I Bonus di Fisica Nucleare e Subnucleare 1 - AA 2017/2018

Maggio 2018

1. Un fascio di mesoni K^+ viene inviato su un bersaglio di neutroni originando la reazione

$$K^+ + n \to \pi^+ + \Lambda$$

Si determini:

a. La minima energia $E_{K^+}^{\min}$ nel laboratorio per il K^+ incidente affinchè la reazione avvenga

b. Se Λ è prodotto a riposo nel laboratorio, l'energia del K^+ incidente

c. La distanza media percorsa dai π^+ del punto (b) nel laboratorio prima di decadere

d. Il pione del punto (b) decade secondo $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Siano θ e θ^* gli angoli rispetto alla linea di volo del pione a cui il neutrino viene emesso rispettivamente nel sistema di riferimento del laboratorio e in quello in cui il pione è in quiete. Determinare il valore di θ^* e θ per cui l'energia del neutrino nel laboratorio è pari alla metà del suo valore massimo.

$m_n = 940$ MeV/c^2; $m_\Lambda = 1116$ MeV/c^2; $m_{\pi^+} = 140$ MeV/c^2; $m_{K^+} = 494$ MeV/c^2; $\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

Soluzione:

a. La somma delle masse nello stato finale è inferiore a quella delle masse nello stato iniziale. Pertanto la reazione è sempre permessa e non esiste una soglia.

b. la massa invariante del sistema è

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_K + m_n)^2 - P_K^2}$$

nello stato iniziale e

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_\pi + m_\Lambda)^2 - P_\pi^2}$$

nello stato finale. Uguagliando le due espressioni si ha

$$(E_K + m_n)^2 - P_K^2 = (E_\pi + m_\Lambda)^2 - P_\pi^2 \tag{1}$$

Per la conservazione del tri-impulso vale $P_K = P_\pi$ pertanto la (1) diventa

$$E_K + m_n = E_\pi + m_\Lambda$$

da cui

$$E_\pi = E_K + m_n - m_\Lambda$$

Elevando ambo i membri al quadrato si ha

$$E_\pi^2 = E_K^2 + (m_n - m_\Lambda)^2 + 2E_K(m_n - m_\Lambda)$$

da cui si ricava

$$E_K = ((m_n - m_\Lambda)^2 + E_K^2 - E_\pi^2)/(2(m_\Lambda - m_n)) \tag{2}$$

Utilizzando le relazioni

$$E_\pi^2 = m_\pi^2 + P_\pi^2 = m_\pi^2 + P_K^2$$
$$E_K^2 = m_K^2 + P_K^2$$

e sostituendole nella (2) si ottiene

$$E_K = ((m_n - m_\Lambda)^2 + m_K^2 - m_\pi^2)/(2(m_\Lambda - m_n)) = 725.6\ MeV$$

c. L'impulso del π^+ del punto b) vale

$$P_{\pi^+} = P_K = \sqrt{E_K^2 - m_K^2} = 531.5\ MeV$$

La distanza media che percorre prima di decadere è

$$L = \beta\gamma c\tau_0 = \frac{P_\pi}{m_\pi} c\tau_0 = 29.6\ m$$

d. Dall'impulso del π determinato al punto c) si determinano $E_\pi = \sqrt{(P_\pi)^2 + (m_\pi)^2}) = 549.6$ MeV, $\beta_\pi = \frac{P_\pi}{E_\pi} = 0.967$ e $\gamma_\pi = 3.93$.
L'energia del neutrino nel laboratorio è data da

$$E_\nu = \gamma_\pi(E_\nu^* + \beta_\pi E_\nu^* cos\theta^*),$$

avendo indicato con E_ν^* l'energia del neutrino nel sistema di riferimento in cui il pione è in quiete e considerando il neutrino a massa nulla ($E_\nu^* = P_\nu^*$). Tale energia è massima quando $cos\theta^* = 1$ e $\theta^* = 0$, quindi

$$E_\nu^{max} = \gamma_\pi E_\nu^*(1 + \beta_\pi),$$

Per avere $E_\nu = \frac{1}{2}(E_\nu^{max})$ deve valere

$$\gamma_\pi E_\nu^*(1 + \beta_\pi cos\theta^*) = \frac{1}{2}\gamma_\pi E_\nu^*(1 + \beta_\pi)$$

e quindi

$$cos\theta^* = \frac{\beta_\pi - 1}{2\beta_\pi} = -0.017$$

L'angolo θ nel laboratorio vale

$$tan\theta = \frac{sen\theta^*}{\gamma_\pi(\beta_\pi \frac{E_\nu^*}{P_\nu^*} + cos\theta^*)} = 0.26$$

2. Un bersaglio d'oro ($Z = 79$, $A = 197$) di densità superficiale $\rho_S = 0.97$ mg/cm^2 e superficie $S_B = 1$ cm^2 viene colpito da un fascio di particelle α, la cui sezione trasversa è contenuta completamente nell'area del bersaglio. Sul bersaglio impattano $3.7 \times 10^4\ \alpha/s$. La sezione d'urto di diffusione elastica ad un certo angolo θ vale $d\sigma/d\Omega = 1$ barn/sr. Calcolare

a. la densità di atomi bersaglio per unità di superficie;

b. il numero di particelle α rivelate in un'ora da un rivelatore di superficie $S_R = 2$ cm^2 posto all'angolo θ e a distanza $D_R = 0.1$ m dal bersaglio;

c. l'intensità di corrente del fascio.

d. Il fascio di particelle viene sostituito da una sorgente radioattiva che emette lo stesso numero di particelle α al secondo con distribuzione isotropa su tutto l'angolo solido. La sorgente è posta sulla stessa linea del fascio a distanza $D_B = 20$ cm dal bersaglio. Assumendo la stessa sezione d'urto di diffusione elastica, quanto tempo è necessario per rivelare con lo stesso rivelatore lo stesso numero di particelle del punto (b)?

Soluzione:

a. la densità di bersagli per unità di superficie è:

$$n_b^S = \rho_S \cdot N_A/A = (0.97\ mg/cm^2 \cdot 6.022 \times 10^{23}/mole)/(197\ g/mole) = 2.97 \times 10^{18}/cm^2$$

b. L'angolo solido sotteso dal rivelatore è $\Delta\Omega = S_R/D_R^2 = 0.02\ sr$. La sezione d'urto differenziale integrata su tale angolo solido è $\sigma^S = \int_S d\sigma/\ d\Omega \times d\Omega = d\sigma/\ d\Omega \times S_R/D_R^2 = 2 \times 10^{-26} cm^2$. Il numero di particelle α rivelate per unità di tempo è

$$dN_r/dt = dN_\alpha/dt \times \sigma^S \times n_b^S = 3.7 \times 10^4/s \cdot 2 \times 10^{-26} cm^2 \cdot 2.97 \times 10^{18}/cm^2 = 0.0022/s$$

e quindi in 1 ora si rivelano 7.9 particelle α

c. le particelle α hanno una carica pari a $2e$, essendo e la carica elementare. L'intensità di corrente è data pertando da

$$I = dN_\alpha/dt \times 2e = 3.7 \times 10^4/s \times 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C = 118 \cdot 10^{-4}\ pA$$

d. Dal momento che l'emissione della sorgente è isotropa, se il bersaglio coprisse l'intero angolo solido il numero di particelle α rivelate per unità di tempo sarebbe lo stesso misurato al punto (b). Il bersaglio sottende invece un angolo solido pari a $\Delta\Omega_B = S_B/D_B^2 = 0.0025\ sr$ rispetto alla sorgente, pertanto il numero di α rivelate in un'ora è $7.9 \times 0.0025/\ 4\pi = 0.0016$. Per rivelare lo stesso numero di particelle del punto precedente occorrono pertanto 5024 ore.