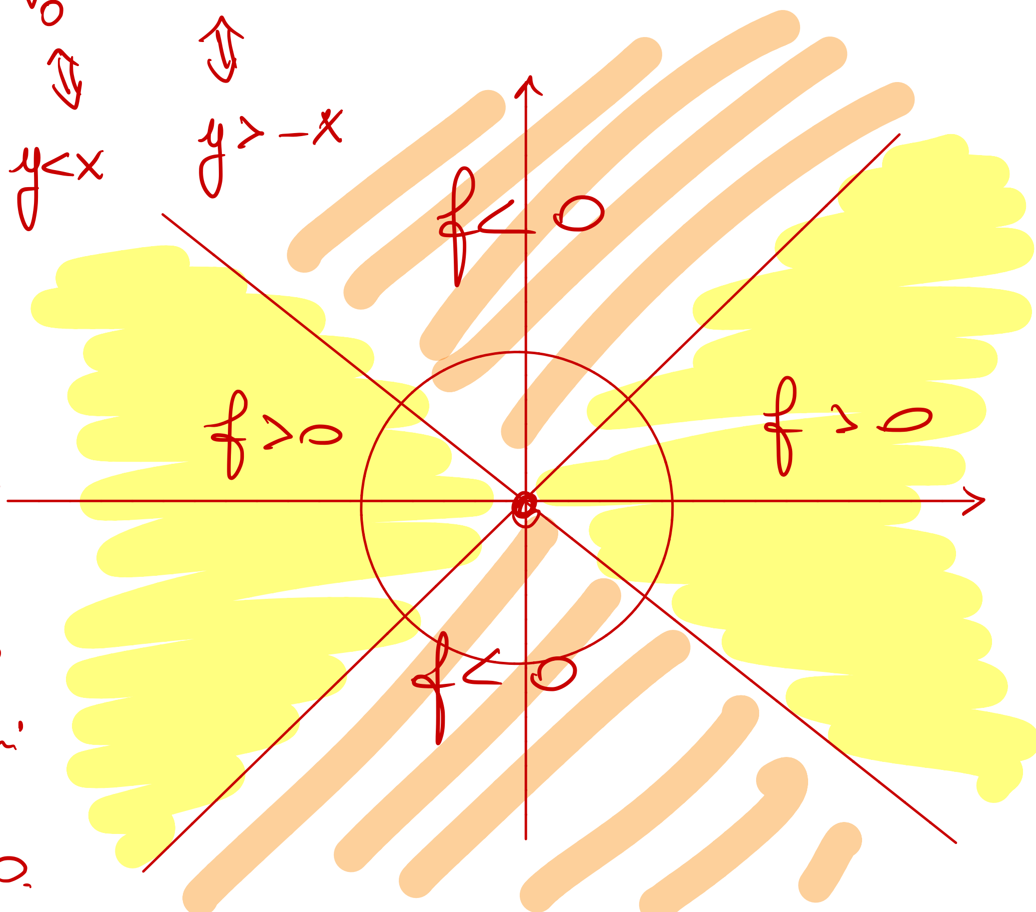
Continuo a studiare $(0,0)$

$f(0,0) = 0$.

Studio il segno di $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4-y^4) \gtreqless 0$

$\Leftrightarrow \quad x^4 - y^4 \gtreqless 0$

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{sempre} > 0 \text{ tranne in } (0,0)} \underbrace{(x-y)}_{\substack{> 0 \\ \Updownarrow \\ y < x}} \underbrace{(x+y)}_{\substack{> 0 \\ \Updownarrow \\ y > -x}} \gtreqless 0$$



Ogni intorno di $(0,0)$ contiene sia punti in cui $f(x,y) > f(0,0) = 0$ sia punti in cui vale $f(x,y) < f(0,0) = 0$.

$\Rightarrow$ né max né min. rel.

OSS Esempi di casi in cui le derivate seconde non "dicono nulla".

$f_1(x,y) = x^4 + y^4$

$f_2(x,y) = -x^4 - y^4$

$f_3(x,y) = x^4 - y^4$.

Tutte queste funzioni hanno $(0,0)$ come pto critico.

$$D^2 f_1(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D^2 f_2(0,0) = D^2 f_3(0,0)$$

Tuttavia, studiando il segno, si vede che

$(0,0)$ è di min. assoluto stretto per f_1.
" " " max. " " " f_2.
" " di sella per f_3

OSS. Ci sono pti critici che non sono né di max rel., né di min. relativo, né di sella.

Esempio: $f(x,y) = x^3$

$f_x(x,y) = 3x^2$
$f_y(x,y) \equiv 0$.
$\Rightarrow$ Tutti i pti dell'asse y sono pti critici.

Derivate di funzioni composte.

In dim. 1.

I, J intervalli:

$$g : I \to \cancel{\mathbb{R}}\ J \qquad f : J \to \mathbb{R}$$

Se $\operatorname{Im} g \subset J$, posso considerare la funz. composta

$$f \circ g : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(g(x))$$

Se f e g sono derivabili nei rispettivi intervalli, allora $f \circ g$ è derivabile in I e

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Vogliamo generalizzare al caso di più variabili.

Ci sono diverse situazioni: ne studiamo un paio.

1) $f(g(x,y))$.

$g(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}$ J $\qquad f: J \longrightarrow \mathbb{R}$

aperto

intervallo

$\Rightarrow$ resta definita

$$f \circ g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(g(x,y))$$

Allora, se f è di classe $C^1(J)$
g è di classe $C^1(A)$

Allora $f \circ g$ è di classe $C^1(A)$ e si ha la seguente formula per le derivate parziali: