I Esonero di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2017/2018

Maggio 2018

NOME E COGNOME:	CANALE:

1. La scoperta del barione Ω^-, nel 1964, sancì il trionfo del modello a quark. Nell'esperimento che portò alla sua scoperta, l' Ω^- venne prodotto facendo interagire un fascio di mesoni K^- con una camera a bolle riempita di idrogeno, tramite la reazione:

$$K^- + p \quad \rightarrow \quad \Omega^- + K^+ + K^0$$

- Calcolare l'energia di soglia della reazione, nel caso in cui il protone sia a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio.
- Nella configurazione di soglia, calcolare la velocità del centro di massa β_{cm}.
- Sempre nella configurazione di soglia, il barione Ω^- prodotto decade in $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$. Calcolare l'energia massima del pione nel sistema di riferimento solidale con il laboratorio.

$$[m(\Omega^-) = 1672\,\text{MeV},\ m(p) = 938\,\text{MeV},\ m(K^-) = m(K^+) = 494\,\text{MeV},$$
$$m(K^0) = 498\,\text{MeV},\ m(\pi^-) = 140\,\text{MeV},\ m(\Xi) = 1190\,\text{MeV}]$$

Soluzione:

- L'energia cinetica di soglia si trova dalla formula:

$$K_{\text{soglia}} = \frac{(m(\Omega^-) + m(K^+) + m(K^0))^2 - (m(K^-) + m(p))^2}{2m(p)} = 2.69\,\text{GeV}$$

il che corrisponde a un'energia:

$$E(K^-) = K_{\text{soglia}} + m(K^-) = 3.18 \text{ GeV}$$

e un impulso:

$$p(K^-) = \sqrt{E(K^-)^2 - m(K^-)^2} = 3.145 \text{ GeV}$$

- Per trovare la velocità del centro di massa:

$$\beta_{cm} = \frac{|\vec{p}_{tot}|}{E_{tot}} = \frac{p(K^-)}{E(K^-) + m(p)} = 0.76$$

e quindi anche:

$$\gamma_{cm} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1.55$$

- Nella configurazione di soglia, il barione Ω^- è prodotto a riposo nel centro di massa. Mettiamoci dunque nel sistema del centro di massa e calcoliamo l'energia del pione di decadimento. Nel decadimento in due corpi l'energia del pione è univocamente determinata dalle masse delle particelle in gioco:

$$E_\pi^* = \frac{m(\Omega^-)^2 + m(\pi^-)^2 - m(\Xi^0)^2}{2m(\Omega^-)} = 418\,\mathrm{MeV}$$

e quindi un impulso:

$$p_\pi^* = \sqrt{(E_\pi^*)^2 - m_\pi^2} = 394\,\mathrm{MeV}$$

Per ottenere l'energia massima nel sistema di riferimento del laboratorio, occorre fare un boost di Lorentz, con i parametri β_{cm} e γ_{cm} del centro di massa:

$$E_\pi^{lab} = \gamma_{cm}(E_\pi^* + \beta_{cm} p_\pi^* \cos\theta^*)$$

dove θ^* è l'angolo fra la direzione di volo del barione Ω^- nel laboratorio, e quella del pione nel sistema di riferimento nel quale l'Ω^- è a riposo. L'espressione è massima per $\theta^* = 0$, ovvero si ottiene:

$$E_\pi^{lab,max} = \gamma_{cm}(E_\pi^{*,max} + \beta_{cm} p_\pi^{*,max}) = 1.11\,\mathrm{GeV}$$

2. Un fascio di muoni può essere prodotto a partire da un fascio di protoni nella seguente maniera. Prima si fa interagire il fascio di protoni con un bersaglio di tungsteno ($A = 184$, $Z = 74$), producendo pioni tramite la reazione:

$$p + p \quad \rightarrow \quad \pi^+ + n + p$$

Con uno spettrometro magnetico vengono selezionati i pioni carichi, e poi si lasciano viaggiare i pioni in un tunnel abbastanza lungo in maniera tale da dargli abbastanza tempo per decadere, producendo muoni tramite il decadimento:

$$\pi^+ \quad \rightarrow \quad \mu^+ + \nu_\mu$$

- Sapendo che il fascio di protoni ha una corrente $I_p = 0.05\,\mathrm{mA}$ e una sezione $S = 10\,\mathrm{cm}^2$, che il bersaglio ha una densità $\rho = 0.0193\,\mathrm{kg/cm}^3$ e uno spessore $d = 2\,\mathrm{cm}$, e che la sezione d'urto di produzione di pioni è pari a $\sigma(pp \rightarrow \pi^+ np) = 1.5$ mb, calcolare il numero di pioni prodotti per unità di tempo.
- Se i pioni vengono prodotti con una velocità media pari a $0.98\,c$ nella direzione dell'asse del tunnel, calcolare quanto deve essere lungo il tunnel di decadimento per pioni, per produrre un fascio di muoni di corrente pari a $I_\mu = 0.5\,\mu\mathrm{A}$ (la vita media del pione è pari a $\tau_\pi = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s).

(Si considerino i muoni stabili ai fini di questo esercizio.)

Soluzione: Il numero di pioni prodotti per unità di tempo è dato dalla formula:

$$\dot{N}_\pi = \sigma\,\dot{\Phi}_p N_b$$

dove $\dot{\Phi}_p$ è il flusso di protoni del fascio, e N_b è il numero di centri diffusori (protoni) nel bersaglio di tungsteno. Il flusso di protoni può essere ottenuto dai dati del problema:

$$\dot{\Phi}_p = \frac{I_p}{eS} = \frac{0.05 \cdot 10^{-3}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} = 3.12 \cdot 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}\mathrm{cm}^{-2}$$

(dove con e è stata indicata la carica elementare). Il numero di protoni nel bersaglio si ottiene da:

$$N_b = Z \cdot \frac{N_A}{A} M = Z \cdot \frac{N_A}{A} \rho V = Z \cdot \frac{N_A}{A} \rho \cdot S \cdot d =$$

$$= 74 \cdot \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{184} \cdot 0.0193 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 2 = 9.35 \cdot 10^{25}$$

dove N_A è il numero di Avogadro, Z e A sono rispettivamente il numero atomico e il peso atomico del tungsteno, e la densità è stata convertita in grammi. E quindi:

$$\dot{N}_\pi = \sigma\, \dot{\Phi}_p N_b = 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-24} \cdot 3.12 \cdot 10^{13} \cdot 9.35 \cdot 10^{25} \text{ s}^{-1} = 4.38 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

(Si nota che la sezione S del fascio non era necessario per ottenere questo risultato). Il che corrisponde a una corrente di pioni pari a:

$$I_\pi = \dot{N}_\pi e = 4.38 \cdot 10^{12} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{A} = 0.70\ \mu\text{A}$$

Dal momento in cui sono prodotti, i pioni cominceranno a decadere secondo una legge di probabilità esponenziale:

$$N_\pi(t) = N_\pi^0\, e^{-t/\tau_\pi}$$

Ogni volta che un pione decade, viene 'rimpiazzato' da un muone. Quindi, per ottenere la voluta corrente di muoni $I_\mu = 1\,\mu$A, devono essere ancora in vita, al massimo, un numero di pioni corrispondenti a una corrente $I_\pi - I_\mu = 0.20\,\mu$A; ovvero il 71.4% dei pioni dovrà essere decaduto. Questo succede dopo aver aspettato un tempo t^* che soddisfa:

$$N_\pi(t = t^*) = N_\pi^0\, e^{-t^*/\tau_\pi} \equiv (1 - 0.714) \cdot N_\pi^0$$

E risolvendo per trovare t^* si ottiene:

$$t^* = -\tau_\pi \ln 0.286 = 2.6 \cdot 10^{-8} \cdot 1.25 = 3.25 \cdot 10^{-8} s$$

Il tempo calcolato, però, è un tempo proprio, nel sistema di riferimento del pione. A cause del fenomeno della dilatazione dei tempi, visto che in media i pioni hanno $\beta_\pi = 0.98$ (e quindi $\gamma_\pi = 1/\sqrt{1-\beta_\pi^2} \approx 5$), questo si traduce, nel sistema di riferimento del laboratorio, in un tempo pari a $\gamma_\pi t^*$. E visto che i pioni viaggioni a una velocità media di $\beta_\pi c$, la lunghezza minima del tunnel di decadimento deve essere:

$$d = \beta_\pi c\, \gamma_\pi t^* = 0.98 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 3.25 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 47.8 \text{ m}$$