Classificazione dei punti critici

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto $\quad f \in C^2(A)$.

$(x_0, y_0) \in A$ pto critico di f, cioè $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

Ci chiediamo se: (x_0, y_0) è
- pto di max. rel.
- pto di min. rel
- nessuno dei due

$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow (0,0)$ è pto di min. rel.

" $= -x^2 - y^2 \Rightarrow$ " " " " max. "

" $= x^2 - y^2 \Rightarrow (0,0)$ non è né di max né di min.

punto di sella.

Se mi muovo dall'origine lungo l'asse x $(y=0)$

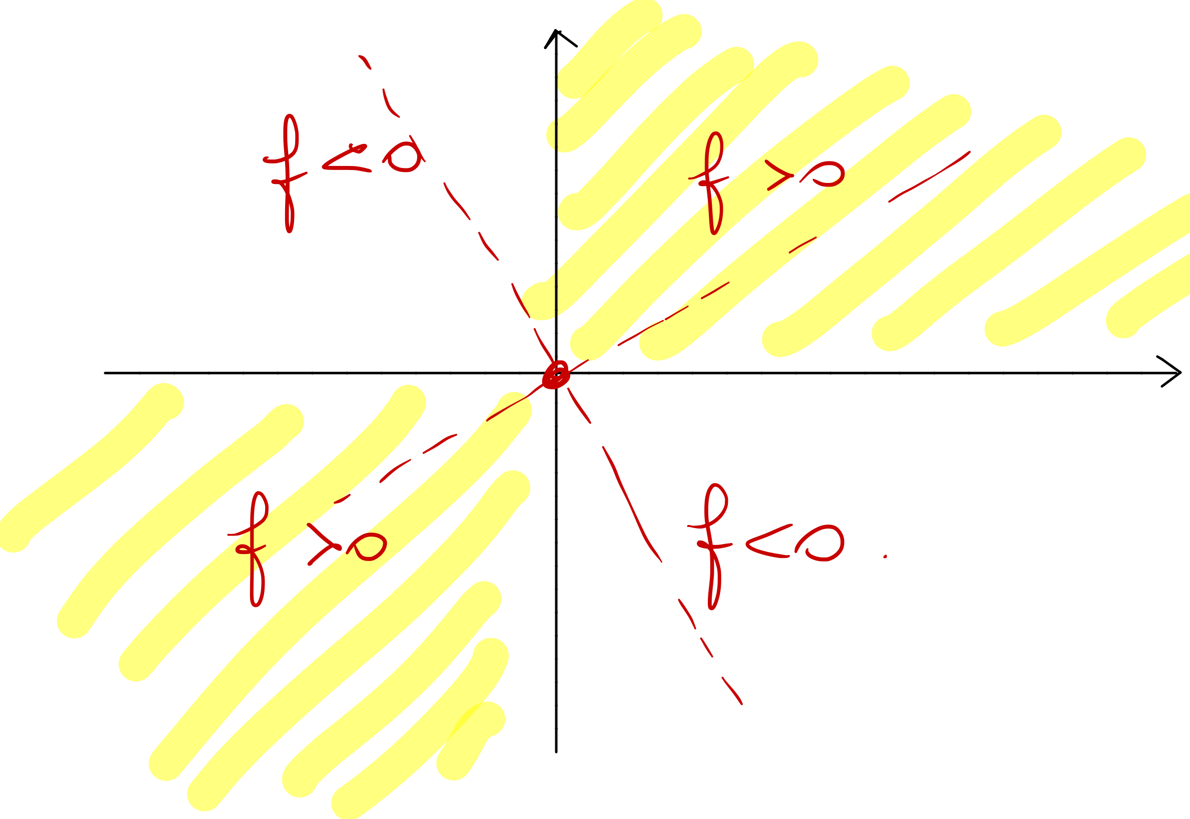
$$f(x,0) = x^2$$ in 0 vediamo un minimo

lungo l'asse y $(x=0)$

$$f(0,y) = -y^2$$ in $y=0$ vediamo un massimo.

$f(x,y) = xy$ $\qquad \nabla f(x,y) = (y, x)$ si annulla in $(0,0)$

Studio il segno di f



$f(x,y)=xy$

in alternativa, se prendo la retta $y=x$.

$f(x,x) = x^2$ minimo in $x=0$

lungo la retta $y=-x$

$f(x,-x) = -x^2$ max in $x=0$.

In realtà questa è "la stessa funzione di prima",

$f(x,y) = x^2-y^2$

con un cambio di riferimento

$$\begin{cases} x+y = x' \\ x-y = y' \end{cases}$$

In pratica, come si distinguono questi casi in generale?

Si studia la ~~derivata seconda~~ matrice delle derivate seconde

$$D^2 f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Matrice Hessiana.

Schwarz $\overset{\text{Schwarz}}{=} f_{xy}$

matrice 2×2.

In 3 dim. è una matrice 3×3 (sempre simmetrica)

$$D^2 f(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f_{xy}(\,) & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

$=$

Per studiare la natura dei pti critici, dovremmo riuscire ad assegnare un "segno" alla matrice

Segno di una matrice quadrata simmetrica

Sia $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

simmetrica, cioè:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1 \dots n.$$

Autovalori di una matrice

$\lambda \in \mathbb{R}$ si dice Autovalore di A se $\exists$ vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ t.c. (vettore colonna.)

$$A \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

TEOREMA Se A è simmetrica, allora gli autovalori sono n (tenendo conto della moltepl.) e sono le soluzioni dell'eq^{ne} algebrica

$$\det [A - \lambda I] = 0. \quad \text{eq}^{ne} \text{ caratteristica}$$

che ammette sempre n soluzioni reali (tenendo conto della molteplicità).

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1 \Longleftrightarrow 2-\lambda = \pm 1 \Longrightarrow (\lambda = 1) \vee (\lambda = 3)$$

DEF. Una matrice A $n \times n$ simmetrica si dice

- definita positiva se tutti gli autovalori sono > 0
- definita negativa " " " " " < 0
- semidefinita positiva " " " " " ≥ 0
- semidefinita negativa " " " " ≤ 0.
- indefinita se ci sono sia autovalori positivi che negativi.

TEOREMA Sia $f \in C^2(A)$ A aperto di $\mathbb{R}^n$

se $n=2$ $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$, se $n=3$ $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Sia $\underline{x}_0$ un pto critico di A. Allora.

1) Se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è definita positiva, allora $\underline{x}_0$ è pto di min. relativo stretto

2) Se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è definita negativa, allora $\underline{x}_0$ è pto di max. relativo stretto

3) se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è indefinita, allora $\underline{x}_0$ non è né di max. né di min relativo (punto di sella).

4) Se $D^2 f(\underline{x}_0)$ è semidefinita positiva negativa, ma non def^{ta} positiva negativa, non si può concludere nulla

Esempio Trovare e classificare i pti critici:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$$

$$f_x(x,y) = 2x + 2y \qquad f_{xx}(x,y) = 2, \quad f_{xy}(x,y) = 2 = f_{yx}''$$

$$f_y(x,y) = 2x - 3y^2. \qquad f_{yy}(x,y) = -6y$$

Pti critici
$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow y = -x \\ 2x - 3y^2 = 0 \longrightarrow 2x - 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(x = 0) \vee \left(x = \frac{2}{3}\right)$$

Pti critici $(0,0)$ $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6y \end{bmatrix}.$$

... to be continued ...