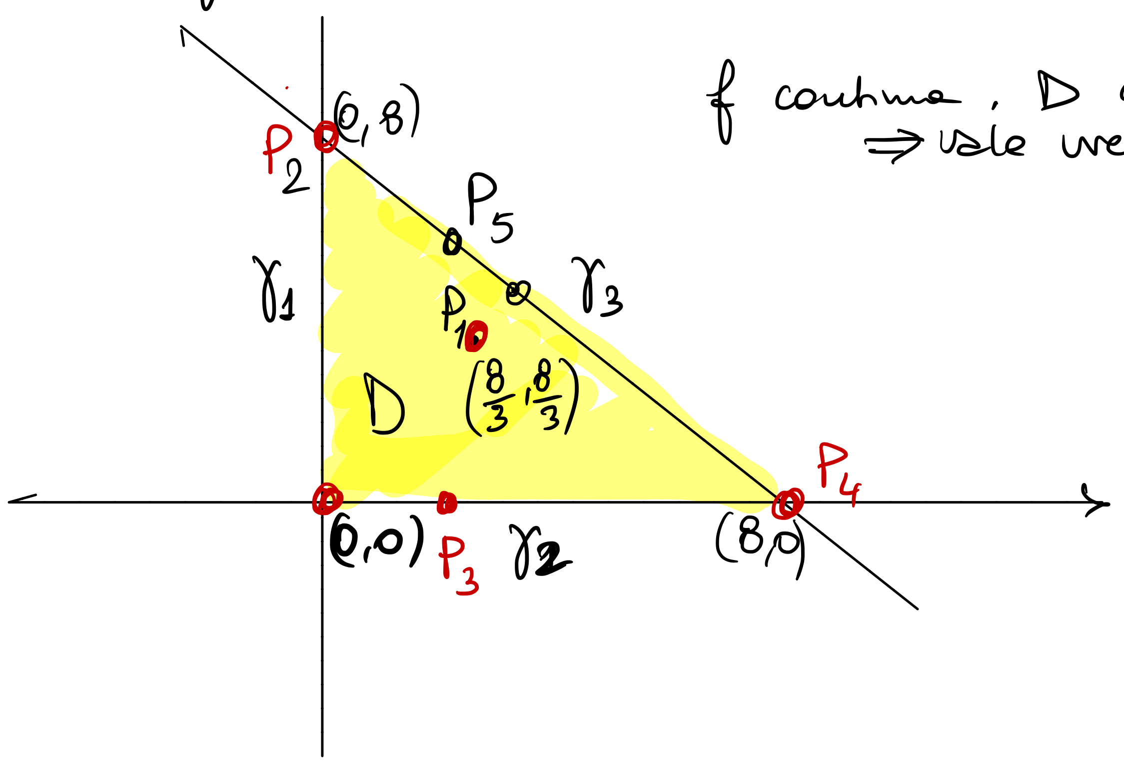
Calcolare ~~max~~ max e min. assoluti di

$$f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$$

nel triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$.



f continua, D chiuso e limitato $\Rightarrow$ vale Weierstrass.

0) Pti di non derivabilità: non ce ne sono

1) Pti critici interni:

$$f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$$

$$f_x(x,y) = 3x^2 + (y-3x) - 3(x+y)$$

$$f_y(x,y) = (y-3x) + (x+y)$$

Pti critici: sol^{ni} del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$$\overbrace{3x^2 - 8x}^{x(3x-8)} = 0$$

$$\Downarrow$$

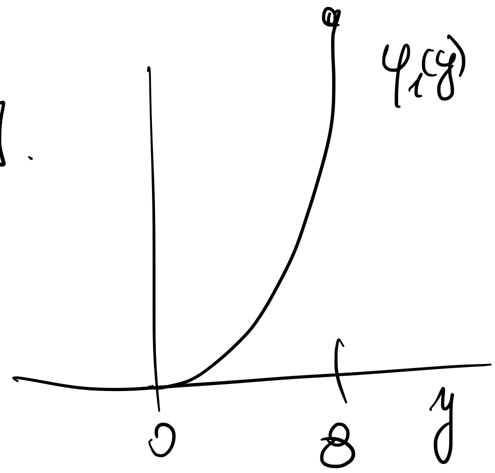
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = 8/3 \end{cases}$$

$P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ unico pto critico interno

3) Studio sulla frontiera $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$\boxed{\gamma_1}$ $x=0$, $y \in [0,8]$

$\varphi_1(y) = f(0,y) = y^2$ $\qquad y \in [0,8]$.



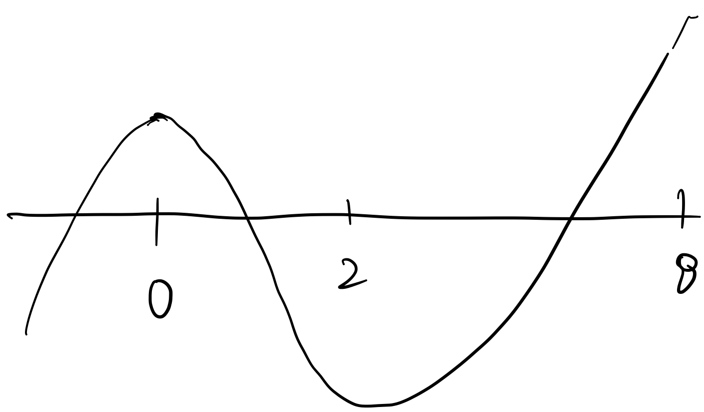
Pti da considerare

$O(0,0)$, $P_2(0,8)$

$\boxed{\gamma_2}$ $y=0$, $x \in [0,8]$

$\varphi_2(x) = f(x,0) = x^3 - 3x^2$ $\qquad x \in [0,8]$.

$\varphi_2'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \iff (x=0) \vee (x=2)$



Pti da considerare $O(0,0)$, $P_3(2,0)$, $P_4(8,0)$

$$\boxed{f(x) = x^3 + (x+y)(y-3x)}$$

$\boxed{\gamma_3}$ $\quad y = -x+8 \qquad x \in [0,8]$

$$\varphi_3(x) = f(x, 8-x) = x^3 + 8\cdot(8-4x) = x^3 - 32x + 64$$

$$\varphi_3'(x) = 3x^2 - 32 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{32}{3}} = \pm 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \pm \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

Pti da considerare $\quad x = \frac{4}{3}\sqrt{6} \Rightarrow y = 8 - \frac{4}{3}\sqrt{6}$

$P_5\left(\frac{4}{3}\sqrt{6}, 8 - \frac{4}{3}\sqrt{6}\right) \qquad P_2(0,8), \quad P_4(8,0)$

Pti tra cui cercare max e min assoluti

$O(0,0) \qquad f(0,0) = 0$

$P_2(0,8) \qquad f(0,8) = 64$

$P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \qquad f\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) = -\frac{256}{27}$ minimo assoluto.

$P_3(2,0) \qquad f(2,0) = -4$

$P_4(8,0) \qquad f(8,0) = 320$ max. assoluto.

$P_5\left(\frac{4}{3}\sqrt{6}, 8-\frac{4}{3}\sqrt{6}\right), \quad f(P_5) = -\frac{256}{3\sqrt{3}}\sqrt{2} + 64 \cong -5{,}67$

TEOREMA DI FERMAT

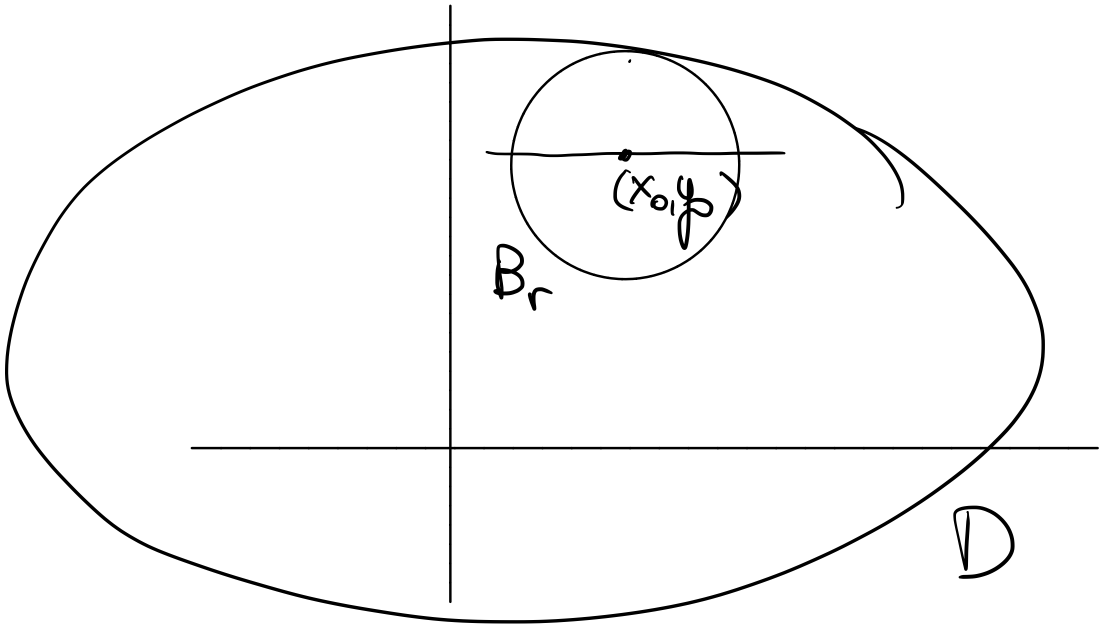
$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$(x_0, y_0) \in D$ sia un pto di massimo o minimo relativo di f <u>interno</u> a D (cioè esiste un intorno $B_r(x_0, y_0) \subset D$).

Allora, se esistono le derivate parziali di f in (x_0, y_0), queste si annullano.
In altre parole, si annulla il gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$

DIM. Sia (x_0, y_0) un pto di minimo relativo di f interno a D. $\Rightarrow \exists$ un intorno $B_r(x_0, y_0) \subset D$

t.c. $\quad f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$



Considero i pti di B_r che hanno ordinata y_0.
Sappiamo che $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \ \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Sappiamo che $f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \ \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Considero $g(x) = f(x, y_0)$

Questa assume un minimo relativo per $x = x_0$.

Fermat in 1 variabile $\Longrightarrow$ se $g'(x_0)$ esiste, allora $g'(x_0) = 0$

ma $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ esiste per ipotesi.

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

Analogamente per $\frac{\partial f}{\partial y}$. $\square$

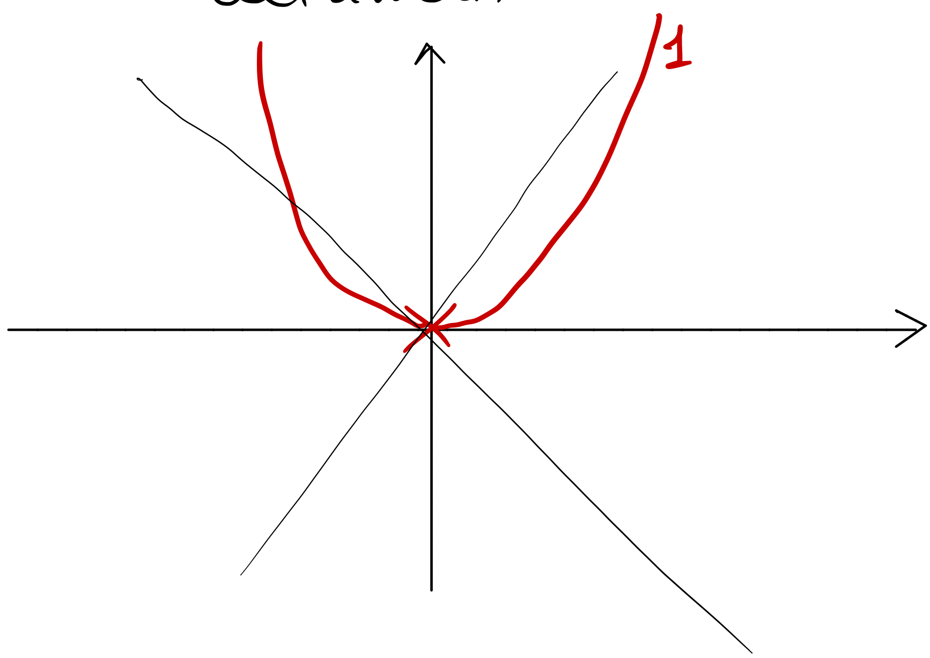
In dim 1: la derivabilità in 1 pto implica la continuità in tale punto.

In dim. 2 o superiore ciò è falso:

esistono funzioni che in un pto sono derivabili in un pto in tutte le direzioni, ma non sono continue in tale punto.

Esempio (nel foglio di esercizi)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Tuttavia:

TEOREMA Se $f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ A aperto ammette derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ in tutto A e siano continue in A. (Si scrive $f \in C^1(A)$)

Allora:

1) f è continua in A.

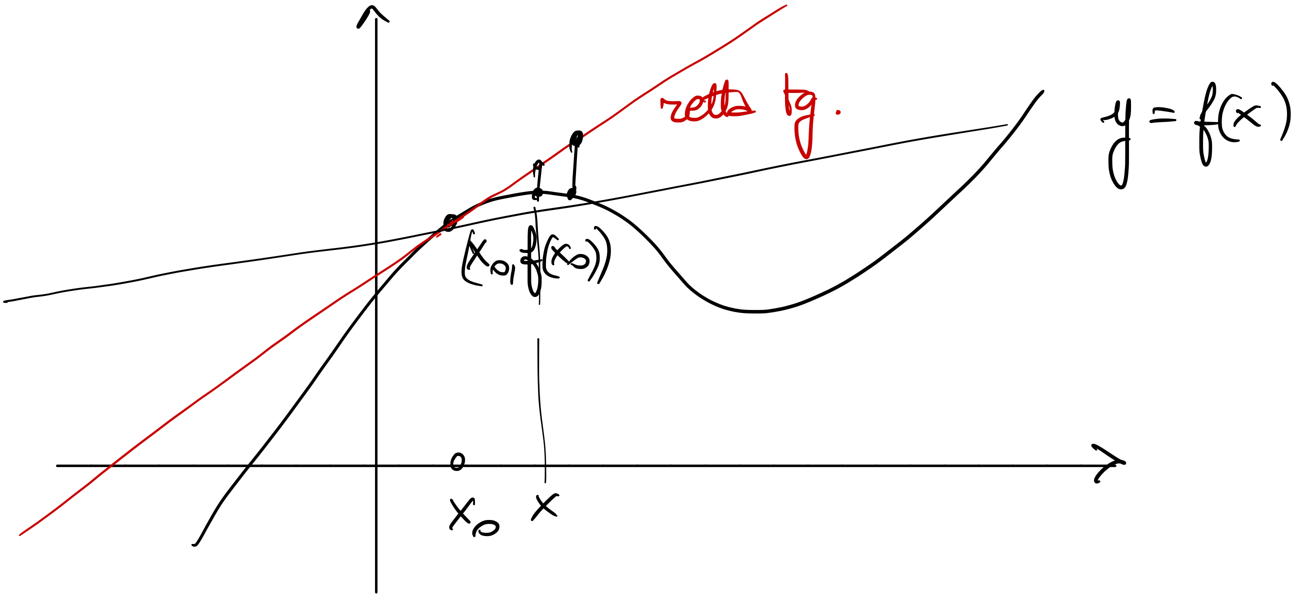
da definire tra poco

2) f ammette piano tangente al suo grafico in ogni pto.

3) In ogni pto $(x_0,y_0) \in A$ f ammette derivate direzionali in tutte le direzioni, e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \underline{v}$$

Retta tangente al grafico di $f(x)$ in dim. 1.



Eq^{ne} della retta tg.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

E' l'unica retta $y = mx+q$ t.c.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(mx+q)}{x-x_0} = 0$$

cioè è l'unica retta t.c.

$$f(x) - (mx+q) = o(x-x_0) \quad \text{per } x\to x_0$$

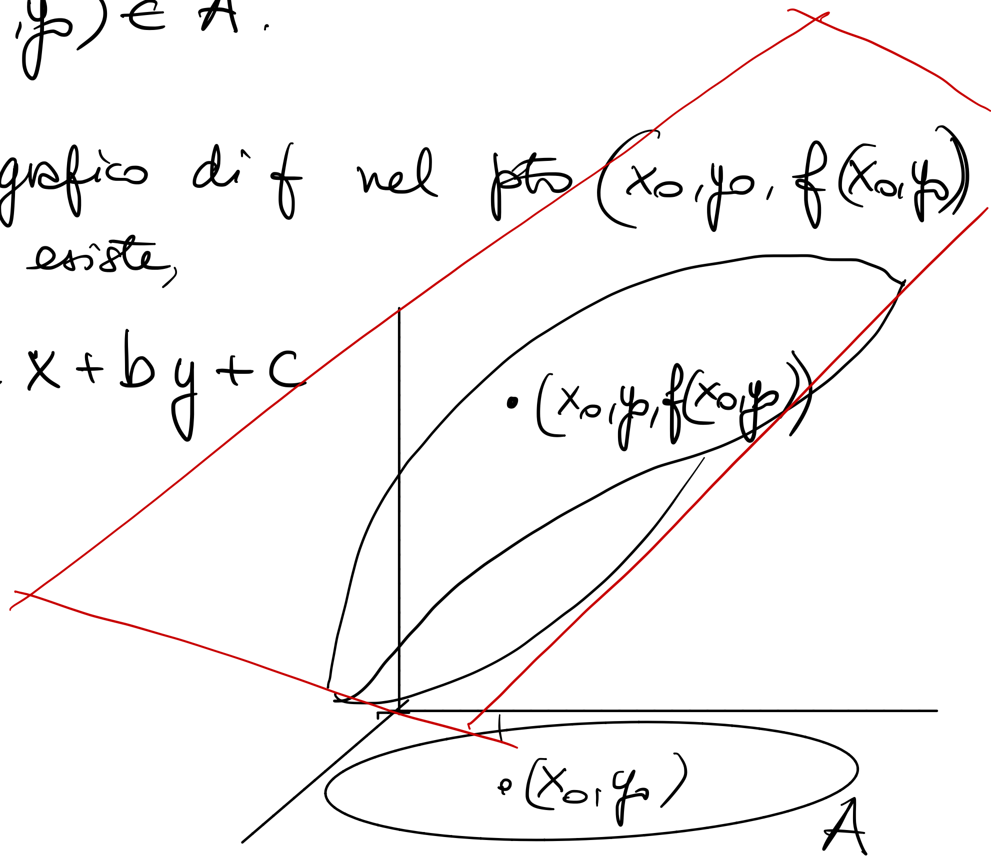
In dim 1 l'esistenza della retta tg equivale alla derivabilità in x_0.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

per $x\to x_0$

Dim 2. $f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ A aperto
$(x_0,y_0) \in A$.

Il piano tg al grafico di f nel pto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ è quel piano, se esiste, della forma $z = ax + by + c$ t.c.



$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (ax+by+c)}{\underbrace{|(x,y)-(x_0,y_0)|}_{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}} = 0$$

Si dimostra che, se f è di classe C^1 in un intorno di (x_0,y_0), allora il piano tg è dato da

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$

In dim 1 era $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Segue del teorema di prima che, se $f \in C^1(A)$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\, y-y_0)}{|(x-x_0,\, y-y_0)|} = 0$$

oppure, con identico significato,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\, y-y_0) +$$
$$+\, o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

per $(x,y)\to(x_0,y_0)$

Esercizio: trovare il piano tangente al grafico di $f(x,y) = \sqrt{x+4y}$ nel pto $(1,2)$

$(x_0, y_0) = (1,2)$

$f_x(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4y}}$; $f_y(x,y) = \dfrac{\cancel{4}\,2}{\cancel{2}\sqrt{x+4y}}$

$\forall (x,y)$ t.c. $x+4y>0$

$f \in C^1(A)$, dove $A = \{(x,y) : x+4y>0\}$

Eq^{ne} del piano tangente

$$z = \underbrace{f(1,2)}_{3} + \underbrace{f_x(1,2)}_{1/6}(x-1) + \underbrace{f_y(1,2)}_{2/3}(y-2)$$

$$z = 3 + \frac{1}{6}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \underline{v}$$

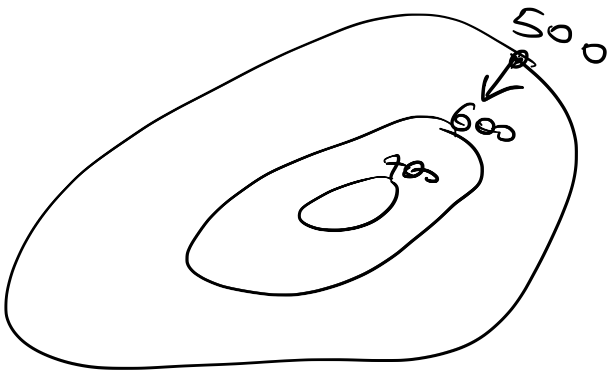
Osservazioni su questa formula:

In quale direzione $\underline{v}$ $\frac{\partial f}{\partial v}$ è massima?
minima?

Risposta: quando $\underline{v}$ è parallelo ed equiverso
contraverso
a $\nabla f(x_0,y_0)$, cioè quando v
è la direzione individuata dal gradiente.
è la direzione opposta

In quale direzione $\underline{v}$ $\frac{\partial f}{\partial v}$ è nulla?

quando $\underline{v} \perp \nabla f(x_0,y_0)$.


500
600
700