TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in D

D insieme connesso per archi.

Se $\exists\ (x_1,y_1) \in D,\ (x_2,y_2) \in D$ t.c.

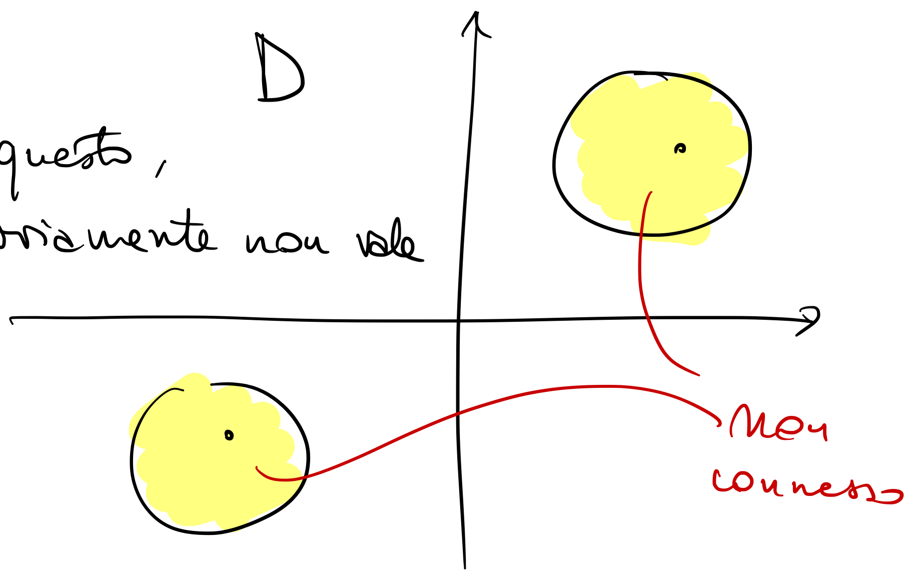
$$f(x_1,y_1) < 0 < f(x_2,y_2)$$

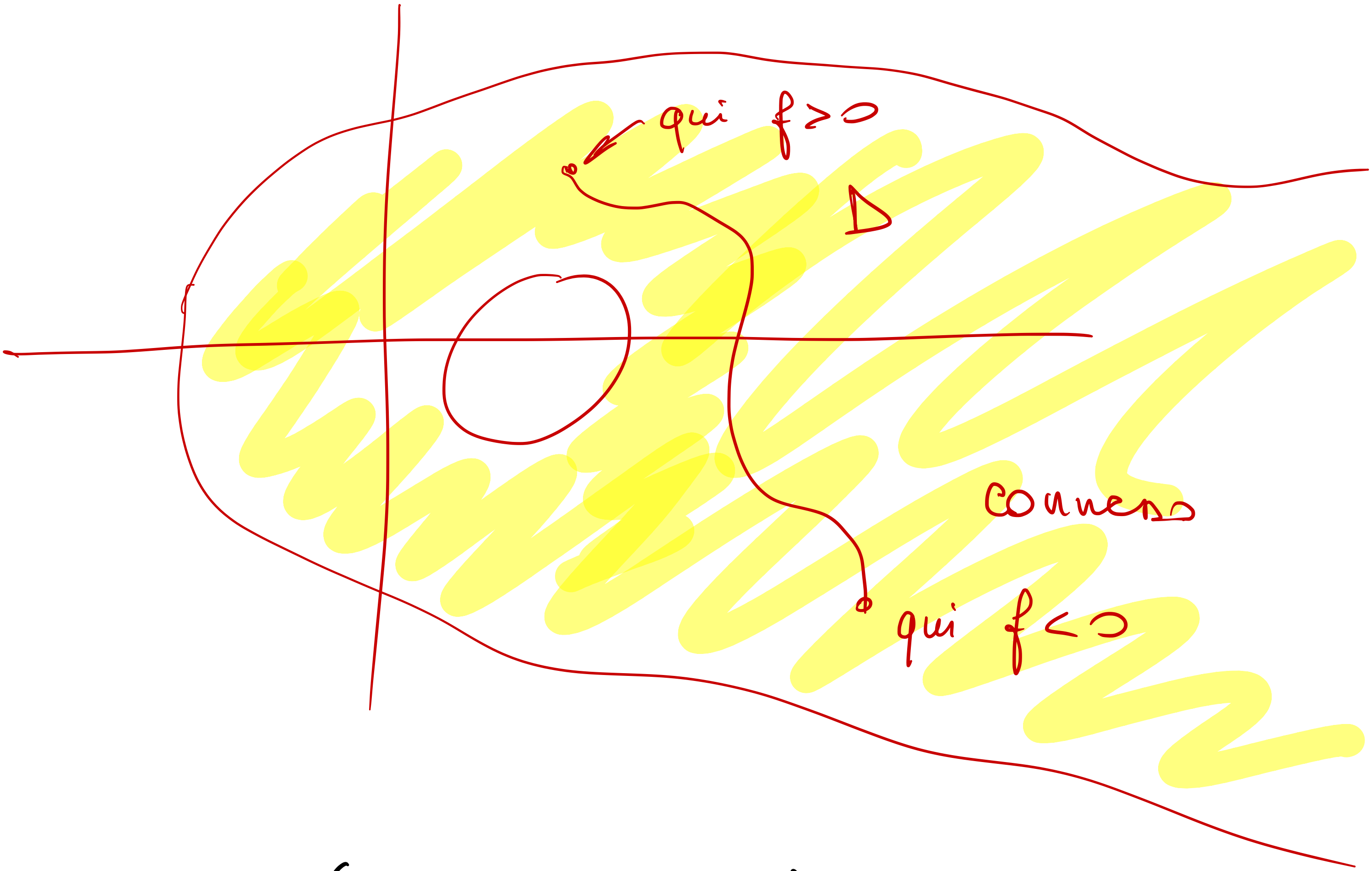
Allora $\exists$ (almeno) $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ t.c.

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 0.$$

DEF $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice connesso per archi se, comunque presi due punti di D, posso collegarli con una curva tutta contenuta in D.

OSS se D è questo,
il teorema ovviamente non vale





COROLLARIO (Valori intermedi)

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

D insieme connesso per archi.

Allora f assume tutti i valori compresi tra

$$\inf_{(x,y)\in D} f(x,y) \quad e \quad \sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$$

Dim Sia λ t.c.

$$\inf_D f(x,y) < \lambda < \sup_D f(x,y)$$

Per def. di sup $\exists \ (x_1,y_1)\in D$ t.c. $f(x_1,y_1) > \lambda$

" " inf $\exists \ (x_2,y_2)\in D$ t.c. $f(x_2,y_2) < \lambda$.

Considero $g(x,y) = f(x,y) - \lambda$ continua in D.

$$g(x_1,y_1) = f(x_1,y_1) - \lambda > 0$$
$$g(x_2,y_2) = f(x_2,y_2) - \lambda < 0$$

$$\overset{\text{Thm}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, (\bar{x},\bar{y}) \in D \ \text{ t.c. } \ g(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda$$

Esempio: $f(x,y) = x^4 - xy - 5y^{12} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua

$\mathbb{R}^2$ connesso.

$$\boxed{\sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty}$$

in quanto sull'asse x $(y=0)$

$$f(x,0) = x^4 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$$

in quanto sull'asse y $(x=0)$

$$f(0,y) = -5y^{12} \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$$

$\to$ f assume tutti i valori compresi tra $+\infty$ e $-\infty$.

Derivate parziali

Esempio: $f(x,y) = x^3y^2 - \sin(xy) + y^2$.

Se "congelo" la y e faccio variare la x, posso provare a derivare rispetto a x, ottenendo la "derivata parziale" rispetto alla x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - y\cos(xy)$$

e analogamente rispetto alla y.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - x\cos(xy) + 2y$$

Definizione precisa di derivata parziale.

In 1 variabile $\quad \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

DEF sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

D aperto, sia $(x_0,y_0) \in D$.

$\Rightarrow$ $\exists$ un intorno circolare di (x_0,y_0) tutto contenuto in D.

Diremo che f è derivabile parzialmente rispetto a x nel pto (x_0,y_0) se esiste finito

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} =$$

$$= \quad g'(x_0) \qquad \text{dove} \qquad g(x) = f(x, y_0)$$

fissato

OSS

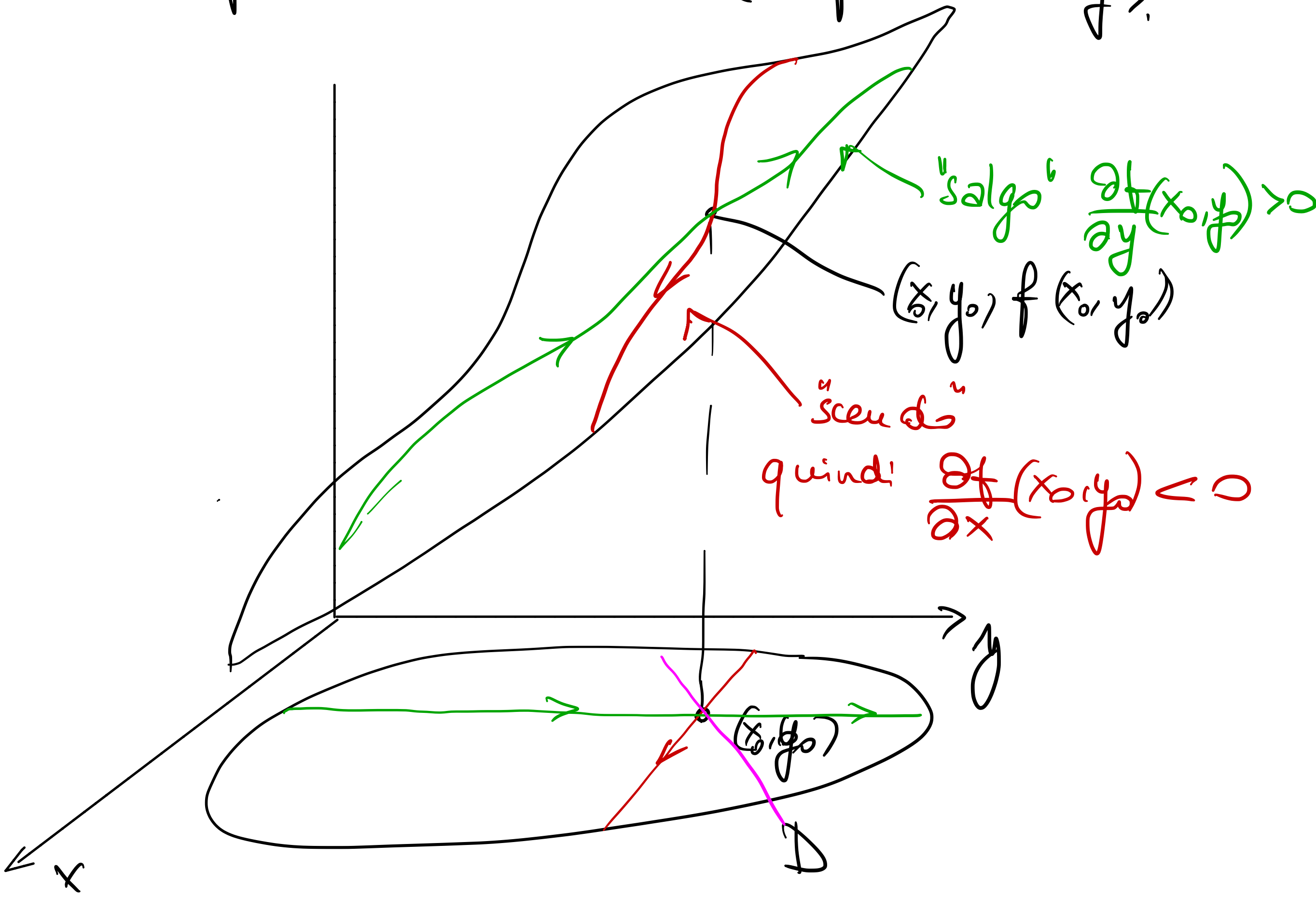
$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h} = g'(y_0)$$

dove $g(y) = f(x_0,y)$

Significato geometrico: "tasso" di crescita della $f(x,y)$ quando da (x_0,y_0) mi muovo nella direzione positiva delle x (risp. delle y).



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = \cancel{f'_x(x_0,y_0)}$$

Calcolare le derivate parziali di

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)|$$

dom $f = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\cancel{2}x_0}{\cancel{2}\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \quad \text{se } (x_0,y_0) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \quad \text{se} \quad (x_0,y_0) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - \cancel{f(0,0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists$$

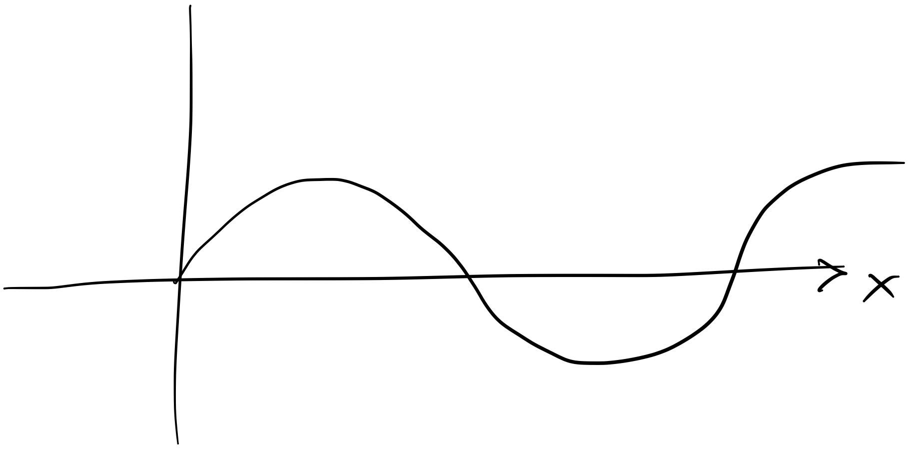
in quanto $\displaystyle\lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h|}{h} = \pm 1$

e nemmeno $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste

f non ammette derivate parziali nell'origine

OSS se $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ allora il suo grafico è di rotazione intorno all'asse z.

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$



sen x

Il vettore delle derivate parziali in un punto si dice <u>gradiente</u> di f nel punto stesso.

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right)$$

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f: D \to \mathbb{R}$

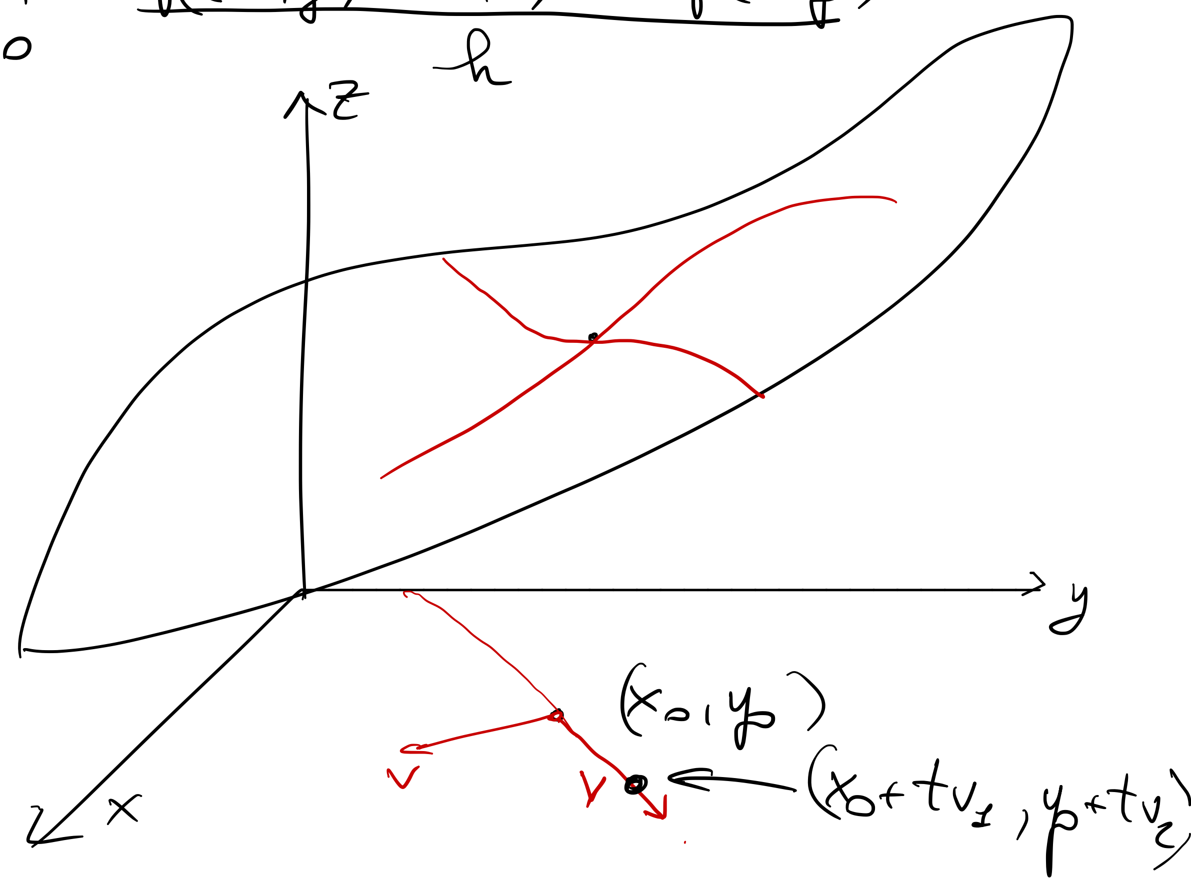
$(x_0, y_0) \in D$.

Sia $\underline{v} = (v_1, v_2)$ una <u>direzione</u>, cioè un vettore di modulo 1., $\underbrace{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}_{= |\underline{v}|} = 1$

Si definisce <u>derivata direzionale</u> di f nel pto (x_0, y_0) lungo la direzione $\underline{v}$ il seguente limite (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v_1, y_0 + h v_2) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \underline{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$$



<u>OSS</u> le derivate parziali sono le derivate direzionali corrispondenti a $\underline{v} = (1, 0)$ (per la deriv. parziale nella x oppure $\underline{v} = (0, 1)$

$\underline{v} = (1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

In generale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = g'(0) \quad , \text{dove}$$

$$g(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$$

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v_1, y_0 + h v_2) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

Esempio: Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$, dove $\underline{v}$ è la direzione individuata da $(-3,4)$

e $f(x,y) = xy^2$. $(x_0, y_0) = (1,2)$

$$\underline{v} = \frac{(-3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

1° modo:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+h\left(-\frac{3}{5}\right), 2+h\frac{4}{5}\right) - f(1,2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1-\frac{3}{5}h\right)\left(2+\frac{4}{5}h\right)^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1-\frac{3}{5}h\right)\left(4+\frac{16}{5}h+\frac{16}{25}h^2\right) - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{12}{5}h + \frac{16}{5}h + ch^2 + dh^3}{h} = \frac{4}{5}$$

2° modo (meglio)

$$g(t) = f\left(1+t\left(-\frac{3}{5}\right), 2+t\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{3}{5}t\right)\left(2+\frac{4}{5}t\right)^2 =$$

$$= \left(1-\frac{3}{5}t\right)\left(4+\frac{16}{5}t+\frac{16}{25}t^2\right) =$$

$$= 4 + \frac{4}{5}t + ct^2 + dt^3$$

$$g(t) = 4 + \frac{4}{5}t + ct^2 + dt^3$$

$$g'(t) = \frac{4}{5} + 2ct + 3dt^2$$

$$g'(0) = \frac{4}{5}$$

<u>3° modo</u> (da giustificare:) $\qquad f(x,y) = xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \underline{v} = (4,4)\cdot\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$$

$$\nabla f(1,2) = (4,4)$$