Derivate di funzioni composte

In dim. 1. $\qquad I, J$ intervalli

$$g : I \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\ J \qquad f : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Se $\operatorname{Im} g \subset J$, posso considerare la funz. composta

$$f \circ g : \quad I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\qquad\qquad x \longmapsto f(g(x))$$

Se f e g sono derivabili nei rispettivi intervalli, allora $f \circ g$ è derivabile in I e

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Vogliamo generalizzare al caso di più variabili.

Ci sono diverse situazioni: ne studiamo un paio.

1) $f(g(x,y))$.

$g(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \cancel{\mathbb{R}}\ J$ $\qquad f: J \to \mathbb{R}$ intervallo

aperto

$\Rightarrow$ resta definita

$$f \circ g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(g(x,y))$$

Allora, se f è di classe $C^1(J)$

g è di classe $C^1(A)$

Allora $f \circ g$ è di classe $C^1(A)$ e si ha la seguente formula per le derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \circ g)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(g(x,y))\right] =$$

$$= f'(g(x,y))\,\frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f \circ g)(x,y) = f'(g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

Esempio: $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{g(x,y)} = \frac{g_x(x,y)}{2\sqrt{g(x,y)}}$ $\qquad$ se $g \in C^1(A)$ $\forall (x,y) \in A$ t.c. $g(x,y) > 0$

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{g(x,y)} = \frac{g_y(x,y)}{2\sqrt{g(x,y)}}$$

2° caso $\quad f(g(t), h(t))$

$f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g(t): I \to \mathbb{R}$, $h(t): I \to \mathbb{R}$ $\qquad$ t.c.

$f \in C^1(A)$ $\qquad$ $(g(t), h(t)) \in A$

$g, h \in C^1(I)$.

Allora $\underset{F(t)}{:=} f(g(t), h(t)) : I \to \mathbb{R}$

$t \longmapsto f(g(t), h(t))$

è di classe $C^1(I)$, e si ha

$$F'(t) = f_x(g(t), h(t))\, g'(t) + f_y(g(t), h(t))\, h'(t)$$

<u>Esempio</u> $\quad \operatorname{sen}(g(t)\, h^3(t))$

$f(x,y) = \operatorname{sen}(x y^3)$

$f_x(x,y) = y^3 \cos(xy^3)$; $\quad f_y(x,y) = 3x^2 \cos(x^3)$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sen}(g(t) h^3(t)) =$$

$$= h^3(t) \cos(g(t) h^3(t))\, g'(t) + 3\, g(t)\, h^2(t) \cos(g(t) h^3(t))\, h'(t)$$

$$F'(t) = f_x\underbrace{(g(t), h(t))}_{\gamma(t)}\, g'(t) + f_y\underbrace{(g(t), h(t))}_{\gamma(t)}\, h'(t)$$

$$F(t) = f(g(t), h(t)) = f(\underline{\gamma}(t))$$

Considero la funzione

$$\underline{\gamma}(t) : \quad I \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (g(t), h(t))$$

$$\underline{\gamma}'(t) = (g'(t), h'(t))$$

La formula per la derivata scritta in alto diventa:

$$\frac{d}{dt} f(\underline{\gamma}(t)) = \nabla f(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)$$

formalmente simile alla formula per funzioni di 1 variabile.

Trovare e classificare i pti critici di

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)(1-z^2) + z^2.$$

$$f_x(x,y,z) = 2x(1-z^2)$$

$$f_y(x,y,z) = 2y(1-z^2)$$

$$f_z(x,y,z) = -2z(x^2+y^2) + 2z = 2z(1-x^2-y^2)$$

Pti critici:
$$\begin{cases} \cancel{2}x(1-z^2) = 0 \\ \cancel{2}y(1-z^2) = 0 \\ \cancel{2}z(1-x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

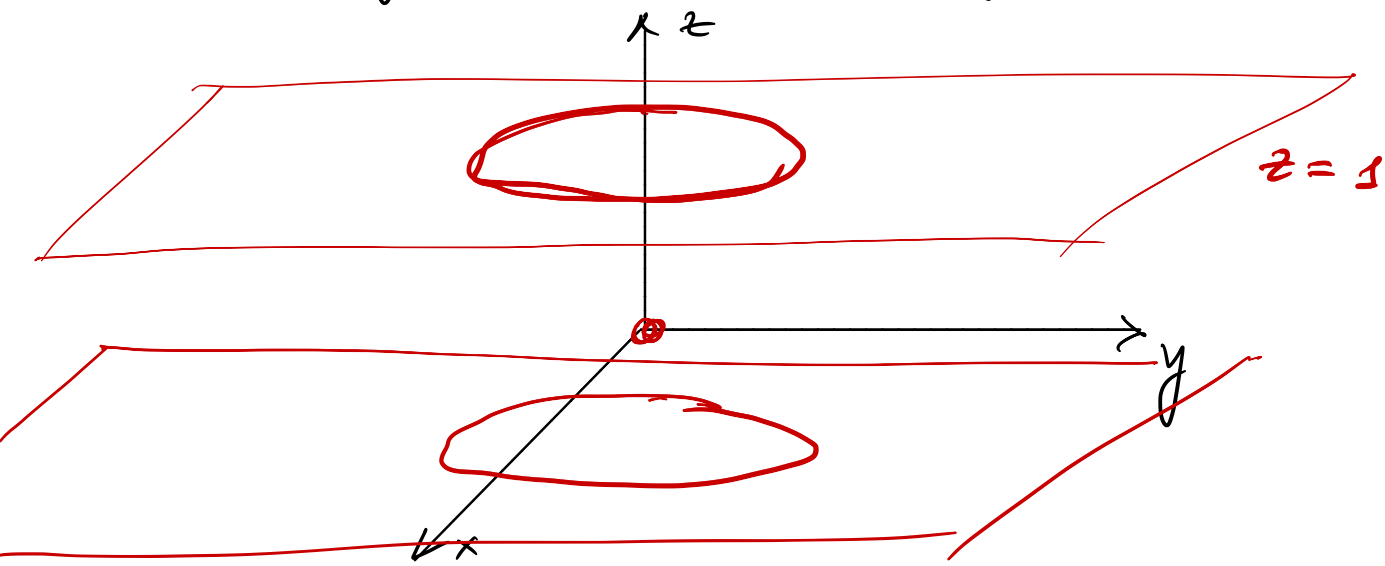
$$f_x \quad \cancel{2}x(1-z^2) = 0$$
$$f_y \quad \cancel{2}y(1-z^2) = 0$$
$$f_z \quad \cancel{2}z(1-x^2-y^2) = 0$$

$$f_{xx}(x,y,z) = 2(1-z^2) \; ; \; f_{xy} = 0$$
$$f_{xz} = -4xz$$
$$f_{yy} = 2(1-z^2)$$
$$f_{yz} = -4yz$$
$$f_{zz} = 2(1-x^2-y^2)$$

$$\begin{cases} z = \pm 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Pti critici: l'origine $(0,0,0)$ e le due circonferenze

$\{z=1, \; x^2+y^2=1\}$ $\quad \{z=-1, \; x^2+y^2=1\}$



$f_{xx}^{(x,y,z)} = 2(1-z^2)$; $f_{xy} = 0$

$f_{xz} = -4xz$

$f_{yy} = 2(1-z^2)$

$f_{yz} = -4yz$

$f_{zz} = 2(1-x^2-y^2)$

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2(1-z^2) & 0 & -4xz \\ 0 & 2(1-z^2) & -4yz \\ -4xz & -4yz & 2(1-x^2-y^2) \end{bmatrix}$$

$$D^2 f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Eq^{ne} caratteristica : $(2-\lambda)^3 = 0$ $\quad \lambda = 2, 2, 2.$

def^{ta} positiva $\Rightarrow$ $(0,0,0)$ pto di min. relativo

Studio dei punti $z=1$, $x^2+y^2=1$

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -4x \\ 0 & -\lambda & -4y \\ -4x & -4y & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$-\lambda^3 + 16\lambda x^2 + 16\lambda y^2 = 0$$

$$-\lambda^3 + 16\lambda \underbrace{(x^2+y^2)}_{=1} = -\lambda^3 + 16\lambda = 0$$

$\lambda = 0$ $\lambda = 4$ $\lambda = -4$

$\Rightarrow$ matrice indefinita $\Rightarrow$ né min né max relativo (sella).