ISTITUZIONI DI MATEMATICA II
FOGLIO N. 5 DI ESERCIZI

A. Dall'Aglio, F. De Marchis 8.5.2018.

Per le seguenti funzioni, calcolare le derivate parziali e dire se ci sono dei punti del dominio della funzione in cui le derivate parziali non esistono.

1. $f(x,y) = x e^{xy^2}$
2. $f(x,y) = \sqrt{3 + x^4 + 2y^4}$
3. $f(x,y) = \sqrt{x^4 + 2y^4}$
4. $f(x,y) = \dfrac{x}{xy + 3y^2}$
5. $f(x,y) = |xy|$
6. $f(x,y) = \sqrt{x - 3y}$

Calcolare, se esistono, le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0)$ delle funzioni f indicate, nei punti (x_0, y_0) indicati, lungo le direzioni $\underline{v}$ <u>individuate</u> dai vettori $\underline{w}$ indicati.
(N.B.: $\underline{w}$ potrebbe non essere una direzione).

7. $f(x,y) = x^3 y - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$, $\underline{w} = (-5, 12)$

8. $f(x,y) = x$, $(x_0, y_0) = (5, 4)$, $\underline{w} = (1, -1)$

9. $f(x,y) = |x + y|$ $(x_0, y_0) = (-2, 1)$, $\underline{w} = (2, 3)$

10. $f(x,y) = \cos(xy)$ $(x_0, y_0) = (0, 2)$, $\underline{w} = (-1, 0)$

11. $f(x,y) = \dfrac{x}{x + 4y}$, $(x_0, y_0) = (1, 3)$, $\underline{w} = (-1, -2)$

12. Considerare la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y = x^2,\ x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che:

a) nell'origine f ammette derivate direzionali in <u>tutte</u> le direzioni;

b) f non è continua nell'origine.

13. Stesse consegue per la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>OSS</u> I due precedenti esempi mostrano che in dimensione 2 (o superiore) la derivabilità **non implica** la continuità.

Trovare i punti critici delle seguenti funzioni:

14. $f(x,y) = \ln(8y - 2x^2 - 2y^2)$

15. $f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1$

16. $f(x,y) = x^3 y - 2y^2 + 3x^2 y$

17. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$

18. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 + 3y^3 - 150x$

19. $f(x,y) = (e^{x+1} - 1)\ln(1+y^2) + x^2 - x$

20. $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}(x^4 - y^4)$

21. $f(x,y) = 5 + (x + \operatorname{sen} y)^3 (x - \operatorname{sen} y)$