Noi tutti facciamo un uso continuo (sia pure inconsapevole) di **proiezioni lineari** di porzioni dello spazio su porzioni di opportuni piani, o di proiezioni di porzioni di un piano su porzioni di un altro piano. Basti pensare alle innumerevoli rappresentazioni bidimensionali della realtà tri- o bi-dimensionale: disegni, ombre, fotocopie, fotografie, immagini sulla retina del nostro occhio o sugli schermi televisivi, ...

Tutte queste proiezioni possono essere schematizzate, almeno in prima approssimazione (ossia trascurando eventuali deformazioni indesiderate, dovute per esempio all'uso di lenti) sotto forma di **proiezioni centrali** (dette anche **proiezioni coniche** o brevemente **proiettività**), oppure di **proiezioni parallele** (dette anche **affinità**.

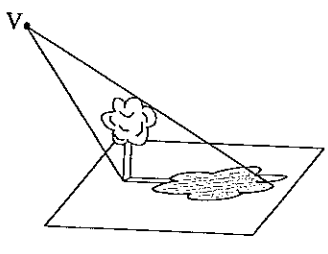
19.I. Proiezioni dallo spazio ad un piano

Per individuare una **proiezione centrale** occorre assegnare, nello spazio tridimensionale S, un piano π ed un punto V (detto *centro della proiezione*) non appartenente al piano π. La proiezione centrale di centro V e piano di proiezione π è per definizione la trasformazione t che ad ogni punto P dello spazio associa il punto P' nel quale la retta VP (detta retta proiettante) interseca il piano π, vedi per esempio [MYERS] o [FOLEY et al.].

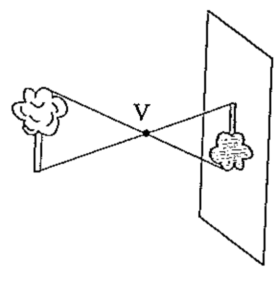
Osservazioni.

1. In una proiezione centrale esistono punti "eccezionali" di S che non si proiettano su alcun punto del piano di proiezione π. Si tratta dei punti di S che appartengono al piano π_V passante per V e parallelo al piano di proiezione π. Per ovviare a questo inconveniente i matematici "ampliano" il piano π con l'aggiunta dei suoi **punti impropri** ossia passano dal piano affine π al corrispondente *piano proiettivo* $\overline{\pi}$ (vedi per esempio [ROSATI], Parte terza, pp. 324-338 oppure [COURANT-ROBBINS], Cap. 4, §1-6, pp.223-257). In termini "intuitivi" ogni punto improprio corrisponde alla direzione di una retta del piano euclideo (e di tutte le rette parallele ad essa). Non ritengo indispensabile approfondire l'argomento in questa sede. Mi limito a far notare che anche nel disegno tecnico si considerano i *punti impropri*, chiamandoli "**punti di fuga**".

2. Il piano π_V divide lo spazio S in due semispazi, uno solo dei quali contiene il piano di proiezione. Per rendere la schematizzazione matematica dei fenomeni ottici più aderente alla situazione fisica conviene spesso restringere il dominio della proiezione all'uno o all'altro di questi sottospazi. Per esempio:



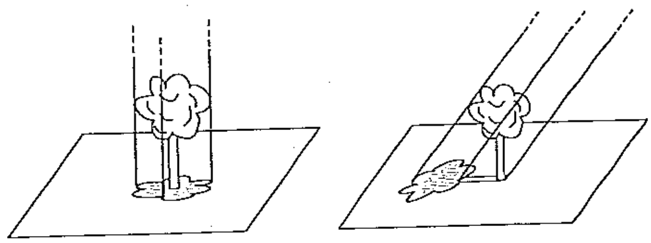
(a)



(b)

Caso A (Figura e immagine appartenenti allo stesso semispazio). Se si immagina una sorgente luminosa "puntiforme" situata in V, ha senso considerare le ombre proiettate sul piano π da una figura F solo se F appartiene al semispazio che contiene π.

Caso B (Figura e immagine appartenenti a due semispazi opposti). Il funzionamento delle macchine fotografiche può essere schematizzato identificando il centro di proiezione col centro ottico dell'obiettivo e il piano di proiezione con quello della pellicola. In questo caso l'oggetto che si intende fotografare deve stare "davanti", mentre la pellicola sta "dietro" all'obiettivo. La stessa situazione si presenta nella struttura del nostro occhio: in questo caso il centro di proiezione può essere identificato (grossolanamente) col centro del bulbo oculare; noi vediamo ciò che ci sta "davanti" mentre la corrispondente immagine si forma sulla retina che sta "dietro" al centro di proiezione [102].



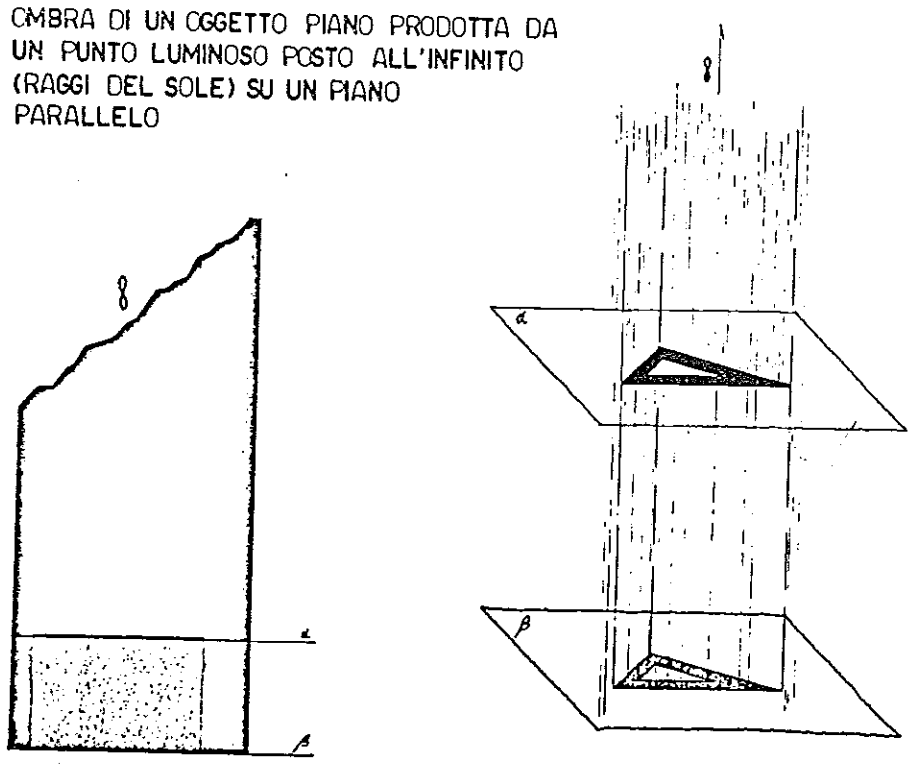
(c) (d)

La **proiezione parallela** differisce dalla proiezione centrale per il fatto che le rette proiettanti, anziché passare tutte per uno stesso punto V, hanno tutte la stessa direzione, non parallela al piano di proiezione π. La proiezione parallela può essere vista anche come un caso limite di proiezione centrale, considerando come "centro di proiezione" un punto improprio dello spazio (quello comune a tutte le rette proiettanti). Nelle proiezioni parallele ogni punto dello spazio S, senza alcuna eccezione, si proietta su un punto del piano π.

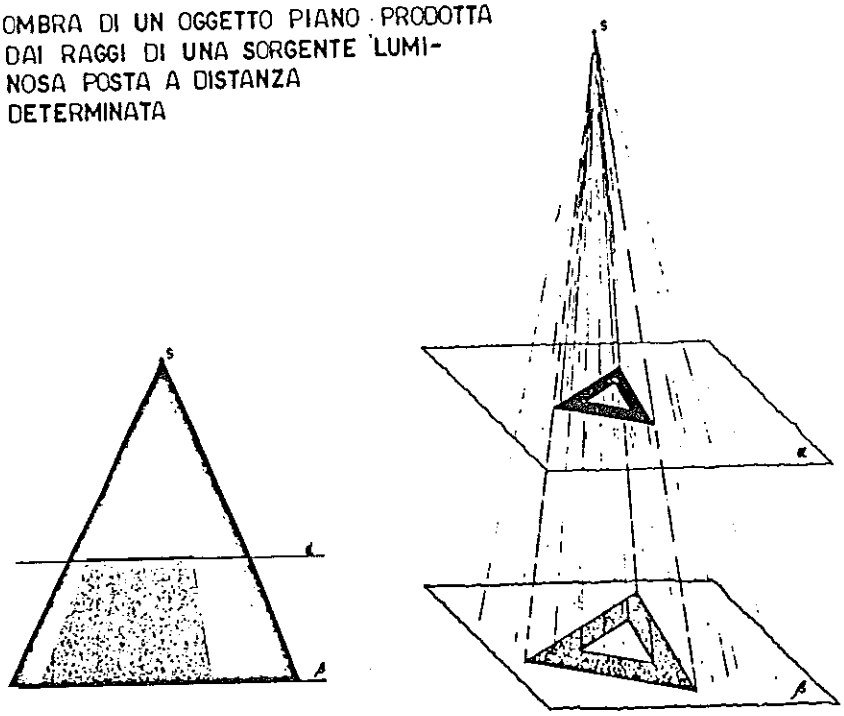
[102] La descrizione del fenomeno della visione può essere semplificata ricorrendo ai fini didattici ad un lontano precursore delle macchine fotografiche, il **prospettografo**. Il suo funzionamento rientra nel caso A, in quanto l'immagine di una figura F dello spazio viene riprodotta manualmente su un supporto trasparente, situato tra la figura e l'occhio del disegnatore (assunto come centro di proiezione). Per chi volesse saperne di più rinvio per esempio a [BARTOLINI–MASCHIETTO].

Si noti che in una proiezione centrale esiste sempre una ed una sola retta proiettante perpendicolare al piano di proiezione, mentre tutte le altre rette proiettanti sono oblique. Nelle proiezioni parallele si presenta invece un'alternativa tra due casi: o tutte le rette proiettanti sono perpendicolari al piano di proiezione (nel qual caso si usa specificare che si tratta di una proiezione **ortogonale**, fig.(c)) o nessuna retta proiettante è perpendicolare al piano di proiezione (nel qual caso si usa specificare che si tratta di una proiezione **obliqua**, fig.(d)).

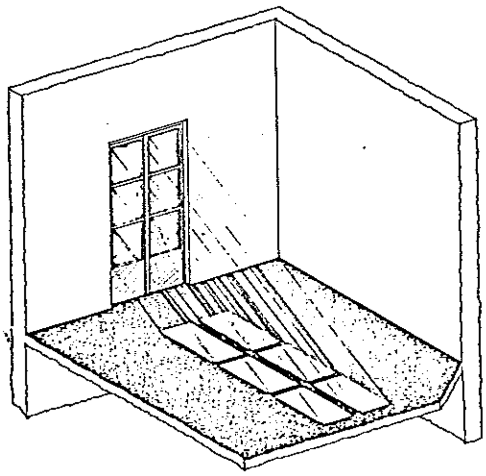
Per rendere operative le nozioni di proiezione centrale e di proiezione parallela, per esempio in vista del loro utilizzo in un contesto di grafica computazionale, conviene ricorrere alla geometria analitica, utilizzando coordinate cartesiane opportunamente "adattate" (senza ledere peraltro la generalità delle proiezioni). Ecco, una succinta descrizione di come procedere nei due casi.

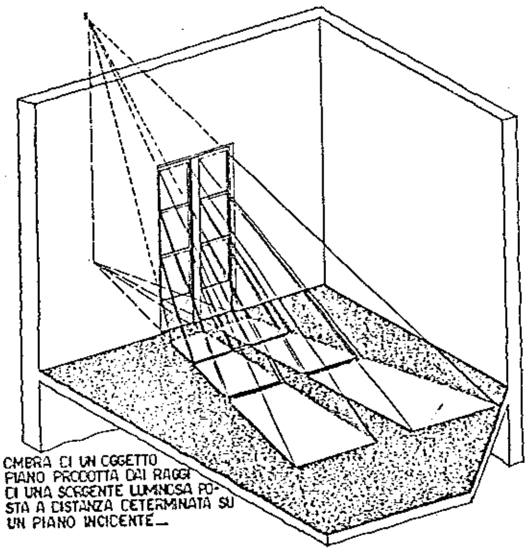


OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DAI RAGGI DI UNA SORGENTE LUMINOSA POSTA A DISTANZA DETERMINATA



OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DA UN PUNTO LUMINOSO POSTO ALL'INFINITO (RAGGI SOLARI) SU UN PIANO INCIDENTE





OMBRA DI UN OGGETTO PIANO PRODOTTA DAI RAGGI DI UNA SORGENTE LUMINOSA POSTA A DISTANZA DETERMINATA SU UN PIANO INCIDENTE_

18. Le trasformazioni geometriche. Cosa sono? A che servono? E qual è la loro collocazione nell'ambito dell'insegnamento pre-universitario della geometria?

La nozione di *trasformazione geometrica* era estranea alla geometria classica e si è andata delineando solo gradualmente tra il Seicento e l'Ottocento, di pari passo con la nozione di *funzione*.

L'introduzione delle *trasformazioni geometriche* nei programmi e nei testi scolastici di geometria è ancor più recente (seconda metà del Novecento) e a mio avviso il modo nel quale l'argomento viene attualmente affrontato nelle nostre scuole non è del tutto appropriato (tornerò su questo punto nel successivo §19). Viene quindi fatto di chiedersi perché si è avvertita proprio in questi ultimi anni l'esigenza di affiancare (o di sostituire?) questo ulteriore argomento a quelli più tradizionali, con quali obiettivi culturali e con quali impostazioni didattiche.

18.I. Aspetti matematici

Inizio col richiamare alcune definizioni, anche se presumo che siano ben note ai miei lettori, nella forma in cui esse compaiono nella maggior parte dei testi scolastici che affrontano l'argomento [96]. Per maggiori dettagli rinvio a [COURANT–ROBBINS], cap 4, o a [DEDÒ, 1996].

Col termine **trasformazione geometrica** o, più brevemente **trasformazione**, si intende un'*applicazione biunivoca* (sinonimo di *funzione bigettiva*) f del piano (o dello spazio) in sé, che ad ogni punto A del piano (o dello spazio) associa un punto $A' = f(A)$ dello stesso piano (o spazio).

La trasformazione più semplice – tanto semplice che molti studenti ritengono cervellotica la sua inclusione fra le trasformazioni – è la **trasformazione identica**, simbolicamente denotata con Id. Essa è la trasformazione che ad ogni punto associa il punto stesso (in parole povere: non "trasforma" nulla e lascia tutto così com'era).

Date due trasformazioni geometriche f , g si può considerare la **trasformazione composta** che si ottiene applicando dapprima ad ogni punto A la trasformazione f , col che si ottiene

[96] Si tenga però presente che la terminologia che sto per introdurre non è univoca, e che nelle estensioni di cui parlerò nel successivo §19 si renderanno necessari taluni "aggiustamenti".

un punto immagine $A' = f(A)$, e applicando successivamente ad A' la trasformazione g, col che si ottiene un nuovo punto immagine $A'' = g(A') = g(f(A))$. Simbolicamente si usa denotare la trasformazione composta con $g \circ f$.

Osservazione. La composizione di due trasformazioni non gode della proprietà commutativa, ossia in generale la trasformazione $g \circ f$ è diversa da $f \circ g$. Pertanto è importante rispettare l'ordine di scrittura in base al quale $g \circ f$ sta ad indicare che si opera dapprima con f e successivamente con g.

Per ogni trasformazione geometrica f esiste ed è unica la trasformazione inversa f^{-1}, caratterizzata dalla proprietà che

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id.$$

L'insieme di tutte le trasformazioni geometriche di un dato piano (o spazio) con l'operazione di composizione, possiede una struttura di **gruppo** (non commutativo) [97].

La convenzione, che poteva sembrare cervellotica, di includere l'identità fra le trasformazioni geometriche, ha precisamente lo scopo di fare sì che l'insieme di tutte le trasformazioni geometriche di un dato piano (o spazio) possieda una struttura gruppale.

In vista dei successivi sviluppi della teoria sono particolarmente importanti quei sottoinsiemi del gruppo delle trasformazioni (del piano o dello spazio) che possiedono a loro volta una struttura gruppale.

Ecco un primo esempio (non si spaventi chi non si è mai imbattuto nel ramo della matematica chiamato **topologia**): alludo al gruppo delle trasformazioni che rispettano la struttura topologica (del piano o dello spazio). Tale gruppo è formato dall'insieme di tutti gli *omeomorfismi*, vale a dire da tutte le funzioni che sono bigettive e continue insieme alle loro inverse. Ma nell'insegnamento preuniversitario uno studio di questo gruppo sarebbe fuori luogo e quindi ci si limita

[97] Ricordo che un insieme G si dice **gruppo** se su G è definita un'operazione di composizione che ad ogni coppia ordinata di elementi $a, b \in G$ associa un elemento $a \circ b \in G$, e se tale operazione soddisfa alle tre condizioni seguenti:

1. La composizione gode della proprietà associativa: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ per ogni terna di elementi $a, b, c \in G$;
2. In G esiste un elemento neutro Id, tale che $Id \circ a = a \circ Id = a$, per ogni $a \in G$;
3. Per ogni $a \in G$ esiste un elemento inverso $a^{-1} \in G$ tale che $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = Id$.

Per completezza d'informazione aggiungo che, a partire da questa definizione, si dimostra l'unicità dell'elemento neutro, nonché l'unicità dell'inverso di un qualsiasi elemento del gruppo.

(saggiamente) a considerare tre gruppi assai più ristretti: quello delle **trasformazioni lineari**, dette anche **trasformazioni affini**, o brevemente **affinità**, e due suoi sottogruppi, quello delle **isometrie** e quello delle **similitudini**. Nel paragrafo successivo completerò il quadro con qualche cenno sulle **trasformazioni proiettive**, dette brevemente **proiettività**.

Le **affinità** sono caratterizzate dalla proprietà di *mantenere l'allineamento dei punti.* Data la biunivocità delle trasformazioni geometriche, le affinità possono essere caratterizzate anche dalla proprietà di *trasformare le rette in rette.*

Le **isometrie** sono le trasformazioni f che conservano la *metrica*, vale a dire le *lunghezze dei segmenti* o, come si preferisce dire in questo contesto, le *distanze tra le coppie di punti.* In formule, f è un'isometria se, dati due punti A , B e posto $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ risulta:

$$d(A', B') = d(A, B).$$

Le **similitudini** sono le trasformazioni f che alterano le lunghezze dei segmenti (o, se si preferisce, le distanze tra le coppie di punti) secondo un *fattore numerico costante* $k > 0$. In formule, f è una similitudine se esiste una costante positiva k tale che, per ogni coppia di punti A, B, posto $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, risulta:

$$d(A,' B') = k\, d(A, B).$$

Nel seguito denoterò con $\mathcal{M}$ (iniziale di "metrica") il gruppo delle isometrie, con $\mathcal{S}$ quello delle similitudini e con $\mathcal{A}$ quello delle affinità. Poiché ogni isometria è anche una similitudine e poiché ogni similitudine è anche un'affinità, si hanno le inclusioni:

$$(*) \qquad \mathcal{M} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}.$$

Osservazioni

* Non tutti i sottoinsiemi di un gruppo possiedono a loro volta una struttura di (sotto)gruppo. Quindi in una trattazione sistematica dell'argomento si dovrebbe dimostrare che le affinità, le similitudini e le isometrie sono effettivamente sottogruppi (e non solo sottoinsiemi) del gruppo di tutte le trasformazioni geometriche.

* Per giustificare le inclusioni delle similitudini tra le affinità e delle isometrie tra le similitudini si dovrebbe anche dimostrare che le similitudini e le isometrie mantengono l'allineamento dei punti, conseguenza peraltro ovvia della disuguaglianza triangolare.

* Le affinità, e quindi a maggior ragione le similitudini e le isometrie, mantengono il parallelismo, nel senso che se r ed s sono rette parallele (e distinte) anche le rispettive immagini r' ed s' sono rette parallele (e distinte). Nella dimostrazione di questa proprietà si sfrutta la biunivocità delle trasformazioni in questione.

* Come spesso avviene in matematica, le definizioni or ora riportate non sono scaturite improvvisamente dalla mente di un singolo matematico. Sono invece il frutto di una lungo processo di generalizzazione e astrazione [98] finalizzato ad uno studio delle proprietà strutturali dei vari gruppi di trasformazioni sopra elencati. Lo studio delle trasformazioni geometriche si situa quindi al quarto (sotto certi aspetti addirittura al quinto) livello di van Hiele.

* Il fatto più innovativo della teoria delle trasformazioni geometriche è che, mentre nella geometria euclidea classica ci si limita a stabilire corrispondenze tra singole figure o tra un numero finito di elementi costitutivi di singole figure, ogni trasformazione geometrica stabilisce una corrispondenza tra tutti i punti del piano (o dello spazio) e i loro punti immagine. In proposito sussiste il seguente teorema del quale ometto la (non difficile) dimostrazione:

Teorema. *Date in un piano π due terne di punti non allineati A, B, C e A', B', C', esiste una ed una sola **affinità** f del piano, tale che:*

$$f(A) = A' \qquad f(B) = B' \qquad f(C) = C'.$$

*Tale affinità è una **similitudine** se e solo se*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC},$$

*ed è una **isometria** se e solo se*

$$A'B' = AB\ ,\ A'C' = AC\ ,\ B'C' = BC.$$

[98] Basti pensare che la nozione di "gruppo" è stata formalizzata appena nell'Ottocento, oltre duemila anni dopó Euclide.

Osservazione. Il teorema precedente si estende alle trasformazioni geometriche dello spazio, con l'unica avvertenza di considerare due *quaterne di punti non complanari.*

* Purtroppo, accanto agli aspetti positivi, ogni processo di generalizzazione e astrazione aumenta inevitabilmente il distacco tra le asettiche definizioni formali e le immagini intuitive che ne stanno alla base. Nel caso specifico è già difficile, per non dire impossibile, visualizzare graficamente una trasformazione geometrica del piano: si dovrebbe collegare con una freccia ogni punto del piano (o almeno ogni punto di un foglio da disegno considerato come una porzione limitata del piano) col suo corrispondente punto immagine, ma così facendo si verrebbe a ricoprire l'intero piano (o almeno l'intero foglio) con una selva di infinite frecce.

In quanto precede spero di avere risposto in certa misura alla prima domanda del titolo di questo paragrafo (*Cosa sono le trasformazioni geometriche?*). Tento ora di rispondere alla seconda domanda (*A che servono le trasformazioni geometriche?*) presentando due esempi di risultati a mio avviso interessanti e signficativi. Il primo riguarda le isometrie, il secondo le similitudini.

Esempio (A). Classificazione delle isometrie del piano e dello spazio.

Come osservato sopra, è difficile, per non dire impossibile, visualizzare una trasformazione geometrica in quanto tale. È invece ben possibile visualizzare l'effetto che una trasformazione geometrica ha su specifiche figure. In questo esempio prenderò in esame il caso più semplice e familiare, ossia quello delle **isometrie del piano**, visualizzando gli effetti che le varie isometrie hanno su particolari figure. Per maggiore concretezza farò riferimento ad un'esperienza fisica, proponibile già a livello di scuola media. Nulla di male se la si propone (o ripropone) nel corso degli studi superiori, anche se così facendo si regredisce al terzo livello di van Hiele.

Su un foglio di carta si disegna una figura a piacere (preferibilmente asimmetrica, per esempio una bandierina). Si ricalca la stessa figura su un foglio trasparente. Tenendo fisso il foglio di carta e facendo scorrere su di esso il foglio trasparente, si ottengono nello stesso piano due figure "uguali" che si corrispondono nell'isometria determinata dallo spostamento del secondo foglio rispetto al primo. Se lo spostamento è rettilineo, si è in presenza di una **traslazione** (individubile mediante un vettore libero). Se lo spostamento è rotatorio (intorno ad un centro O che può essere materializzato mediante una puntina da disegno o un piccolo chiodo) si è in presenza di una **rotazione** (individuabile mediante un angolo elementare orientato di vertice O).

Resta però aperto un interrogativo: esistono altri tipi di isometrie, oltre alle traslazioni e alle rotazioni?

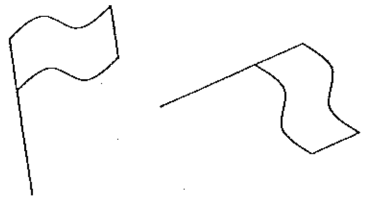
È abbastanza facile rendersi conto che tra le isometrie vi sono anche le **simmetrie assiali** (individuate dal loro asse di simmetria). Una loro realizzazione sperimentale consiste nel disegnare sul foglio di carta la retta r da assumere come asse di simmetria e nell'evidenziare due punti A, B dell'asse. Si ricalca sul foglio trasparente la retta nonché i due punti evidenziati su di essa, e si capovolge il foglio trasparente sovrapponendolo infine al foglio di carta in modo tale che la retta r e i suoi due punti A e B (evidenziati tanto sul foglio di carta quanto sul foglio trasparente) vengano a coincidere. Di conseguenza anche ogni altro punto della retta viene a coincidere col proprio trasformato. Si usa esprimere questo fatto dicendo che la retta r scelta come asse, oltre ad essere globalmente "fissa", è anche "luogo di punti fissi" o, se si preferisce, che r coincide con la propria trasformata "punto per punto". Ad eccezione dei punti dell'asse (che sono fissi) questa trasformazione fa corrispondere ad un generico punto P il punto P' caratterizzato da due proprietà:

- l'asse interseca il segmento PP' nel suo punto medio;
- La retta individuata dal segmento PP' è perpendicolare all'asse.

Si noti che le simmetrie assiali sono fisicamente realizzabili solo nello spazio tridimensionale in quanto, per capovolgere il foglio trasparente, lo si deve staccare dal piano rappresentato dal foglio di carta al quale è sovrapposto [99].

[99] Una variante del procedimento sperimentale così descritto consiste nel piegamento di un foglio di carta e nella riproduzione di una stessa figura su entrambe le parti combacianti del foglio piegato. La linea di piegatura funge da asse di simmetria. Questa variante evita il ricorso al foglio ausiliario trasparente, ma realizza concretamente la simmetria solo tra i due semipiani rappresentati dalle rispettive parti del foglio. Ciò corrisponde peraltro al significato col quale Choquet usa il termine "piegatura" nella sua assiomatica, cfr. l'allegato B del §8. Può essere infine interessante notare che la linea di piegatura fornisce un metodo pratico ed efficace per realizzare concretamente un "segmento di retta", senza dover ricorrere ad un righello.

E c'è dell'altro. Quando mi capita di chiedere a studenti (anche universitari) se conoscono qualche ulteriore tipo di isometrie, dopo un'iniziale esitazione ottengo, se va bene, tre risposte: le **simmetrie centrali**, le **roto-traslazioni** e l'**isometria identica**. In realtà queste isometrie non aggiungono nulla di nuovo. Infatti le simmetrie centrali non sono altro che le rotazioni di "mezzo giro" intorno al centro di simmetria. Anche le roto-traslazioni rientrano tra le rotazioni: lascio al lettore di descrivere la trasformazione che, con riferimento alla figura, porta la bandierina A nella bandierina B, vista dapprima come una traslazione composta con una rotazione, e vista successivamente come una sola rotazione (della quale si chiede di determinare il centro e l'ampiezza dell'angolo di rotazione).



L'identità poi, può essere vista (sia pure in modo un po' artificioso) come un caso particolare di traslazione (di vettore nullo) o di rotazione (di centro arbitrario e angolo nullo).

Invece quasi nessuno ricorda, né riesce a "scoprire" autonomamente l'esistenza delle **glissosimmetrie** (dette anche **simmetrie con scorrimento**). Esse sono le trasformazioni ottenute componendo una simmetria assiale con una traslazione parallela all'asse di simmetria.

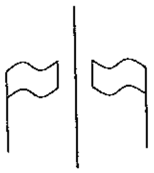
A completamento di questa esplorazione dei vari tipi di isometrie del piano si dimostra che:

* Le *traslazioni* possono essere ottenute componendo due simmetrie assiali con assi paralleli;

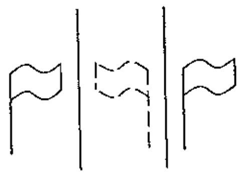
* Le *rotazioni* possono essere ottenute componendo due simmetrie assiali con assi incidenti;

* Le *glissosimmetrie*, essendo composizioni di una simmetria assiale con una traslazione parallela all'asse della simmetria assiale, possono essere ottenute anche componendo tre simmetrie assiali, visto che le traslazioni possono a loro volta essere ottenute per composizione di due simmetrie assiali.

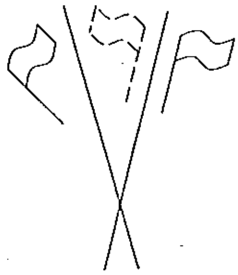
* Non esistono isometrie del piano all'infuori delle simmetrie assiali, delle traslazioni, delle rotazioni e delle glissosimmetrie.



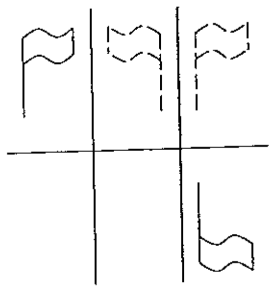
simmetria assiale



traslazione



rotazione



glissosimmetria

Tutto ciò può essere compendiato in un teorema strutturale che evidenzia la possibilità di generare ogni isometria del piano mediante una simmetria assiale o la composizione di due o tre simmetrie assiali:

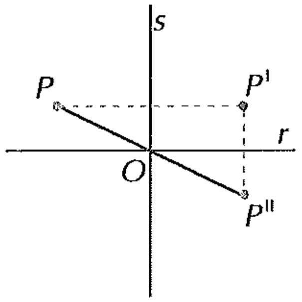
Teorema 1. *Tutte le isometrie del piano ricadono in uno dei seguenti cinque tipi:*

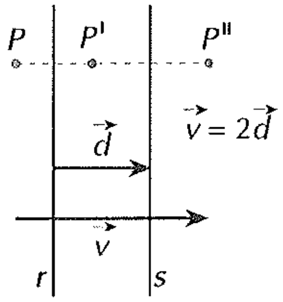
- ***trasformazione identica,***
- ***simmetrie assiali,***
- ***traslazioni**, generate dalla composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli,*
- ***rotazioni**, generate dalla composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti,*
- ***glissosimmetrie**, generate dalla composizione di tre simmetrie assiali.*

Il prodotto di trasformazioni

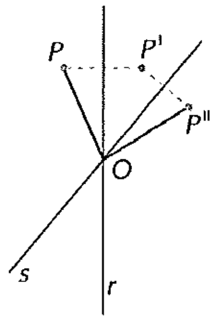
Applicando in successione due isometrie si ottiene ancora un'isometria, in particolare:

- Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari equivale a una simmetria centrale avente centro nel punto di intersezione con gli assi.





- Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli equivale a una traslazione di vettore doppio della distanza fra i due assi, direzione e verso dal primo al secondo asse.



- Il prodotto di due simmetrie assiali con gli assi incidenti è una rotazione di ampiezza uguale al doppio dell'angolo formato dai due assi, centro nel punto di intersezione degli assi e verso dal primo al secondo asse.

Si noti che il sottoinsieme del gruppo delle isometrie formato dalle sole simmetrie non ha una struttura di gruppo (infatti la composizione di due simmetrie non è una simmetria).

Possiedono invece una struttura di gruppo (sottogruppo del gruppo delle isometrie) sia l'insieme delle traslazioni, sia quello delle rotazioni di dato centro (a condizione di includervi la trasformazione identica).

Le traslazioni e le rotazioni vengono dette **isometrie pari** in quanto ottenute per composizione di un numero pari di simmetrie assiali. Le simmetrie assiali e le glissosimmetrie vengono dette invece **isometrie dispari** in quanto ottenute per composizione di un numero dispari di simmetrie assiali.

Questa contrapposizione tra isometrie pari e dispari si ricollega al problema dell'orientamento delle figure del piano. Per esempio, se il perimetro di un triangolo viene percorso "in verso orario", anche il corrispondente perimetro dell'immagine del triangolo in una isometria pari viene percorso "in verso orario", mentre se l'isometria è dispari, i due perimetri vengono percorsi in versi opposti. Più in generale, due figure geometriche che si corrispondono in un'isometria sono uguali (nel senso elementare della parola), oppure specularmente uguali, a seconda che l'isometria sia pari o dispari. In base a questa osservazione le isometrie "pari "e quelle "dispari" vengono dette anche rispettivamente isometrie "dirette" e "inverse".

Per completezza di informazione cito l'analogo del teorema 1 nel caso tridimensionale:

Teorema 2. *Tutte le isometrie dello spazio ricadono in uno dei seguenti sette tipi:*

- ***trasformazione identica,***
- ***simmetrie planari,***
- ***traslazioni** (di vettore v) generate dalla composizione di due simmetrie planari con piani di riflessione paralleli,*
- ***rotazioni** (intorno ad una retta fissa r) generate dalla composizione di due simmetrie planari con piani di riflessione incidenti in r,*
- *isometrie che si ottengono per **composizione di una simmetria planare con una traslazione di vettore** v **paral-***

lelo al ***piano di simmetria****, e quindi generabili per composizione di tre simmetrie planari,*

- *isometrie che si ottengono per* ***composizione di una simmetria planare con una rotazione di asse*** r ***perpendicolare al piano di simmetria****, e quindi generabili per composizione di tre simmetrie planari,*
- *isometrie che si ottengono per* ***composizione di una traslazione (di vettore*** v***) con una rotazione (di asse*** r ***parllelo a*** v***)****, e quindi generabili per composizione di quattro simmetrie planari.*

Le traslazioni, le rotazioni e le composizioni di una traslazione con una rotazione vengono dette *isometrie pari* (o *dirette*) dello spazio, in quanto ottenute per composizione di un numero pari di simmetrie planari. Le simmetrie planari, le composizioni di una simmetria planare con una traslazione e le composizioni di una simmetria planare con una rotazione vengono dette invece *isometrie dispari* (o *inverse*) dello spazio, in quanto ottenute per composizione di un numero dispari di simmetrie planari. Per maggiori dettagli rinvio per esempio a [DEDÒ, 1996], pp. 16-18.

Nel caso tridimensionale la contrapposizione tra isometrie pari e dispari acquista un'importanza tutta particolare, in quanto solo le isometrie pari sono materialmente realizzabili sotto forma di un opportuno "movimento rigido" di un oggetto dello spazio. Infatti, come già segnalato nel par..., due solidi specularmente uguali non sono in generale sovrapponibili. L'esempio classico è quello di un paio di scarpe o di guanti, oppure quello dei cristalli di zucchero, che possono assumere due forme speculari con proprietà chimico-fisiche diverse (glucosio e fruttosio).

Esempio (B). Struttura del gruppo delle similitudini del piano e dello spazio.

Le più semplici similitudini sono le **isometrie** (similitudini con fattore $k = 1$) e le **omotetie** che qualche autore preferisce chiamare **dilatazioni**. Ricordo che le *omotetie* sono particolari similitudini, caratterizzate dalle seguenti due proprietà:

(i) Possiedono un punto unito O, ossia tale che $O = O'$;

(ii) Per ogni punto A, i tre punti O, A, A' sono allineati e il rapporto tra $d(O, A')$ e $d(O, A)$ è costante (fattore dell'omotetia).

Il gruppo delle similitudini è strettamente legato al gruppo delle isometrie. Si dimostra infatti che ogni similitudine può essere ottenuta per composizione di una fissata omotetia (di fattore $k > 0$) e di un'opportuna *isometria*. Di conseguenza anche le nozioni di isometrie "pari" o "dispari" si estendono automaticamente al caso delle similitudini "pari" o "dispari".

La possibilità di considerare le similitudini come composizioni di un'omotetia e di un'opportuna isometria facilita anche la dimostrazione di quello che io considero il teorema fondamentale delle similitudini, già anticipato nell'osservazione 2 del §15.

Infatti basta dimostrare il teorema per le omotetie, visto che per effetto delle isometrie restano invariate non solo le ampiezze angolari ma anche le lunghezze delle spezzate, le aree dei poligoni, i volumi dei poliedri e visto che, se si escludono casi "patologici", ogni linea può essere approssimata mediante spezzate, ogni superficie mediante poligoni, ogni volume mediante poliedri.

Naturalmente, accanto ad una trattazione sintetica delle trasformazioni lineari, è possibile una trattazione analitica, basata sull'utilizzo di un sistema di coordinate cartesiane. Per brevità mi limito a citare i fatti salienti, senza darne le dimostrazioni:

* La più generale trasformazione affine del piano (di coordinate cartesiane x, y) ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

con la condizione che la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sia non degenere, ossia con $Det\ \mathrm{M} = ad - bc \neq 0$.

Precisamente, questa trasformazione associa ai punti

$$O = (0,0), \qquad U_1 = (1,0), \qquad U_2 = (0,1)$$

i punti

$$O' = (p,q), \qquad U_1' = (a+p, c+q), \qquad U_2' = (b+p, d+q).$$

* La trasformazione è un'isometria se e solo se la matrice M è ortogonale, vale a dire se il prodotto della matrice per la sua trasposta è la matrice identica, ~~il che equivale a dire che.~~

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

* La trasformazione è una similitudine se e solo se tutti gli elementi della matrice M sono multipli degli elementi di una matrice ortogonale, secondo uno stesso coefficiente $k \neq 0$ (rapporto di similitudine) .

* Infine, anche il caso in cui *Det* M$= \pm 1$ ha un'interpretazione geometrica interessante: la trasformazione lascia inalterate le aree (ossia è una **trasformazione equivalente**).

Osservazione. L'analogia tra le formule delle trasformazioni geometriche e quelle che descrivono i cambiamenti di coordinate cartesiane non è casuale, anche se diversa ne è l'interpretazione. Cerco di spiegarmi con un semplicissimo esempio unidimensionale: una formula del tipo $x' = x + 8$ può essere interpretata come la trasformazione che ad ogni punto x della retta fa corrispondere il punto x' traslato di 8 unità di misura nel verso positivo. La stessa formula può essere però interpretata anche come il cambiamento di coordinate che non sposta i punti, ma ne modifica le coordinate, sostituendo il sistema di riferimento iniziale (di origine O) con un nuovo sistema di riferimento di origine O', dove la nuova origine ha ascissa -8 nel sistema di riferimento iniziale. Questa duplice interpretazione delle stesse formule si estende in modo naturale (salvo qualche maggiore complicazione tecnica) alle trasformazioni del piano e a quelle dello spazio.

18.II Considerazioni didattiche

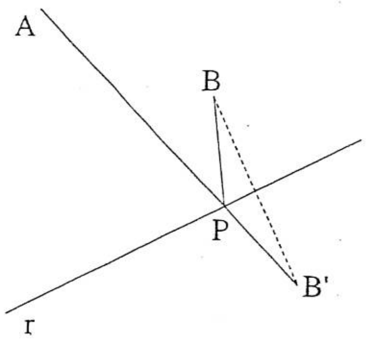
In mancanza di una tradizione consolidata, nei libri di testo più tradizionali il capitolo sulle trasformazioni geometriche termina nella maggior parte dei casi a questo punto, e rimane scarsamente collegato con i rimanenti capitoli, di impostazione euclidea. Nei testi più innovativi le trasformazioni geometriche risultano meglio collegate con le altre parti del programma, secondo un'impostazione più vicina a quella di Choquet, e vengono ulteriormente sviluppate in tre direzioni:

(I) Le definizioni tradizionali vengono formulate fin dall'inizio, o riformulate al momento opportuno, in termini di simmetrie assiali.

Per esempio, le traslazioni vengono definite o ri-definite come le isometrie che si ottengono per composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli; le rotazioni vengono definite o ri-definite come le isometrie che si ottengono per composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti. La relazione di perpendicolarità tra due rette diventa: la retta r è perpendicolare alla retta s se r ed s sono incidenti e se la simmetria di asse r trasforma la retta s in se stessa.

(II) Nelle dimostrazioni dei teoremi si privilegia l'uso delle isometrie e delle similitudini, rispetto alle classiche dimostrazioni euclidee. Inoltre la collezione dei tradizionali problemi geometrici viene integrata con ulteriori problemi che si prestano ad essere affrontati e risolti mediante ricorso ad opportune isometrie o similitudini.

A titolo di esempio in figura è visualizzata la costruzione del punto P che minimizza la lunghezza del percorso tra A e B toccando la retta r (basta completare la figura congiungendo A col simmetrico di B rispetto alla retta r).



(III) Si accenna al "**Programma di Erlangen**" di F. Klein.

Mi sembra opportuno approfondire quest'ultimo punto, anche in vista di quanto dirò nel seguito del paragrafo.

Il titolo completo del lavoro di Klein, nella traduzione italiana di G. Fano è: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti. (Programma elaborato in occasione dell'accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen, 1872)*.

Il riferimento all'Università di Erlangen chiarisce l'origine della denominazione con la quale il "programma" di Klein viene abitualmente citato. Per chi volesse saperne di più rinvio a [KLEIN, 1872]. Alcune pagine del "programma" sono anche riprodotte e commentate in [MANARA–LUCCHINI]. Avverto però che la lettura del testo ottocentesco non è sempre agevole e che nell'attuale trasposizione didattica ci si avvale di una rilettura moderna, limitata ad una piccola parte delle considerazioni di Klein. Per ulteriori approfondimenti e commenti su questo aspetto rinvio agli articoli di [BONOTTO] e di [BERNARDI–MENGHINI].

Klein parte dall'osservazione che ad ogni tipo di geometria (del piano o dello spazio [100]) si può associare il gruppo delle trasformazioni che lasciano invariate le nozioni e le proprietà geometriche delle figure di tale geometria. Viceversa, ad ogni gruppo di trasformazioni $\mathcal{T}$ si può associare la geometria $Geom(\mathcal{T})$ che consiste nell'insieme delle nozioni e delle proprietà delle figure che sono invarianti sotto l'azione delle trasformazioni del gruppo $\mathcal{T}$.

Klein osserva poi che, nel passare da un gruppo di trasformazioni ad un gruppo più ristretto, la quantità delle nozioni e delle proprietà delle rispettive geometrie aumenta. Si usa esprimere questo fatto dicendo che si passa da una geometria più "povera" ad una più "ricca", o anche che la prima geometria è inclusa nella seconda.

In base a questa osservazione appare naturale capovolgere il percorso schematizzato nella tradizionale sequenza "ascendente" (*) , privilegiando in sua vece la sequenza "discendente":

$$(**) \qquad \mathcal{A} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{M}.$$

A questa sequenza dei gruppi di trasformazioni corrisponde la sequenza delle rispettive geometrie:

$$(***) \qquad Geom(\mathcal{A}) \subset Geom(\mathcal{S}) \subset Geom(\mathcal{M}).$$

Si ottiene così (almeno in linea di principio) una chiara visione panoramica su quali nozioni e quali teoremi appartengono alla prima geometria (e di conseguenza anche alle geometrie più ricche), quali nozioni e quali teoremi vengono aggiunti nel passaggio dalla prima alla seconda geometria, e quali nel passaggio dalla seconda alla terza.

Ecco un esempio elementare in proposito.

La nozione di *parallelogramma* appartiene alla geometria affine $Geom(\mathcal{A})$, in quanto, se una specifica figura F è un parallelogramma, anche applicando ad F una qualsiasi trasformazione $t \in \mathcal{A}$ si ottiene un parallelogramma $t(F)$. A maggior ragione la nozione di

[100] Klein parla, più in generale, di "varietà" intese come spazi n-dimensionali.

parallelogramma appartiene anche alla geometria delle similitudini e a quella metrica.

La nozione di *quadrato* non appartiene alla geometria affine, in quanto esistono trasformazioni affini che trasformano il quadrato in un parallelogramma (non quadrato). Appartiene invece alla geometria delle similitudini $Geom(\mathcal{S})$ in quanto, se una specifica figura F è un quadrato, anche $t(F)$ è un quadrato per ogni $t \in \mathcal{S}$. A maggior ragione la nozione di quadrato appartiene alla geometria metrica.

Infine, ragionando in modo analogo a quello dei due casi precedenti, si constata che la nozione di *quadrato di lato unitario* non appartiene alla geometria affine né a quella delle similitudini. Appartiene invece alla geometria metrica $Geom(\mathcal{M})$.

Osservazioni

1. Da quanto detto finora si evince che il ricorso alle trasformazioni dà luogo ad una pluralità di geometrie. In questa sede ne ho citato tre: $Geom(\mathcal{M})$, $Geom(\mathcal{S})$, $Geom(\mathcal{A})$. Nel paragrafo successivo accennerò ad un'ulteriore geometria, quella *proiettiva:* $Geom(\mathcal{P})$.

Resta ancora da precisare in che relazione queste geometrie stanno con la tradizionale geometria euclidea. Si usa dire che quella euclidea è una geometria "metrica" il che farebbe pensare ad una identificazione tra la geometria euclidea e $Geom(\mathcal{M})$. In realtà (quasi) tutte le considerazioni di Euclide prescindono dal ricorso ad una specifica unità di misura, quindi è più appropriato confrontare quella euclidea con la geometria delle similitudini. E in effetti le due geometrie (quella euclidea e $Geom(\mathcal{S})$) riguardano sostanzialmente gli stessi enti e consentono di dimostrare gli stessi teoremi. Quindi oserei dire che la differenza tra queste due geometrie non sta tanto nei contenuti, quanto nella diversità dei due approcci.

2. Non sempre è facile decidere se una nozione o un teorema della geometria euclidea afferisce ad una piuttosto che ad un'altra geometria delle trasformazioni. Per esempio, a prima vista la nozione di "punto medio M di un segmento AB " sembra inquadrabile solo nella geometria metrica o al più in quella delle similitudini, e non nella geometria affine. Infatti l'usuale caratterizzazione del punto medio si basa sull'uguaglianza tra le lunghezze dei due segmenti AM ed MB, il che esula dalla geometria affine. Ma nel caso specifico del punto medio i due segmenti AM ed MB appartengono ad una stessa retta, e allora si può ricorrere ad una costruzione gra-

fica alternativa senza scomodare nozioni metriche. Chi conosce un po' di geometria proiettiva ricorderà che tale costruzione si basa su certe proprietà dei *quadrilateri piani completi*, che sono invarianti rispetto alle trasformazioni affini (vedi per esempio i §3 e 4 del Cap. 4 di [COURANT-ROBBINS].

Tenuto conto della possibilità di costruire nella geometria affine i punti medi dei segmenti, ne segue che si possono costruire nella stessa geometria le tre mediane di un triangolo e dimostrare l'esistenza di un punto comune ad esse. Pertanto la nozione di *baricentro* afferisce, oltre che alla geometria metrica e a quella delle similitudini, anche alla geometria affine.

Non è invece possibile costruire l'asse di un segmento senza ricorrere ad una struttura metrica, e quindi la nozione di *circocentro* afferisce solo alla geometria metrica e a quella delle similitudini, ma non alla geometria affine.

3. Ogni figura F appartenente ad una fissata geometria individua una classe di equivalenza, formata da tutte le figure che si possono ottenere da F mediante le trasformazioni del gruppo di quella geometria. Per esempio, nella geometria affine la classe di equivalenza determinata da un fissato parallelogramma è formata dalla totalità dei parallelogrammi, mentre la classe di equivalenza determinata da un parallelogramma nella geometria delle similitudini è formata dai soli parallelogrammi che sono simili al parallelogramma dato, e la classe di equivalenza determinata da un parallelogramma nella geometria metrica è formata dai soli parallelogrammi che sono isometrici al parallelogramma dato.

Si noti l'importanza di questa ripartizione delle figure in classi di equivalenza: in una fissata geometria, ogni teorema di quella geometria, valido per una specifica figura F, vale automaticamente anche per tutte le altre figure della classe di equivalenza individuata da F. Quindi basta scegliere una figura particolarmente semplice come rappresentante di quella classe e dimostrare il teorema per quella singola figura, per essere certi che il teorema vale anche per tutte le figure ad essa equivalenti [101].

Lascio al lettore il compito (solo apparentemente banale) di in-

[101] Grazie a questa osservazione si realizza così , in questa specifica situazione, il sogno di molti studenti che ritengono di avere dimostrato un teorema avendone verificato la validità solo in qualche caso particolare.

quadrare le nozioni e i teoremi qui di seguito elencati nell'ambito della geometria affine, o delle similitudini, o metrica:

- Rette parallele, Rette perpendicolari.
- Triangolo, Triangolo rettangolo, Triangolo isoscele,
- Triangolo equilatero, Triangolo equilatero di lato unitario.
- Incentro e Ortocentro di un triangolo.
- Rombo, Trapezio, Circonferenza, Ellisse, Parabola.
- Teorema di Pitagora, Teorema di Talete.
- Teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo.

Conclusa questa sintetica carrellata sugli argomenti che i libri di testo affrontano (in tutto o in parte) per quanto concerne le trasformazioni geometriche, cercherò ora di evidenziare quelli che a mio avviso sono i principali pregi e difetti che una siffatta trattazione presenta dal punto di vista didattico. Per un'esposizione più articolata del mio punto di vista rinvio a [VILLANI, 1994] e [VILLANI, 1995].

Aspetti positivi

1. La netta distinzione tra proprietà metriche e proprietà affini, che si rivelerà particolarmente utile per chi nel seguito degli studi avrà a che fare con gli spazi vettoriali (nelle due versioni: con o senza un prodotto scalare definito positivo).

2. La generalità dell'impostazione di Klein, suscettibile di essere estesa ad altri gruppi di trasformazioni (in primo luogo alle proiettività, ma anche agli omeomorfismi delle strutture topologiche, ecc.).

3. La possibilità di usare un "modello" (ossia un rappresentante particolarmente semplice per ciascuna classe di equivalenza) sul quale ragionare, con la certezza che ogni proprietà dimostrata vera sul modello vale anche per tutte le altre figure che stanno nella medesima classe di equivalenza.

4. La possibilità di introdurre le rotazioni in termini di composizione di due simmetrie assiali, evitando così il ricorso a nozioni non ben formalizzate di angolo (vedi il §12).

Un modo costruttivo, usato fin dalle ultime classi delle scuole elemenari per disegnare un poligono regolare, consiste nel partire da una circonferenza (destinata a diventare la circonferenza circoscritta al costruendo poligono), nel suddividerla in n archi uguali, e nel congiungere poi ciclicamente i punti della suddivisione mediante una spezzata chiusa [112].

2. Forse qualche lettore avrà trovato eccessiva l'attenzione che ho dedicato fin qui alle definizioni. Ritengo invece che questo aspetto sia assai importante, tanto all'interno della matematica, quanto come esercizio di logica da utilizzare anche nelle altre discipline e nell'uso che se ne fa nel linguaggio corrente. Mi limito a segnalare in proposito l'esito di un test proposto alcuni anni fa ad allievi del primo anno di varie scuole superiori toscane (vedi [MA-LI], p. 28).

Quesito. *Un poligono è regolare se ha tutti gli angoli uguali e tutti i lati uguali. Un poligono, invece è irregolare quando ha:*

a) tutti i lati e gli angoli fra loro disuguali

b) tutti gli angoli uguali ma i lati disuguali

c) almeno una coppia di lati disuguali e almeno una coppia di angoli disuguali

d) almeno una coppia di lati disuguali oppure almeno una coppia di angoli disuguali.

L'alternativa corretta (d) è stata scelta solo dal 30 % degli intervistati a fronte dell'alternativa (errata) (a), scelta dal 40 %.

Conclusa la parte dedicata alle definizioni, il passo successivo consiste nell'affrontare le tre tematiche già preannunciate in precedenza.

20.1. Isometrie e simmetrie dei poligoni

Data una generica figura piana F, si dice che un'isometria t trasforma la figura in se stessa se F coincide (in senso insiemistico) con la sua immagine $t(F)$. Per esempio la lettera Z viene trasformata

[112] Nel richiamare questa costruzione in una classe di scuola secondaria superiore potrà essere opportuno inserire qualche considerazione teorica sulla ciclotomia osservando (cfr. il §17) che per taluni valori di n la suddivisione della circonferenza in n parti uguali può essere realizzata "esattamente" mediante opportune costruzioni con riga e compasso, mentre per i rimanenti valori di n si ricorrerà a costruzioni "approssimate", per esempio mediante l'uso di un goniometro.

in se stessa – oltre che dalla trasformazione identica – anche dalla simmetria centrale con centro nel punto medio del tratto obliquo. Un'ellisse viene trasformata in se stessa – oltre che dalla trasformazione identica – anche dalle simmetrie rispetto ai suoi assi, nonché dalla simmetria rispetto al suo centro.

Qualunque sia la figura F, l'insieme delle isometrie che trasformano F in se stessa possiede una struttura di gruppo, sottogruppo del gruppo di tutte le isometrie del piano. Nel caso di una retta, di una circonferenza o di un cerchio tale gruppo consta di infiniti elementi, mentre nel caso di figure particolarmente asimmetriche il gruppo si riduce ad un unico elemento, e cioè alla trasformazione identica.

Teorema 1. *I gruppi delle isometrie dei poligoni sono finiti.*

La dimostrazione è conseguenza immediata del fatto che il numero dei vertici di un qualsiasi poligono P è finito e che un'isometria di P in se stesso manda vertici in vertici per cui, detto n il numero dei vertici, il numero complessivo delle isometrie di P in se stesso non può superare il numero delle permutazioni di n elementi.

Osservazione. Tutte le isometrie che trasformano un poligono regolare su se stesso lasciano fisso il suo centro.

Alcune importanti proprietà strutturali di cui godono specifiche categorie di poligoni possono essere espresse in modo particolarmente efficace in termini dei loro gruppi di isometrie, altre in termini delle *simmetrie assiali*, delle *rotazioni* e delle *simmetrie centrali* che trasformano un poligono in se stesso [113] . Ecco un teorema relativo ai poligoni regolari:

Teorema 2. *Se P è un poligono regolare (convesso) di n lati il gruppo delle sue isometrie consta esattamente di $2n$ elementi. Più precisamente n tra queste isometrie sono pari ed n dispari. Le isometrie pari sono le rotazioni (in uno dei due versi possibili) centrate nel centro del poligono, di ampiezza $\frac{2\pi k}{n}$ (con $k = 1, 2, ...n-1$). Le isometrie dispari sono simmetrie assiali. Per descriverle in modo*

[113] Quello che qui ho chiamato "gruppo delle isometrie" di un poligono P veniva chiamato in passato (e viene tuttora chiamato da alcuni autori) "gruppo delle simmetrie" del poligono P. L'uso dello stesso termine "simmetria" in due accezioni diverse va però evitato in quanto può essere fonte di fraintendimenti: infatti non tutte le isometrie di un poligono in se stesso sono simmetrie e comunque l'insieme di tutte le simmetrie che trasformano un poligono in se stesso non possiede mai una struttura gruppale.

più dettagliato occorre distinguere due casi: se n è dispari si tratta delle simmetrie i cui assi passano per un vertice e per il punto medio del lato opposto; se n è pari, si tratta delle simmetrie i cui assi passano per una coppia di vertici opposti, oppure per i punti medi di due lati opposti.

La semplice dimostrazione è reperibile su tutti i libri di geometria, quindi non mi sembra necessario esplicitarla in questa sede.

Osservazioni

1. Nel caso di n pari una delle rotazioni è anche simmetria centrale, con centro di simmetria nel centro del poligono.

2. Il teorema 2 sussiste, oltre che per i poligoni regolari convessi, anche per quelli stellati.

3. È assai istruttivo far costruire agli allievi le tavole di composizione delle isometrie di alcuni semplici poligoni, per esempio triangoli equilateri, quadrati, pentagoni regolari. L'esercizio non è semplicissimo (vedi [VILLANI, 1995] p.686). Ma ne vale senz'altro la pena, poiché si ottengono tavole (formalmente analoghe alla tabellina pitagorica) che forniscono uno dei pochi esempi "concreti" di strutture gruppali finite *non commutative.*

Passo ora ad esemplificare un significativo utilizzo delle simmetrie nello studio dei poligoni, limitandomi per semplicità a quelli di tre e di quattro lati.

Parto dalla constatazione che nelle scuole di base si introduce tutta una serie di nomi specifici per caratterizzare particolari categorie di poligoni. Restano però imprecisati i criteri in base ai quali tali classificazioni vengono fatte: a volte vi intervengono le lunghezze dei lati o le ampiezze degli angoli, altre volte il parallelismo di certe coppie di lati, ecc. Sembra quasi una classificazione di tipo botanico, dove c'è sempre il rischio di dover aggiungere qualche nuova specie all'elenco di quelle già conosciute.

Un modo efficace per mettere ordine e dare sistematicità alle classificazioni dei poligoni si basa proprio sulle loro simmetrie assiali e centrali (vedi per esempio [MAMMANA-PENNISI]).

N.B. In questo contesto la classificazione non va fatta per inclusione, bensì per partizione (cfr., nel §8, i commenti sui criteri di classificazione usati dai matematici a seconda delle circostanze).

Ecco i risultati (inquadrabili nella geometria delle similitudini, non in quella affine):

Teorema 3 (classificazione dei triangoli).
Un triangolo è:
* ***equilatero*** *se e solo se possiede tre simmetrie assiali;*
* ***isoscele*** *se e solo se possiede una simmetria assiale;*
* ***scaleno*** *se e solo se non possiede alcuna simmetria assiale.*

Osservazione. Non esistono triangoli con due simmetrie assiali, in quanto dall'esistenza di due simmetrie assiali si deduce l'esistenza di una terza simmetria assiale.

Nessun triangolo possiede simmetrie centrali.

Teorema 4 (classificazione dei quadrilateri). *Un quadrilatero (convesso) è:*

* *un* ***quadrato*** *se e solo se possiede 4 simmetrie assiali (e una simmetria centrale);*

* *un* ***rettangolo*** *se e solo se possiede 2 simmetrie assiali con assi passanti per i punti medi delle coppie di lati paralleli (e una simmetria centrale).*

* *un* ***rombo*** *se e solo se possiede 2 simmetrie assiali con assi passanti per le coppie di vertici opposti (e una simmetria cantrale);*

* *un* ***trapezio isoscele*** *se e solo se possiede una simmetria assiale con asse passante per i punti medi di una delle due coppie di lati opposti (che di conseguenza risultano paralleli);*

* *un* ***deltoide*** *se e solo se possiede una simmetria assiale con asse passante per una delle due coppie di vertici opposti (di conseguenza gli angoli relativi agli altri due vertici risultano uguali).*

* *un* ***parallelogramma*** *se e solo se possiede una simmetria centrale con centro nel punto di intersezione delle due diagonali.*

Osservazione. Non esistono altri quadrilateri dotati di simmetrie assiali né centrali. In particolare, un generico trapezio (non isoscele) non è dotato di alcun asse né centro di simmetria.

I *deltoidi* possono essere di due tipi: *convessi* (chiamati **aquiloni**), o *concavi* (chiamati **punte di freccia**).

20.II. Tassellazioni del piano mediante poligoni

Nel linguaggio colloquiale si parla di "piastrellature"o di "pavimentazioni", termini un po' vaghi che nel linguaggio matematico vengono precisati e sostituiti dal termine tecnico *tassellazioni*. Una tassellazione del piano è per definizione una collezione di poligoni la cui unione è tutto il piano, con l'ulteriore proprietà che l'intersezione di due poligoni, se non è vuota, debba esssere un vertice o un lato comune ai due poligoni. Se la tassellazione è formata da poligoni regolari tutti uguali tra loro si parla di **tassellazione regolare**.

Il seguente risultato è ben noto fin dalla scuola media:

Teorema 5. *Esistono solo tre tassellazioni regolari del piano: quelle con triangoli equilateri, con quadrati, con esagoni regolari.*

Anche la semplice dimostrazione è ben nota: basta utilizzare la formula $\alpha_n = \frac{n-2}{n}180°$ che esprime l'ampiezza (in gradi) degli angoli interni α_n dei poligoni regolari di n lati e osservare che solo nei casi $n = 3, 4, 6$ tali ampiezze (espresse in gradi) sono sottomultipli di 360° (ampiezza dell'angolo giro).

Osservazioni

1. La tassellazione esagonale è quella utilizzata dalle api come base per la costruzione delle celle dei loro alveari, ed è notevole il fatto che, fra le tre tassellazioni regolari, quella esagonale è la più "economica" in termini di rapporto tra la capienza di ciascuna cella e la quantità di materiale impiegato per costruirne le pareti. Detto in termini matematici: a parità di area, il perimetro di un esagono (base di ciascuna cella) è minore del perimetro di un quadrato, o di un triangolo equilatero.

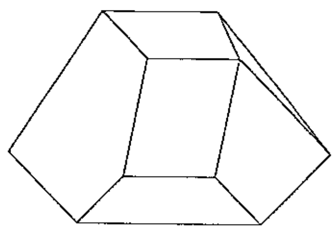
2. Se si lascia cadere anche una sola delle tre condizioni (che i poligoni siano regolari; che siano tutti uguali tra loro; che l'intersezione a due a due non possa essere altro che vuota, o un vertice, o un lato comune) basta un po' di fantasia per trovare innumerevoli altre tassellazioni, vedi per esempio [DEDÒ, 1999] cap. 2.

Ciò può dare lo spunto per stimolare gli allievi ad osservare e descrivere matematicamente le piastrellature dei pavimenti delle loro abitazioni o di quelle dei loro nonni (mezzo secolo fa era particolarmente frequente una piastrellatura ad ottagoni regolari alternati con quadrati). Può anche scatenare la loro fantasia nell'ideare essi stessi pavimentazioni particolarmente belle e originali, attività specificamente indicata per le scuole ad indirizzo artistico, ma proponibile anche in ogni altro tipo di scuole.

Nello stesso ordine di idee, un tema correlato con le tassellazioni del piano, e altrettanto indicato per attività matematiche e artistiche, è quello dei fregi e dei **mosaici** (detti anche **tappezzerie**). In entrambi i casi si parte da una figura geometrica o più in generale da un motivo ornamentale F che nel caso dei fregi viene ripetuto periodicamente per effetto di un'unica traslazione iterata un numero arbitrario di volte. Nel caso dei mosaici, il motivo F viene ripetuto periodicamente per effetto di due traslazioni in direzioni distinte, ciascuna iterata un numero arbitrario di volte. Se si tiene conto anche delle possibili simmetrie della figura base F, si dimostra che esistono 7 tipi diversi di fregi e 17 tipi diversi di mosaici. Per saperne di più rinvio il lettore interessato a [DEDÒ, 1999], cap. 7, dove troverà un'esposizione matematica approfondita, corredata da belle illustrazioni, alcune delle quali a colori (pp.389-394).

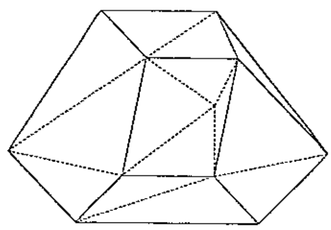
20.III. Un lemma propedeutico per la formula di Eulero

Si consideri un poligono semplice P "tassellato" mediante un numero finito di altri poligoni semplici, vedi figura (a). Sia **F** il numero delle facce, **S** il numero dei lati (spigoli) e **V** il numero dei vertici della tassellazione (nel caso specifico **F** = 6 ; **S** = 15 ; **V** = 10).



V=10, S=15, F=6

(a)



V=11, S=24, F=14

(b)

Naturalmente, se si usa un'altra tassellazione, ottenuta per esempio scomponendo tutti i poligoni in triangoli (vedi figura (b)), i tre numeri **F** , **S** , **V** cambieranno (nel caso specifico, **F** = 14, **S** = 24, **V** = 11). Il fatto notevole è che in entrambi i casi sussiste la relazione F+V = S+1 , relazione che i matematici preferiscono scrivere nella forma F-S+V = 1. Questa osservazione, ripetuta su un certo numero di casi particolari, induce a congetturare una validità generale di questa invarianza. Ed infatti si dimostra che sussiste il seguente risultato (qui chiamato "lemma" anziché "teorema", in quanto propedeutico ad un teorema di cui parlerò nel paragrafo successivo):

Lemma. *La relazione F-S+V =1 sussiste per ogni tassellazione di un poligono (semplice) P mediante un numero finito di altri poligoni (semplici).*

Cenno della dimostrazione.

Poiché si tratta di ragionare su una generica tassellazione di un generico poligono P, non possiamo sapere a priori quale sia il valore numerico dell'espressione F-S+V. La dimostrazione consta di due parti:

Prima parte: invarianza rispetto ad una triangolazione.

Scomponiamo ciascun poligono della tassellazione in triangoli, mediante un uso ripetuto della seguente procedura standard: se un poligono della tassellazione non è esso stesso un triangolo, si tracci una sua diagonale. Con ciò il numero delle facce della tassellazione passa da F ad F'=F+1. Anche il numero degli spigoli della tasselazione passa da S ad S'=S+1. Invece il numero dei vertici rimane invariato: V'=V. Dunque F'-S'+V'=F-S+V. Iterando lo stesso procedimento fino ad ottenere una tassellazione del poligono P mediante triangoli, il valore della somma a segni alterni dei nuovi numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici sarà ancora quella iniziale: F-S+V.

Seconda parte: invarianza rispetto ad una procedura di riduzione del numero dei triangoli.

Nella triangolazione di P vi saranno triangoli che hanno uno o due lati sul bordo della tassellazione. Se eliminiamo un triangolo del primo tipo, F si riduce di un'unità, S si riduce di un'unità e V rimane inalterato, quindi il valore della somma a segni alterni dei nuovi numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici resta quella iniziale. Se poi eliminiamo un triangolo del secondo tipo, F si riduce di un'unità, S si riduce di due unità e V si riduce di un'unità, quindi anche in questo caso il valore della somma a segni alterni dei nuovi numeri delle facce, degli spigoli e dei vertici resta sempre quella iniziale. Orbene, è possibile iterare questi due tipi di eliminazioni senza spezzare la connessione della parte rimanente, fino al punto di avere a che fare con un solo triangolo, per il quale

$$\mathrm{F}(triang) = 3, \quad \mathrm{S}(triang) = 3, \quad \mathrm{V}(triang) = 1$$

e quindi

$$\mathrm{F}(triang) - \mathrm{S}(triang) + \mathrm{V}(triang) = 1.$$

Conclusione: Poiché né la procedura di triangolazione né quella di riduzione alterano il valore della somma a segni alterni dei valori iniziali di S, F, V, risulta provata la tesi $F - S + V) = 1$.

Osservazione. In quanto precede ho sottaciuto alcuni "dettagli" non irrilevanti. Per chi fosse interessato ad un'esposizione più esauriente rinvio a [COURANT–ROBBINS], p.302 e segg. Preferirei però che fossero i lettori a sobbarcarsi la fatica e a provare la soddisfazione di essere riusciti ad identificare autonomamente i "dettagli" omessi. Tornerò comunque sull'argomento nel paragrafo successivo.

Considerazioni didattiche

In quanto precede mi sono dilungato – forse troppo – ad illustrare vari spunti didattici che a mio parere potrebbero contribuire a motivare meglio e a rendere più efficace e più coinvolgente una trattazione del capitolo dedicato ai poligoni, in alternativa all'esposizione alquanto piatta e arida seguita dai libri di testo più tradizionali.

Per chi condivide in tutto o in parte il mio punto di vista resta aperto l'interrogativo posto nel titolo del paragrafo: *Perché, specie nelle scuole secondarie superiori, gli spunti didattici che si prestano a promuovere un coinvolgimento attivo degli allievi non vengono adeguatamente valorizzati?*

Confesso di non avere una risposta convincente. Posso però azzardare varie ipotesi circa le cause che frenano la diffusione di questa come di ogni altra proposta innovativa, tanto metodologica quanto contenutistica:

* Ogni sistema scolastico tende a standardizzare contenuti e metodi d'insegnamento. L'eventualità che in qualche classe si segua un percorso diverso (qualunque esso sia) viene vista come un elemento di disturbo, da non incoraggiare o addirittura da osteggiare.

* L'assillo di "svolgere tutto il programma" prevale su ogni altra considerazione epistemologica e didattica.

* Non esistono libri di testo adeguati.

* Chi segue un percorso diverso da quello tradizionale rischia di esporsi alle critiche dei colleghi e delle famiglie, e alle contestazioni degli allievi.

POLIEDRI REGOLARI

Volendo restringere ulteriormente il campo, conviene limitarsi a due particolari classi di poliedri, quelli *convessi* e quelli *regolari*.

Proposta 5. Si chiama **poliedro convesso** un solido limitato dello spazio il cui bordo è formato da un numero finito di poligoni, detti facce, con la proprietà che due facce aventi uno spigolo in comune non siano mai complanari, e con l'ulteriore proprietà che, per ogni faccia, il solido sia interamente contenuto in uno dei due semispazi nei quali lo spazio resta diviso dal piano che contiene la faccia.

Proposta 5 bis (variante della proposta 5). Regione limitata dello spazio, ottenuta come intersezione di un numero finito di semispazi.

Commento. In base alla definizione 5 (o 5 bis) restano esclusi dal novero dei poliedri convessi i solidi delle figure (c) , (e) , (f) , (g) , (i).

Proposta 6 Un poliedro (convesso) si dice **regolare** se:

1. Tutte le facce sono poligoni regolari;
2. Tutte le facce sono uguali tra loro;
3. In ogni vertice concorre lo stesso numero di facce.

Ed ecco una prima sorpresa per chi non ne avesse ancora sentito parlare: a differenza del caso bidimensionale, dove esistono infiniti poligoni regolari, nel caso tridimensionale si ha il:

Teorema 1. *Esistono esattamente cinque poliedri regolari (convessi), e precisamente:*

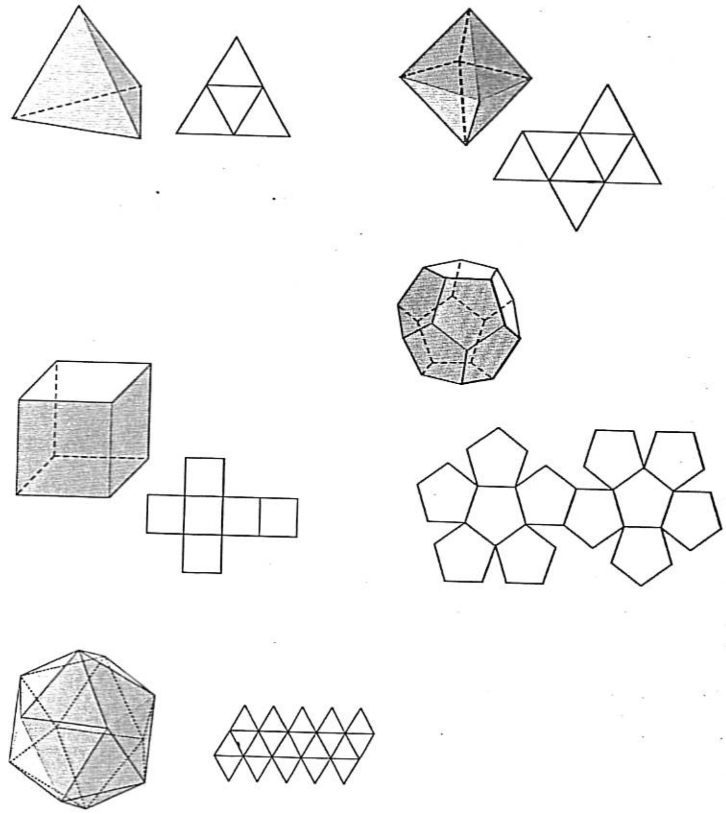
il tetraedro *(con 4 facce triangolari, 6 spigoli, 4 vertici)* *il* ***cubo****, detto anche* ***esaedro*** *(con 6 facce quadrate, 12 spigoli, 8 vertici)*

*l'****ottaedro*** *(con 8 facce triangolari, 12 spigoli, 6 vertici)*

il ***dodecaedro*** *(con 12 facce pentagonali, 30 spigoli, 20 vertici)*

*l'****icosaedro*** *(con 20 facce triangolari, 30 spigoli, 12 vertici).*

Questi cinque poliedri sono illustrati in figura, ciascuno con uno dei suoi **sviluppi piani**. A partire da questi sviluppi si può ricostruire il poliedro "incollando" tra loro i lati delle coppie di facce che in tale ricostruzione danno luogo ad un unico spigolo del poliedro.



Osservazioni

1. Nell'uso corrente i termini "tetraedro", "ottaedro", "dodecaedro", "icosaedro" vengono utilizzati per denotare genericamente tutti i solidi, anche non regolari, con quegli stessi tipi di facce (erano irregolari anche i tetraedri citati a titolo esemplificativo nei paragrafi 11 e 12). Nell'enunciato del teorema la specificazione che il tetraedro, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro fossero *regolari* sarebbe stata pleonastica e quindi è stata sottintesa. Ma in altri contesti, per evitare ambiguità, sarebbe opportuno precisare esplicitamente se ci si riferisce al caso dei poliedri regolari o al caso generico. Per il cubo l'ambiguità non sussiste, in quanto nella sua definizione è specificato che le sue sei facce devono essere quadrate, e non genericamente quadrangolari.

2. I cinque poliedri regolari (convessi) vengono chiamati anche **solidi platonici** in omaggio a Platone (427-347 a.C) che attribuiva ad essi un ruolo centrale nella sua visione cosmologica, associando i quattro poliedri a facce triangolari o quadrate a quelli che venivano considerati gli elementi costituitivi primordiali della materia: il tetraedro al fuoco, il cubo alla terra, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua. Quanto al dodecaedro (che è a facce pentagonali) Platone lo considera genericamente come immagine dell'universo (Timeo, 52-55).

L'importanza attribuita nell'antichità ai poliedri regolari è testimoniata anche dal fatto che essi costituiscono il coronamento dell'intero trattato di Euclide (XIII libro degli Elementi).

3. In analogia col caso dei poligoni regolari, i poliedri regolari possiedono una sfera circoscritta (che contiene tutti i vertici) e una sfera inscritta (che passa per i centri di tutte le facce). Le due sfere hanno lo stesso centro, che viene detto **centro del poliedro**.

4. Se si considerano i centri delle facce di un poliedro regolare, questi risultano essere a loro volta i vertici di un poliedro regolare, detto il **poliedro duale** del poliedro iniziale. Precisamente: il duale di un tetraedro è un tetraedro; il duale di un cubo è un ottaedro e viceversa; il duale di un dodecaedro è un icosaedro e viceversa.

5. In genere, quando si parla di poliedri regolari, si sottintende che essi siano *convessi*, e per circa venti secoli si era ritenuto che non ne potessero esistere altri. Invece, se si estende la nozione di poliedro regolare anche al caso dei poliedri *non convessi*, ne esistono altri quattro. Uno è il **piccolo dodecaedro stellato**, visualizzato nella figura (i). Esso fu scoperto, insieme al cosiddetto **grande dodecaedro** da Keplero (1571–1630); gli altri due poliedri regolari non convessi furono scoperti da Poinsot (1777–1859). Per ulteriori approfondimenti, rinvio a [CUNDY-ROLLETT] cap. 3.

6. Nella definizione di poliedro regolare compaiono tre condizioni

restrittive. Esse sono tutte necessarie in quanto, omettendone anche una sola, si trovano ulteriori tipi di poliedri che non possono dirsi "regolari". Precisamente, esistono:

* Poliedri che soddisfano alle condizioni 1 e 2 ma non alla condizione 3 (ossia che hanno facce regolari e uguali, che però concorrono in numero diverso nei diversi vertici. Esempio: il solido visualizzato nella figura (b).

* Poliedri che soddisfano alle condizioni 1 e 3 ma non alla condizione 2 (ossia che hanno facce regolari e concorrenti in ugual numero in tutti i vertici, ma che sono di due o più tipi). Esempio: il solido visualizzato in figura (h). Esso fa parte di una famiglia di 13 solidi dello stesso tipo, detti **poliedri archimedei**.

* Poliedri che soddisfano alle condizioni 2 e 3 ma non alla condizione 1 (ossia che hanno facce uguali e concorrenti nello stesso numero in tutti i vertici, ma che non sono poligoni regolari). Esempio un tetraedro avente per facce quattro triangoli uguali, con spigoli di lunghezze proporzionali ai numeri 6 , 7 , 8.

Ecco ora un cenno di dimostrazione del teorema 1:

Affinché un punto V sia vertice di un costruendo poliedro è necessario che in V concorrano gli spigoli di almeno tre facce per formare un angoloide di vertice V. È inoltre necessario che la somma delle ampiezze degli angoli delle facce con vertice in V sia minore di un angolo giro (vedi §12). Poiché, a norma di definizione, le facce di un poliedro regolare sono poligoni tutti uguali e regolari, anche tutti i loro angoli sono uguali. Indichiamo con α_n la misura (espressa in gradi) degli angoli di un poligono regolare di n lati. Pertanto una condizione necessaria affinché possano esistere poliedri regolari con facce $n-$agonali è che

$$3\ \alpha_n < 360^\circ.$$

Tenuto conto di questa limitazione e dei valori delle ampiezze angolari dei poligoni regolari di n lati (vedi §20) ne segue che possono esistere al massimo 5 tipi di poliedri regolari:

* Con facce triangolari concorrenti a 3 a 3 in uno stesso vertice
* Con facce triangolari concorrenti a 4 a 4 in uno stesso vertice
* Con facce triangolari concorrenti a 5 a 5 in uno stesso vertice
* Con facce quadrate concorrenti a 3 a 3 in uno stesso vertice
* Con facce pentagonali concorrenti a 3 a 3 in uno stesso vertice.

Nell'enunciato del teorema avevo già anticipato l'esistenza di tutti e cinque questi poliedri regolari e avevo anche accennato ad un metodo per costruirli materialmente a partire dai loro sviluppi piani. Ma per i matematici ciò non è sufficiente, in mancanza di una dimostrazione rigorosa. La dimostrazione con metodi sintetici dell'effettiva esistenza dei cinque poliedri regolari è alquanto complicata (vedi per esempio [DEDÒ, 1999]). Quindi non mi sembra il caso di riproporla in questa sede. La dimostrazione si semplifica invece notevolmente se si ricorre a metodi analitici, specie se qualcuno ha già calcolato per noi le coordinate dei vertici dei poligoni in questione, riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali monometriche) particolarmente adatto allo scopo. Trascrivo qui di seguito tali coordinate desumendole da [DEDÒ, 1999], pp.99–107. Utilizzando questi dati, l'esistenza dei cinque poliedri regolari si riduce a semplici verifiche analitiche (uguaglianza di tutti gli spigoli e di tutti gli angoli delle facce).

Lo scopo di queste informazioni non è quello di costringere i miei lettori, né tanto meno i loro allievi, ad esplicitare queste (noiose) verifiche. Mi auguro invece che possano essere uno stimolo a realizzare al computer belle immagini di questi bellissimi poliedri, in aggiunta (non in sostituzione) ad una costruzione artigianale dei loro modellini tridimensionali.

COORDINATE DEI VERTICI DEI CINQUE POLIEDRI REGOLARI IN OPPORTUNI SISTEMI DI RIFERIMENTO

N.B. Nel caso delle coordinate del dodecaedro e dell'icosaedro la lettera graca τ sta ad indicare un numero irrazionale che ricorre spesso in questo tipo di questioni geometriche (il cosiddetto "rapporto aureo":

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1,61803....$$

Tetraedro:

$$(1;1;1) \quad (1;-1;-1) \quad (-1;1;-1) \quad (-1;-1;1)$$

Cubo:

$$(\pm 1;\ \pm 1;\ \pm 1)$$

nelle otto combinazioni possibili dei segni + e − .

Problema III. Quanti e quali tipi di poligoni si possono ottenere sezionando un cubo con un piano? Per esempio, si possono ottenere:

Triangoli (equilateri e non equilateri)?

Quadrilateri (in particolare: quadrati, rettangoli, trapezi e altri)?

Pentagoni (regolari e non)?

Esagoni (regolari e non)?

Un metodo empirico assai efficace per visualizzare le possibili forme delle sezioni consiste nel versare un liquido colorato in un cubo trasparente attraverso un piccolo foro praticato in uno dei vertici del cubo, e nell'osservare le forme assunte dalla superficie del liquido al variare dell'inclinazione del cubo e del livello del liquido nel cubo. Si osserverà, contrariamente a quanto si potrebbe ipotizzare, che è possibile ottenere anche sezioni pentagonali ed esagonali. Ma mentre gli esagoni possono essere anche regolari, i pentagoni sono necessariamente irregolari. Come si spiega questa apparente anomalia?

Suggerimento. I piani contenenti le facce di un cubo sono a due a due paralleli. Quindi le loro intersezioni con un ulteriore piano danno luogo ad un massimo di tre coppie di rette parallele. Quante sono le direzioni dei lati di un esagono regolare? E quante le direzioni dei lati di un pentagono regolare?

Il problema è difficile anche per studenti delle scuole superiori o di livello universitario se non si ricorre al dispositivo sperimentale sopra descritto (o, in alternativa, a qualche software specifico per la visualizzazione di figure geometriche tridimensionali). È invece proponibile in termini osservativi–qualitativi già nella scuola media, utilizzando il dispositivo sperimentale.

Ecco un quarto problema, che rappresenta una significativa applicazione della trigonometria piana ad una situazione spaziale, e che quindi è proponibile solo negli ultimi anni di scuola secondaria:

Problema IV. Si calcolino le ampiezze degli angoli diedri formati dalle coppie di facce adiacenti dei poliedri regolari, sfruttando la conoscenza delle coordinate dei loro vertici in un opportuno sistema di riferimento cartesiano (vedi sopra).

Il problema, banale per il cubo, è di difficoltà medio–alta per i rimanenti poliedri regolari. La maggiore difficoltà deriva in larga misura dalla scarsa conoscenza della definizione di "ampiezza di un angolo diedro".

Accennerò ora, senza entrare in dettagli tecnici che sarebbero troppo complessi, agli analoghi tridimensionali dei tre argomenti già affrontati nel paragrafo precedente per il caso bidimensionale:

21.I. Isometrie e simmetrie dei poliedri.
21.II. Tassellazioni dello spazio mediante poliedri.
21.III. Formula di Eulero.

Premetto che in tutto il seguito del paragrafo indicherò con $\mathbf{F}$, S, V il numero delle facce, degli spigoli e dei vertici di un poliedro.

21.I. Isometrie e simmetrie dei poliedri

In analogia con quanto visto nel caso bidimensionale, l'insieme delle isometrie che trasformano un solido S dello spazio in se stesso possiede una struttura di gruppo, sottogruppo del gruppo di tutte le isometrie dello spazio. Lo chiameremo brevemente gruppo delle isometrie di S.

Teorema 1. *I gruppi delle isometrie dei poliedri sono finiti.*

Infatti sono sottogruppi del gruppo (finito) delle permutazioni dei vertici dei poliedri.

Osservazione. Tutte le isometrie che trasformano un poliedro regolare su se stesso lasciano fisso il suo centro.

Teorema 2. *Il gruppo delle isometrie di un poliedro regolare* $\boldsymbol{P}$ *consta di* $2k\mathbf{V}$ *elementi, dove* V *sta ad indicare il numero dei vertici e* k *il numero delle facce che concorrono in uno stesso vertice. Più precisamente* $k\mathbf{V}$ *tra queste isometrie sono pari e altrettante sono dispari.*

In base a questo teorema, le isometrie dirette dei poliedri regolari sono quindi in numero di 12 per il tetraedro, di 24 per il cubo e per l'ottaedro, di 60 per il dodecaedro e l'icosaedro.

Ometto la dimostrazione, peraltro non particolarmente difficile e mi limito a descrivere operativamente le 48 isometrie (pari e dispari) che trasformano il poliedro che ci è più familiare, vale a dire il cubo, in se stesso. Il lettore interessato potrà applicare il medesimo procedimento anche agli altri quattro poliedri regolari [116].

[116] In realtà la fatica può essere dimezzata tenendo conto del fatto che le coppie di poliedri duali hanno gli stessi gruppi di isometrie (più correttamente si dovrebbe dire: i loro gruppi di isometrie sono isomorfi).

Data l'impossibilità di rappresentare fedelmente le situazioni di geometria tridimensionale con disegni bidimensionali, raccomando vivamente a tutti gli interessati di munirsi di un cubo (di cartone) e di un sottile bastoncino (o di un ferro per i lavori a maglia) da utilizzare come asse di rotazione. Il ricorso a questo modello materiale consentirà di tradurre la descrizione a parole di ciascuna di queste isometrie pari in un movimento rigido del modello.

In base a quanto detto nel par. 18 e tenuto conto del fatto che le isometrie del cubo hanno tutte un punto fisso nel suo centro, si sa già che, a parte la trasformazione identica, tutte le altre 23 isometrie pari dovranno essere rotazioni con assi passanti per il centro del cubo.

Inoltre è facile rendersi conto che i due punti (antipodali) nei quali gli assi di rotazione "bucano" la superficie del cubo dovranno essere: una coppia di vertici opposti, oppure i punti medi di due spigoli opposti, oppure i centri di due facce opposte.

Esaminiamo separatamente i tre casi:

* Gli assi passanti per le coppie di vertici opposti sono 4. Poiché in ogni vertice concorrono tre facce, vi saranno per ciascuno dei quattro assi tre rotazioni che trasformano il cubo in se stesso, ma una delle tre sarà la rotazione banale (ossia la trasformazione identica già presa in considerazione). Per ogni asse le rotazioni "effettive" saranno quindi 2, rispettivamente di 120°, e di 240°. In totale, le rotazioni "effettive" di questo tipo sarnno quindi 8.

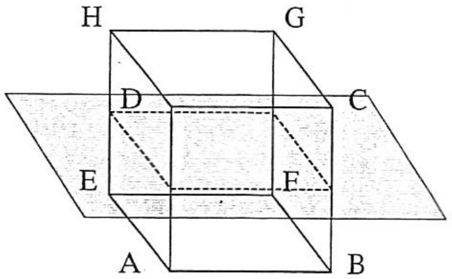
* Gli assi passanti per i punti medi delle coppie di spigoli opposti sono 6. Poichè in ogni spigolo concorrono due facce, vi saranno per ciascuno dei sei assi due rotazioni che trasformano il cubo in se stesso, ma – al solito – una delle due sarà la rotazione banale. Per ogni asse vi sarà quindi 1 sola rotazione "effettiva" di 180°. In totale, le rotazioni "effettive" di questo tipo saranno quindi 6.

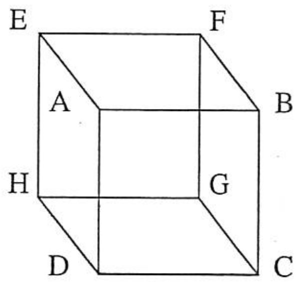
* Gli assi passanti per i centri delle facce sono 3. Poichè ogni faccia ha quattro spigoli, vi saranno per ciascuno dei tre assi quattro rotazioni che trasformano il cubo in se stesso, ma – anche questa volta – una delle quattro sarà la rotazione banale. Per ogni asse vi saranno quindi 3 rotazioni "effettive" , rispettivamente di 90°, 180°, 270°. In totale, le rotazioni "effettive" di questo tipo saranno quindi 9.

Pertanto, come ci si doveva aspettare, le isometrie pari del cubo sono complessivamente:

$$1 + 8 + 6 + 9 = 24.$$

Quanto alle isometrie dispari, ricordo (vedi §18) che non è possibile realizzarle fisicamente con movimenti rigidi. Nel caso del cubo, le sue più semplici isometrie dispari sono le tre simmetrie planari rispetto ai piani che passano per il centro del cubo e sono paralleli ad una delle facce (e di conseguenza paralleli anche alla faccia opposta). In termini meno astratti, in una simmetria planare di questo tipo il cubo si trasforma nella sua immagine speculare. Fissiamo ora la nostra attenzione su una specifica simmetria planare σ, per esempio su quella illustrata in figura. Se vogliamo evitare la fatica di descrivere geometricamente gli altri tipi di isometrie dispari del cubo, possiamo dire semplicemente che le 24 isometrie dispari si possono ottenere tutte, componendo le 24 isometrie pari con la simmetria planare σ (o con qualsiasi altra simmetria planare prescelta).





Osservazione. Grazie alla dualità esistente tra cubo ed ottaedro, è facile tradurre la descrizione operativa delle 48 isometrie del cubo in una descrizione altrettanto operativa delle 48 isometrie dell'ottaedro (regolare).

21.II. Tassellazioni dello spazio mediante poliedri

Si definisce **tassellazione** dello spazio una famiglia di poliedri tale che:

* La loro unione è tutto lo spazio;

** Se l'intersezione di due poliedri della famiglia non è vuota, allora è un vertice, oppure uno spigolo, oppure una faccia;

Una tassellazione si dice **regolare** se tutti i poliedri sono regolari e uguali tra loro.

Questa definizione è molto restrittiva. Infatti:

Teorema 2. *Esiste un'unica tassellazione regolare dello spazio: quella mediante cubi.*

Dimostrazione. Poiché in uno stesso spigolo deve concorrere un numero (finito) di poliedri tutti uguali, la somma delle ampiezze degli angoli diedri tra le facce di tali poliedri dev'essere un angolo giro. Ora, si calcola (esercizio proposto sopra) che nel caso dei cinque poliedri regolari le ampiezze angolari dei rispettivi angoli diedri (espresse in gradi) sono:

Tetraedro $\simeq 70,5°$
Cubo $90°$
Ottaedro $\simeq 109,5°$
Dodecaedro $\simeq 116,6°$
Icosaedro $\simeq 138,2°$

Pertanto solo nel caso dei cubi l'ampiezza angolare è un sottomultiplo di $360°$. Ciò prova l'asserto.

Osservazione. Se si sostituisce la condizione restrittiva che i poliedri siano regolari e uguali tra loro con condizioni più deboli, la varietà delle possibili tassellazioni dello spazio aumenta enormemente. Non potendo entrare qui in ulteriori dettagli mi limito a citare, sempre a proposito delle tassellazioni dello spazio, un importante campo di studi interdisciplinari tra matematica, mineralogia e chimica: quello della geometria delle strutture cristalline (vedi per esempio [KLINE] pp. 896-898, [COXETER] p. 279, [DEDÒ,1999] §8 e §11, [HILBERT-COHN VOSSEN], cap 2).

21.III. La formula di Eulero

Fin dalla scuola media si può far notare (meglio sarebbe far scoprire agli allievi) che per i cinque poliedri regolari sussiste una relazione fra **F** (numero delle facce), **S** (numero degli spigoli) e **V** (numero dei vertici). La relazione si può scrivere in vari modi. Il più naturale è quello che traduce in formule l'osservazione in base alla quale la somma del numero dei vertici e del numero delle facce è in tutti e cinque i casi uguale al numero degli spigoli aumentato di 2. In formule: $\mathbf{F}+\mathbf{V}=\mathbf{S}+2$.

I matematici preferiscono però una scrittura diversa (equivalente alla precedente) detta **formula di Eulero**:

$$(*) \qquad \mathbf{F} - \mathbf{S} + \mathbf{V} = 2.$$

La si può esprimere a parole dicendo che la somma a segni alterni dei tre numeri **F** , **S** , **V** è *costante* (uguale per tutti i poliedri regolari), dove la costante è il numero 2.

Il fatto stesso che alla formula sia associato il nome di uno dei più celebri matematici di tutti i tempi fa pensare che essa abbia una validità più generale, non limitata a soli cinque casi dove la sua correttezza può essere verificata con un semplice calcolo diretto perfino da ragazzi all'inizio della scuola media. Pertanto, quando nelle scuole superiori si affronta uno studio più sistematico dei poliedri viene naturale chiedersi se la relazione (*) abbia validità generale, o se almeno possa essere estesa a certi tipi di poliedri non regolari. E in effetti la risposta è affermativa. Ecco un primo risultato:

Teorema 3. *La formula di Eulero* $\mathbf{F} - \mathbf{S} + \mathbf{V} = 2$ *sussiste per tutti i poliedri convessi.*

Ed ecco una traccia della dimostrazione. La strategia consiste nel ricondurre le tassellazioni delle superfici poliedrali al caso, già considerato nel precedente §20.III, delle tassellazioni di poligoni semplici del piano mediante altri poligoni semplici. Poiché non è possibile proiettare biunivocamente l'intera superficie di un poliedro su un piano conviene ricorrere allo stratagemma di "togliere" una faccia dalla superficie del poliedro e di proiettare biunivocamente le rimanenti facce su un opportuno poligono di un piano π da un opportuno punto dello spazio. Fissiamo dunque la nostra attenzione su una faccia Φ del poliedro (quella che intendiamo "togliere") e scegliamo come piano π un piano parallelo al piano della faccia eliminata, situato nel semispazio che contiene il poliedro. Scegliamo poi nell'altro semispazio un punto V "sufficientemente vicino" alla faccia eliminata Φ in modo tale che le semirette uscenti da V proiettino biunivocamente tutti i punti delle rimanenti facce del poliedro su una porzione limitata del piano π. In termini intuitivi, immaginiamo di illuminare l'interno del poliedro con una lampadina posta in V, e interpretiamo le ombre proiettate sul piano π dagli spigoli del poliedro come spigoli di una tassellazione poligonale piana, che viene quindi ad avere come suo bordo esterno l'immagine del bordo della faccia tolta. Le lunghezze degli spigoli e le forme delle facce di questa nuova tassellazione saranno diverse da quelle degli spigoli e delle facce del poliedro dal quale abbiamo tolto la faccia Φ, ma i numeri di vertici, spigoli e facce saranno gli stessi per il poliedro con la faccia "tolta" e per la tassellazione piana. Indichiamo questi tre numeri con $\mathbf{F}^0, \mathbf{S}^0, \mathbf{V}^0$. Dal lemma del §20.III sappiamo che $\mathbf{F}^0 - \mathbf{S}^0 + \mathbf{V}^0 = 1$. Ma per computare correttamente i vertici $\mathbf{V}$, gli spigoli $\mathbf{S}$ e le facce $\mathbf{F}$ del poliedro completo dobbiamo tenere conto anche del contributo dovuto alla faccia eliminata: si constata che $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0$ e $\mathbf{S} = \mathbf{S}^0$, mentre $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + 1$. Infatti, nonostante la soppressione della faccia Φ tutti i suoi vertici e spigoli erano già presenti nel computo di $\mathbf{V}^0$ e di $\mathbf{S}^0$. La faccia soppressa non era invece entrata nel computo di $\mathbf{F}^0$. Quindi per passare da $\mathbf{F}^0$ ad $\mathbf{F}$ occorre aumentare $\mathbf{F}^0$ di un'unità. In definitiva:

$$\mathbf{F} - \mathbf{S} + \mathbf{V} = \mathbf{F}^0 - \mathbf{S}^0 + \mathbf{V}^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

come affermato nell'enunciato del teorema.

Osservazioni

1. Nonostante la sua semplicità, questa dimostrazione lascia ancora in sospeso vari punti. Ne cito tre:

* Nella procedura descritta nel lemma del §20.III non è contemplato il caso che all'ultimo passo della riduzione del numero dei triangoli si vengano ad avere *due* triangoli senza vertici in comune. È possibile escludere tale eventualità? (Vedi nota (56) a p. 638 di [COURANT–ROBBINS]).

* Nella stessa procedura si considerano solo due operazioni fondamentali di riduzione del numero dei triangoli, e non una terza: che ad un certo punto compaia un triangolo avente soltanto un vertice in comune con gli altri triangoli. È possibile che questa situazione si presenti? E in tal caso come andrebbe completata la dimostrazione del lemma? (Vedi nota (57) a p. 638 di [COURANT–ROBBINS]).

* Nella dimostrazione del teorema, la proiezione della superficie del poliedro privata di una sua faccia su una tassellazione del piano π, è stata descritta in termini fisici intuitivi. Come si può essere certi dell'esistenza di un centro di proiezione V che goda delle proprietà richieste?

2. Il teorema 3 si estende senza eccessive difficoltà al caso dei poliedri semplici (non necessariamente convessi), vedi per esempio [COURANT–ROBBINS] cap. 5, §2.

Ma cosa si può dire a proposito di un poliedro generico (il termine "poliedro" essendo inteso in una qualsiasi delle accezioni elencate all'inizio di questo paragrafo nelle proposte 1, 2, 3 ? Il lettore provi a calcolare la somma a segni alterni $\chi = \mathbf{F} - \mathbf{S} + \mathbf{V}$ per tutte le superfici poliedrali raffigurate all'inizio del paragrafo. Troverà che nei casi "atipici" il valore numerico di χ può essere diverso da 2.

Nell'effettuare questo computo qualche lettore potrà forse avere una perplessità nel caso del poliedro (g), visto che due delle sue facce, essendo "bucate", non sono poligoni *semplici*. Provi dunque a spezzare ciascuna delle facce "bucate" nell'unione di quattro poligoni semplici. Osserverà che il valore numerico del χ calcolato senza la suddivisione delle facce "bucate" in facce "semplici" è diverso dal χ calcolato dopo la suddivisione. In casi analoghi, proceda sempre con la suddivisione di eventuali facce poligonali "non semplici" in poligoni "semplici" prima di calcolare χ.

Non entro in ulteriori dettagli e mi limito ad enunciare il risultato conclusivo al quale si perviene:

Teorema 4 (di Eulero). *Dato un poliedro (inteso nel senso della proposta 3 riportata nella prima parte di questo paragrafo) il valore numerico di χ dipende unicamente dal numero p dei "buchi" del poliedro, e non da altri aspetti. Precisamente risulta:*

$$\chi = \mathbf{F} - \mathbf{S} + \mathbf{V} = 2 - 2p$$

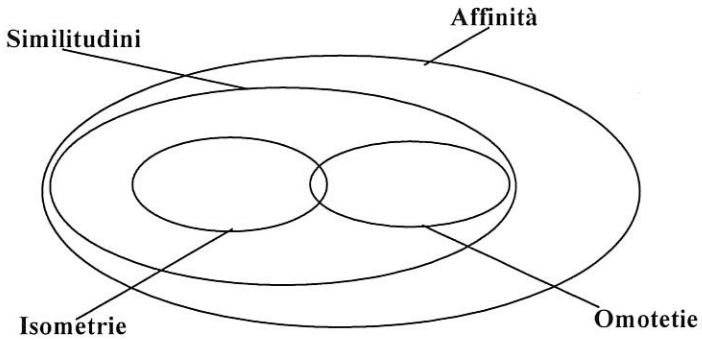
dove p sta a denotare il numero dei "buchi" del poliedro.

Per la dimostrazione e per ulteriori approfondimenti rinvio a [COURANT, ROBBINS], cap 5, §1 e 4, [DEDÒ, 1999] cap 10, [HILBERT–COHN VOSSEN], cap. 6, §44.

L'espressione $\chi = 2 - 2p$ viene detta **caratteristica di Eulero** del poliedro.

Come si individuano e si qualificano le trasformazioni nel piano

Il diagramma seguente dovrebbe mostrare le relazioni che intercorrono tra le trasformazioni del piano:



L'AFFINITA' è la classe più generale delle trasformazioni lineari nel piano l'equazione generale sarà:

(1) $A=\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = dx + ey + f \end{cases}$

Proprietà:

- **Conserva il parallelismo** ovvero trasforma rette parallele in rette parallele (es. rettangoli in parallegrammi)
- Trasforma poligoni di n lati in poligoni di n lati
- Trasforma circonferenze in ellissi
- Delta= $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db \neq 0$ altrimenti non è una trasformazione
- Delta>0 Affinità DIRETTA (Conserva l'ordine dei vertici della figura origine-trasformata).
- Delta<0 Affinità INVERSA (Cambia l'ordine dei vertici della figura trasformata).
- $D = |Delta| = |ae - db| = \dfrac{S(F1)}{S(F)}$, ovvero il valore assoluto di Delta $|ae - db|$ è un numero che rappresenta il rapporto tra le aree di figure corrispondenti. S(F1) è la superficie della figura F1 trasformata di F ed S(F) e la superficie della figura origine F ovvero F1=A(F).

Le SIMILITUDINI sono un sottinsieme delle AFFINITA' nel piano, l'equazione generale di una similitudine è

$$S_1 = \begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + f \end{cases} \quad o\ anche \quad S_2 = \begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = bx - ay + f \end{cases}$$

Proprietà:

- **Conserva parallelismo, ampiezza degli angoli e rapporto tra le lunghezze dei lati.**
- Trasforma poligoni di n lati in poligoni Simili di n lati
- Trasforma circonferenze in circonferenze
- **Notare la simmetria dei coefficienti a e b.**
- Delta= $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0 \quad \textit{Similitudine DIRETTA}$

- Delta= $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 < 0$ *Similitudine INVERSA*
- $D = |Delta| = a^2 + b^2 = \dfrac{S(F1)}{S(F)}$,
- $D = |Delta| = |-a^2 - b^2| = \dfrac{S(F1)}{S(F)}$, rapporto tra aree corrispondenti
- K= $\sqrt{D} = \sqrt{a^2 + b^2}$ Rapporto della similitudine diretta, o rapporto tra lati corrispondenti
- K= $\sqrt{D} = \sqrt{|-a^2 - b^2|}$ Rapporto della similitudine inversa, o rapporto tra lati corrispondenti

Le OMOTETIE sono sottinsieme delle Similitudini ma sono trasformazioni DIRETTE, l'equazione generale di una omotetia e

$$O_1 = \begin{cases} X = kx + c \\ Y = ky + f \end{cases} \quad o\ anche \quad O_2 = \begin{cases} X = -kx + c \\ Y = -ky + f \end{cases}$$

Come per le similitudini si avrà che

- **Conserva parallelismo, ampiezza degli angoli e rapporto tra le lunghezze dei lati.**
- **Ha sempre un punto unito che è il suo centro C** $\left(\dfrac{c}{1-k}; \dfrac{d}{1-k} \right)$
- **Notare la simmetria dei coefficienti a=k e b=0 come per le similitudini**
- Delta= $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = k^2 > 0$ *sempre DIRETTA*
- $D = |Delta| = k^2 = \dfrac{S(F1)}{S(F)}$, rapporto tra aree corrispondenti
- K= $\sqrt{D} = \sqrt{k^2}$ Rapporto di omotetia o rapporto tra lati corrispondenti

Le ISOMETRIE sono un sottinsieme delle Similitudini nel piano, l'equazione generale di una isometria è

$$I_1 = \begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + f \end{cases} \quad o\ anche \quad I_2 = \begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = bx - ay + f \end{cases}$$

Proprietà:

- **Conserva lunghezza dei lati e ampiezza degli angoli.**
- **Notare la simmetria dei coefficienti a e b**
- Delta= $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1 > 0$ *DIRETTA*
- Delta= $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 = -1 < 0$ *INVERSA*
- $D = |Delta| = k^2 = \dfrac{S(F1)}{S(F)} = 1$, le figure sono congruenti e hanno la stessa area

- In particolare le **TRASLAZIONI** di vettore (c, f) ha equazione

$$T_{(c,f)} = \begin{cases} X = x + c \\ Y = y + f \end{cases}$$

Delta $S_{(x=a)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ isometria sempre Diretta

- In particolare una **ROTAZIONE** di centro (xc, yc) e angolo α ha equazioni:

$$R_A = \begin{Bmatrix} X = x\cos(\alpha) - ysen(\alpha) + c \\ Y = xsen(\alpha) + y\cos(\alpha) + d \end{Bmatrix}$$

$c = x_c(1-\cos\alpha) + y_c sen\alpha$
$d = y_c(1-\cos\alpha) - x_c sen\alpha$

o inversamente

$$x_c = \frac{c - dsen\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$$
$$y_c = \frac{c + dsen\alpha}{2sen\alpha}$$

Delta$= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 > 0$

isometria sempre DIRETTA e rotazione antioraria se $\alpha > 0$

- In particolare le **SIMMETRIE ORTOGONALI** di assi x=a o y=b saranno

$$S_{o(x=a)} = \begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = y \end{cases} \quad \text{o anche} \quad S_{o(y=b)} = \begin{cases} X = x \\ Y = -y + 2b \end{cases}$$

Delta $S_{(x=a)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Delta $S_{(y=b)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$ Sempre Isometrie Inverse

- In particolare le **SIMMETRIE CENTRALI** di centro (a,b) saranno

$$S_{c(a,b)} = \begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = -y + 2b \end{cases}$$

Delta $S_{(y=b)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ Sempre Isometrie Dirette