ISTITUZIONI DI MATEMATICA II
FOGLIO N. 4 DI ESERCIZI

A. Dall'Aglio, F. De Marchis 20.4.2018.

Studiare l'insieme di definizione in $\mathbb{R}^2$ delle seguenti funzioni, disegnarlo e dire se si tratta di un insieme aperto, chiuso, limitato. Trovare la frontiera del dominio.

1. $f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y)$

2. $f(x,y) = \sqrt{xy-1}\,\log(5-2x-2y)$

3. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{4-x^2-y^2}}$

4. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$

5. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\log(1-x^2-y^2)}$

6. $f(x,y) = \log(x(x+2y))$

7. $f(x,y) = \log x + \log(x+2y)$

<u>OSS</u>. Le ultime due funzioni sono uguali? E i loro domini?

8. $f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$

9. $f(x,y) = \log(x\log(y-x))$

10. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(x+y)}{\sqrt[3]{9x^2+9y^2-1}}$

11. $f(x,y) = \sqrt{\cos x \ \operatorname{sen} y}$

12. $f(x,y) = \sqrt[4]{\cos(\pi(x-y))}$

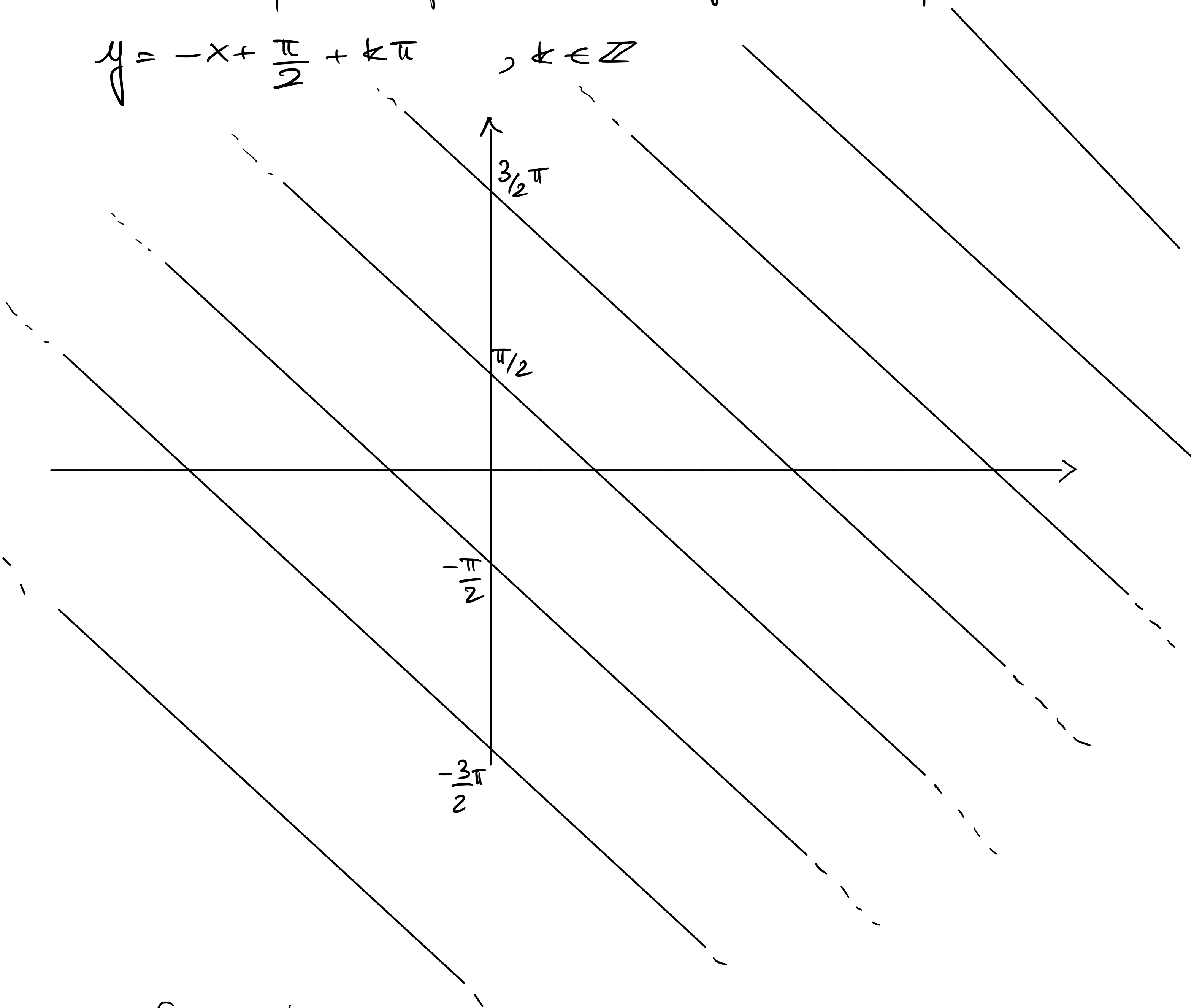
1. $f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y)$

Deve essere $x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Quindi $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

cioè $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$ privato delle infinite rette parallele

$y = -x + \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



dom f è il piano privato delle rette disegnate.

dom f è aperto, non chiuso, non limitato.

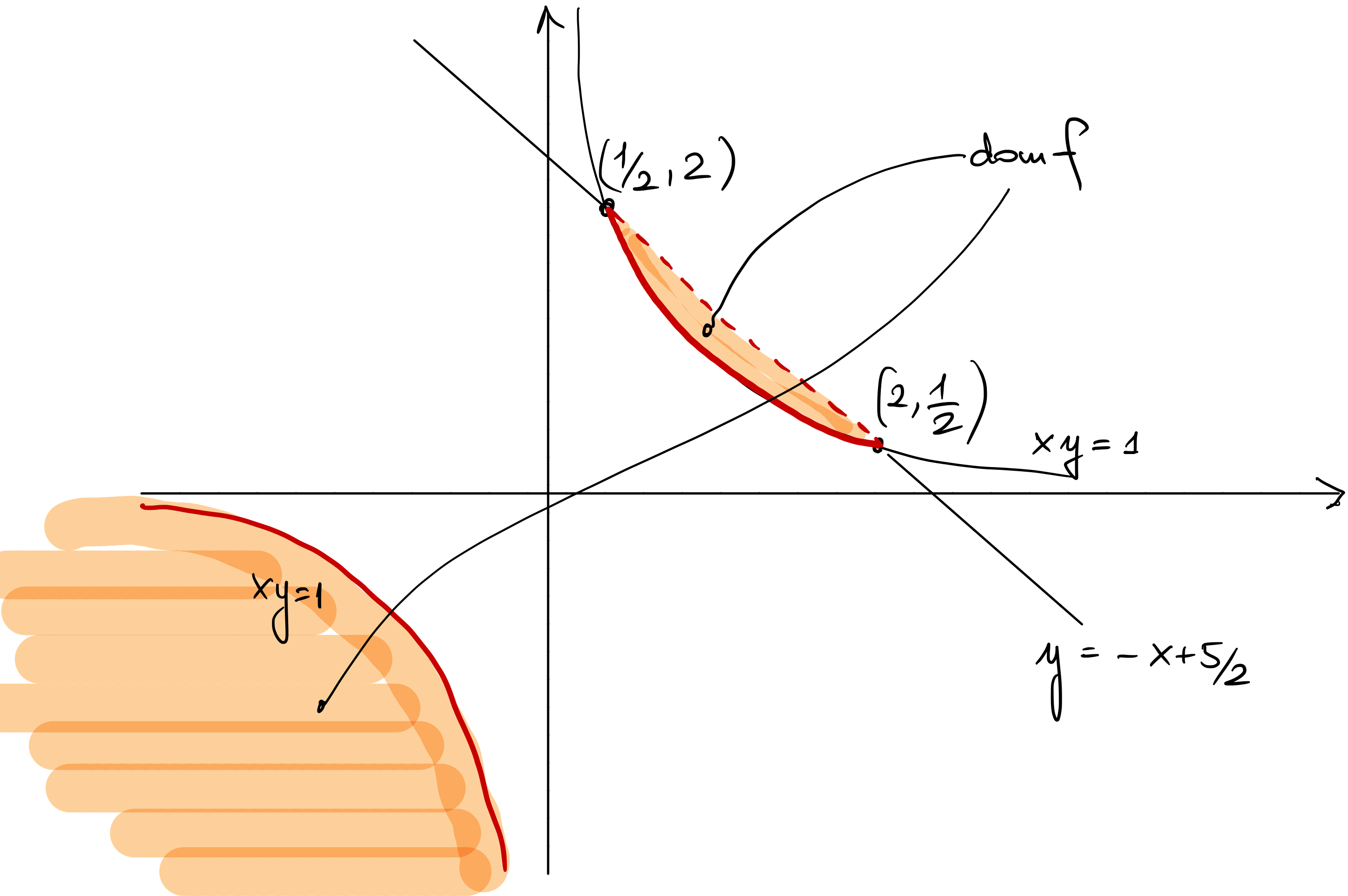
$\partial(\operatorname{dom} f)$ è dato dalle rette disegnate.

2. $f(x,y) = \sqrt{xy-1}\,\log(5-2x-2y)$

$\mathrm{dom}\, f = \{(x,y) : \ xy \geq 1, \quad 5-2x-2y > 0\} =$

$= \{(x,y) : \ \frac{1}{2} < x < 2, \quad \frac{1}{x} \leq y < \frac{5}{2} - x\} \cup$

$\cup \{(x,y) : \ x < 0, \quad y \leq 1/x\}$



dom f è non chiuso, non aperto, non limitato.

$\partial(\mathrm{dom}\, f)$ è il "bordo" della parte colorata

$\partial(\mathrm{dom}\, f) = \{(x,y) : \ \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \quad y = \frac{1}{x}\} \cup$

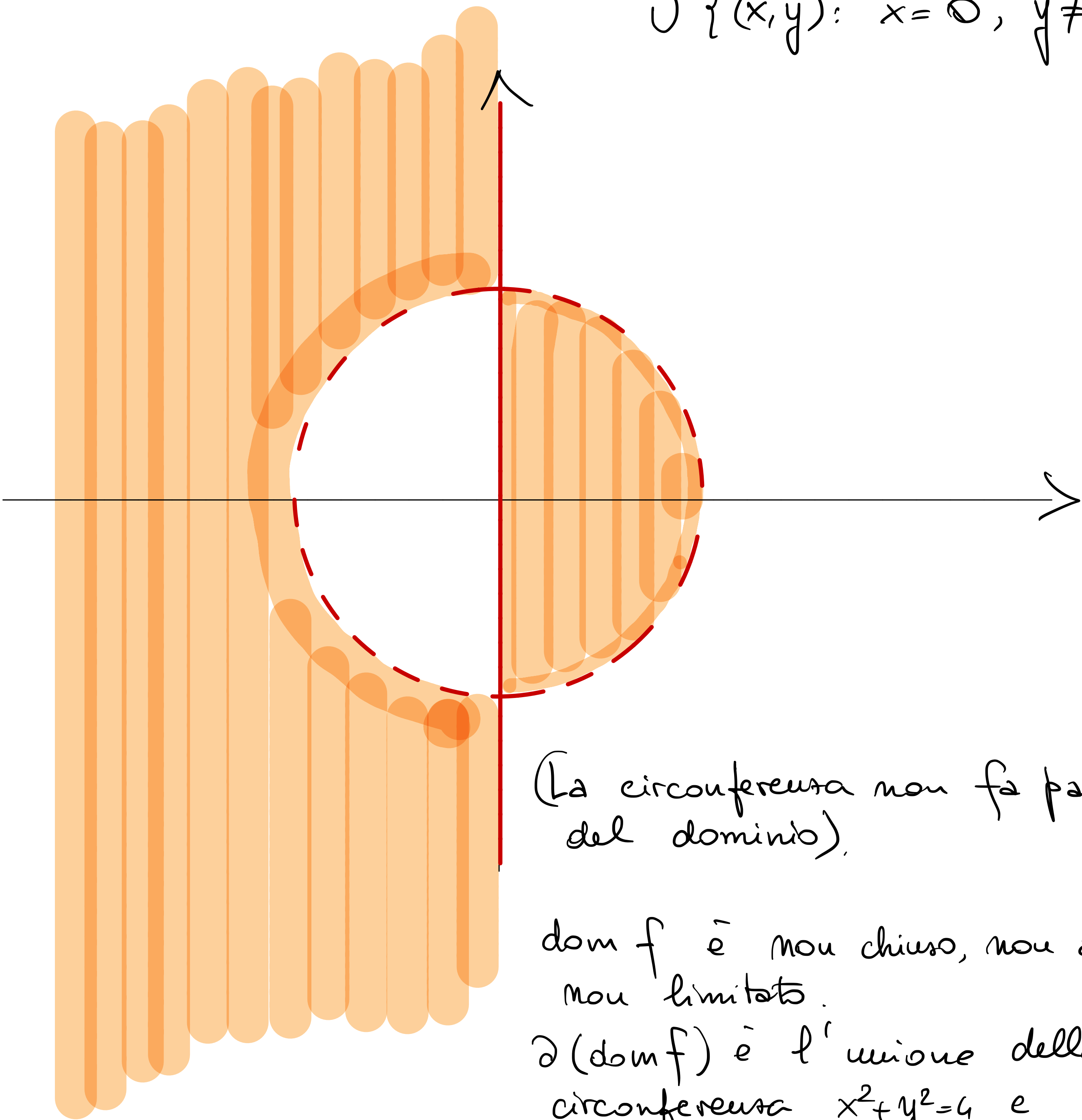
$\cup \{(x,y) : \frac{1}{2} < x < 2, \quad y = -x + \frac{5}{2}\} \cup$

$\cup \{(x,y) : \quad x < 0, \quad y = \frac{1}{x}\}$

3. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{4-x^2-y^2}}$

$$\operatorname{dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{4-x^2-y^2} \geq 0 \right\} =$$

$$= \{(x,y) : x > 0,\ x^2+y^2 < 4\} \cup \{(x,y) : x < 0,\ x^2+y^2 > 4\} \cup$$
$$\cup \{(x,y) : x = 0,\ y \neq \pm 2\}$$



(La circonferenza non fa parte del dominio).

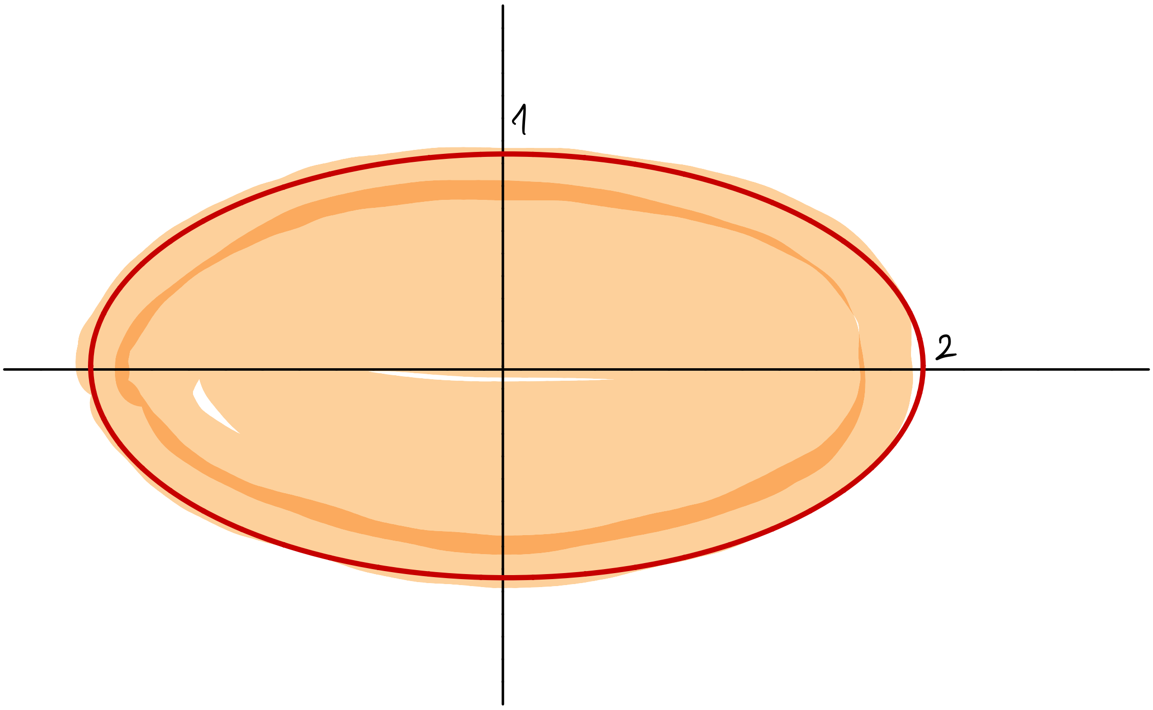
dom f è non chiuso, non aperto, non limitato.

$\partial(\operatorname{dom} f)$ è l'unione della circonferenza $x^2+y^2=4$ e dell'asse y.

4. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

$\text{dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

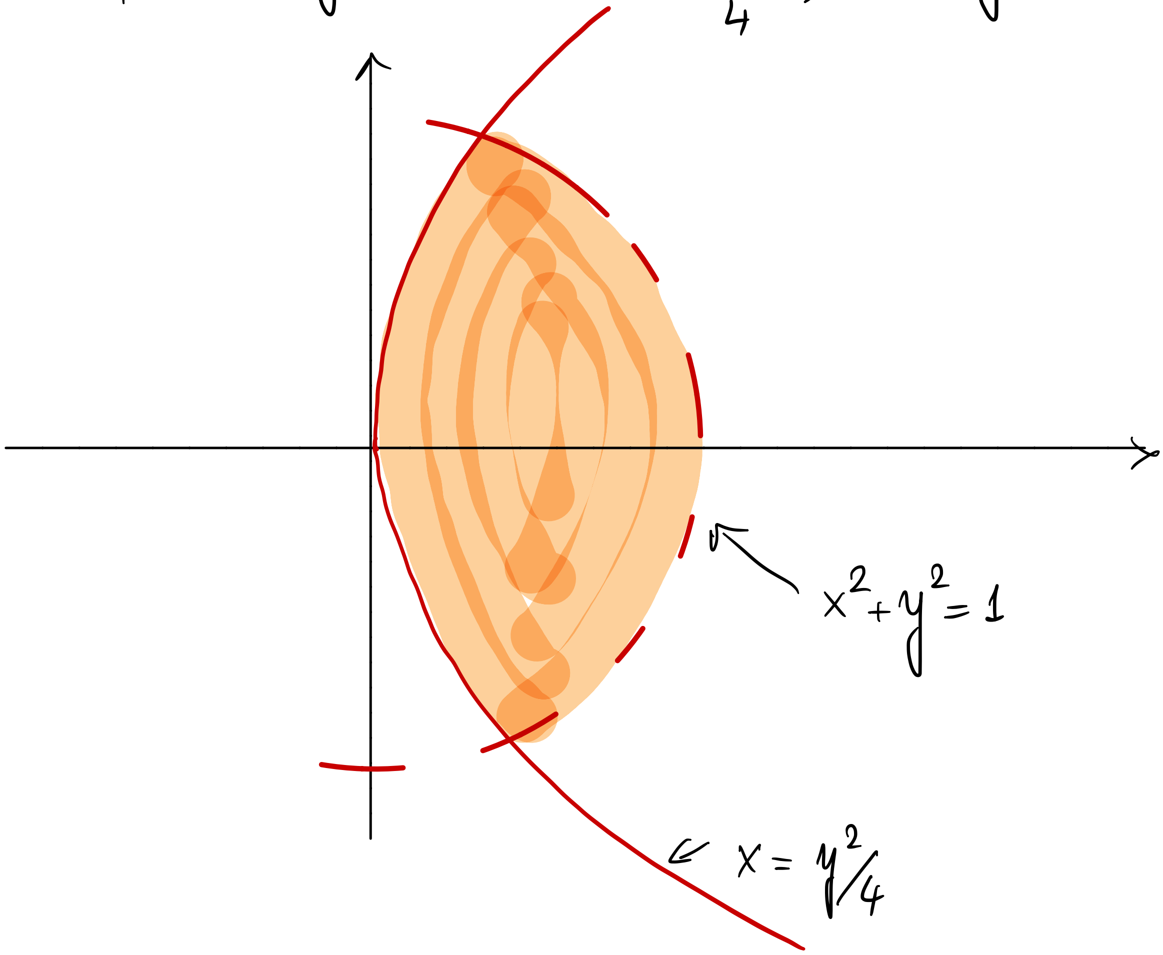
Si tratta di un'ellisse "piena".



Si tratta di un insieme chiuso, non aperto, limitato.
La sua frontiera è data dall'ellisse (solo la curva).

5. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\log(1 - x^2 - y^2)}$

$\mathrm{dom}\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq \frac{y^2}{4}, \ \ x^2 + y^2 < 1 \}$



(la circonferenza è esclusa, l'arco di parabola no).

dom f è non aperto né chiuso; limitato.

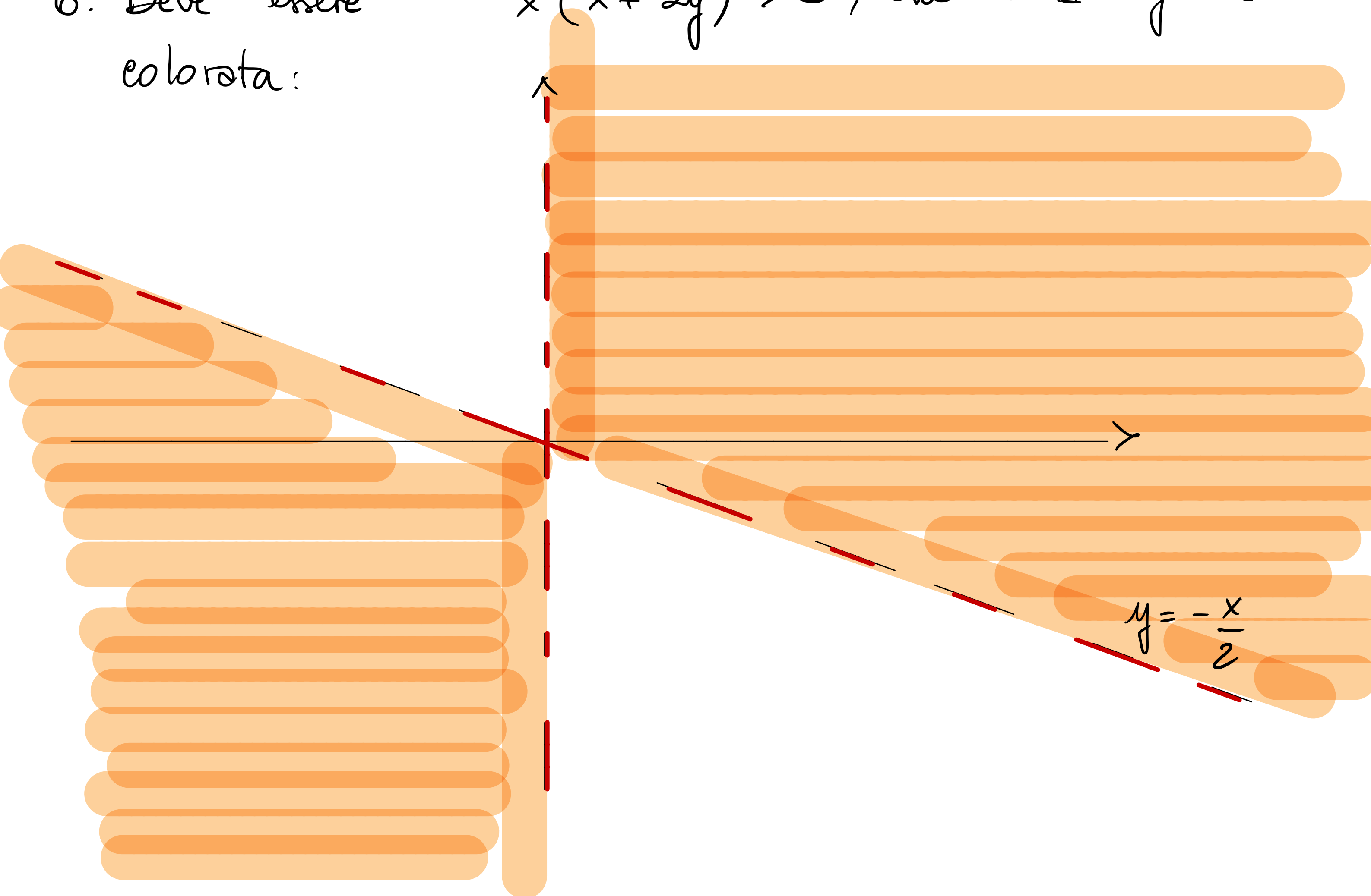
la frontiera è data dall'arco di parabola e dall'arco di circonferenza che delimitano dom f.

6. $f(x,y) = \log(x(x+2y))$

7. $f(x,y) = \log x + \log(x+2y)$

Oss. Le ultime due funzioni sono uguali? E i loro domini?

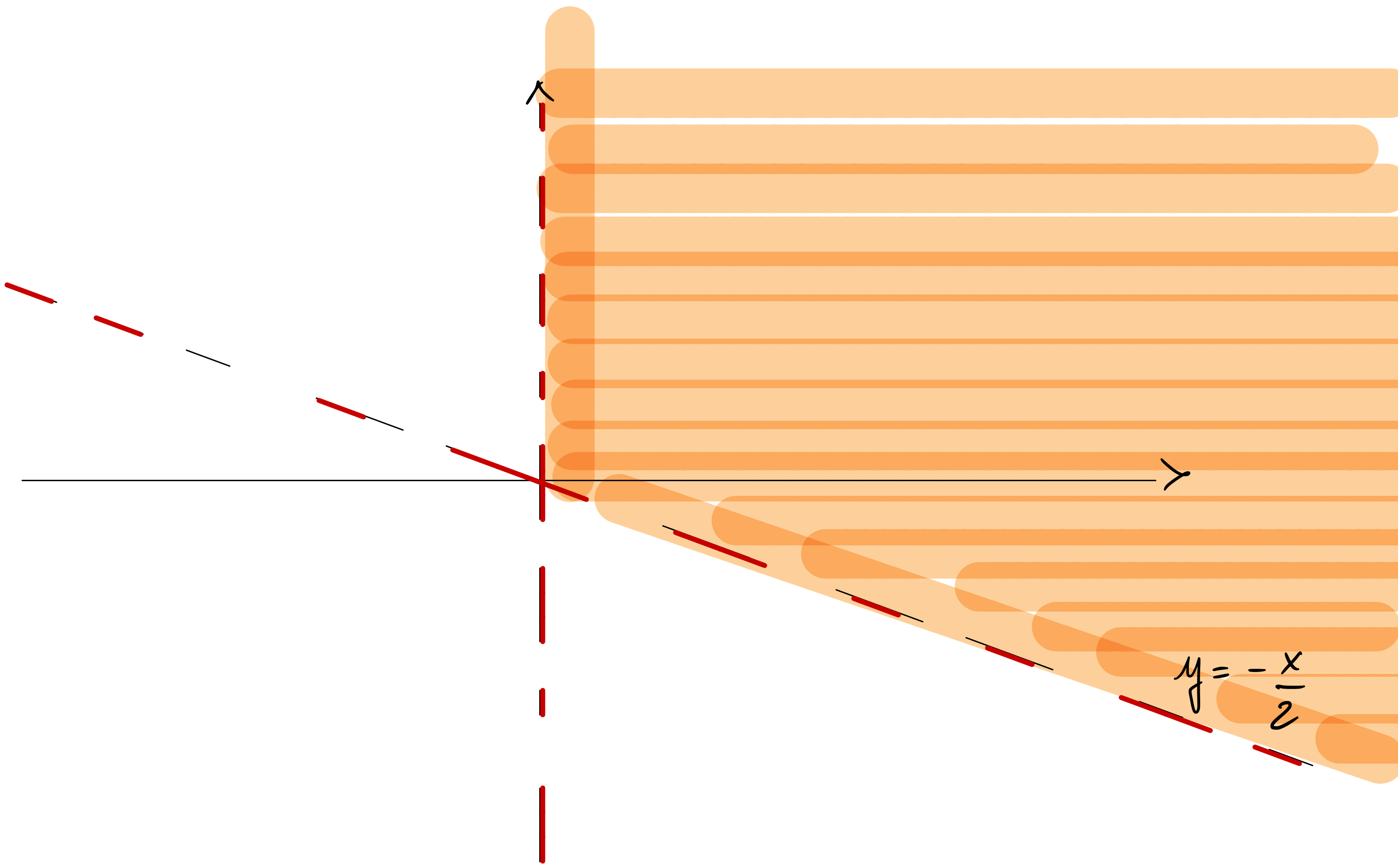
6. Deve essere $x(x+2y) > 0$, che è la regione colorata:



dom f è un insieme aperto, non chiuso, non limitato.

$\partial(\text{dom} f)$ è l'unione delle due rette $x=0$, $y=-\frac{x}{2}$.

7. $\operatorname{dom} f = \{(x,y) : x>0,\ x+2y>0\}$



Anche in questo caso, dom f è aperto, non chiuso, non limitato.

$\partial(\operatorname{dom} f)$ è dato dall'unione delle due semirette

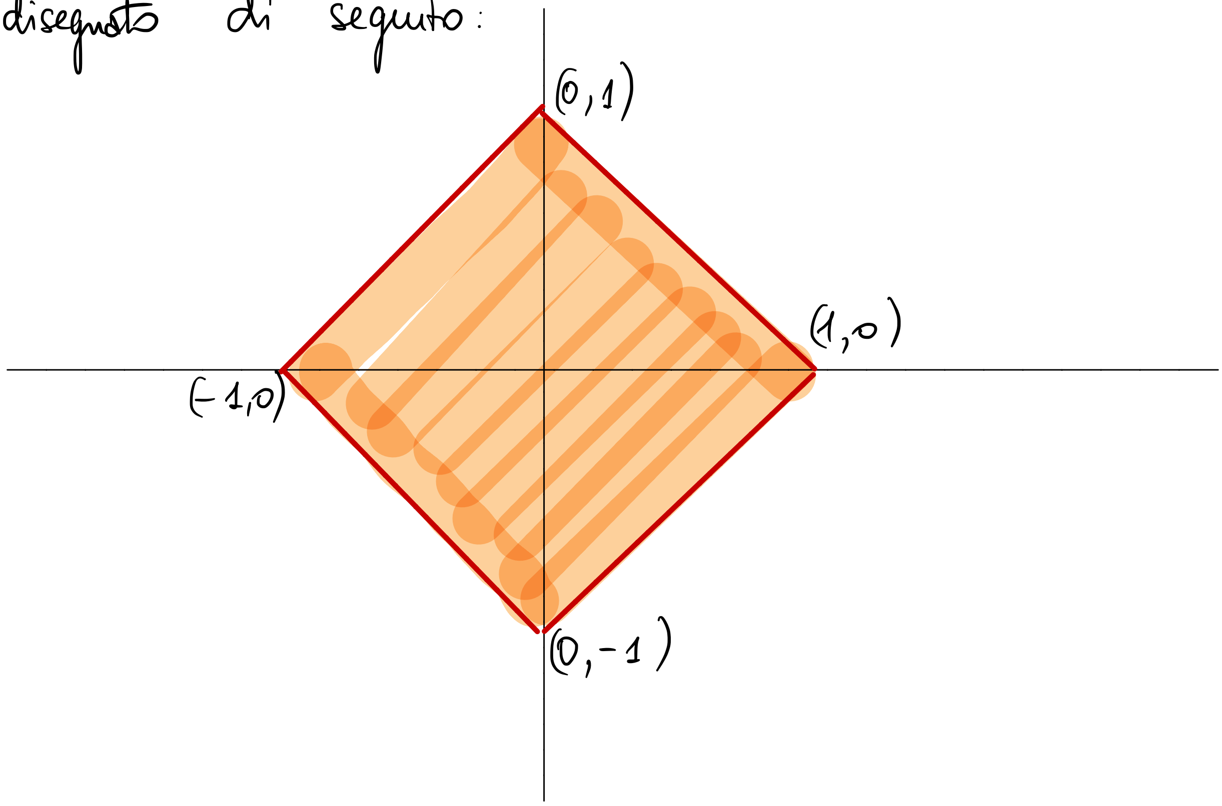
$$\{(x,y) : x=0,\ y\geq 0\} \text{ e } \{(x,y) : x\geq 0,\ y = -\frac{x}{2}\}$$

<u>OSS</u> Le due funzioni (6) e (7) hanno domini diversi, quindi <u>sono funzioni diverse</u>. Tuttavia, ove sono definite entrambe, cioè nel dominio di (7), le due funzioni coincidono, per le note proprietà dei logaritmi.

8. $f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$

$\text{dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1-|x|-|y| \geq 0\}$

Poiché la funzione $g(x,y) = 1-|x|-|y|$ è pari sia rispetto alla x che rispetto alla y, ne segue che dom f è una regione simmetrica sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y. Basta quindi studiarla per $x \geq 0$, $y \geq 0$ (1° quadrante). Qui posso togliere i valori assoluti, e si ottiene
$(x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge 1-x-y \geq 0$, che è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
Tenuto conto delle simmetrie, il dom f è il quadrato "pieno" disegnato di seguito:



Quindi $\text{dom } f = \{(x,y) : -1 \leq x < 0, \ -1-x \leq y \leq 1+x\} \cup$

$\cup \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \ x-1 \leq y \leq 1-x\}$

dom f è chiuso, non aperto, limitato.

La sua frontiera è il quadrato "vuoto" disegnato dal tratto rosso.

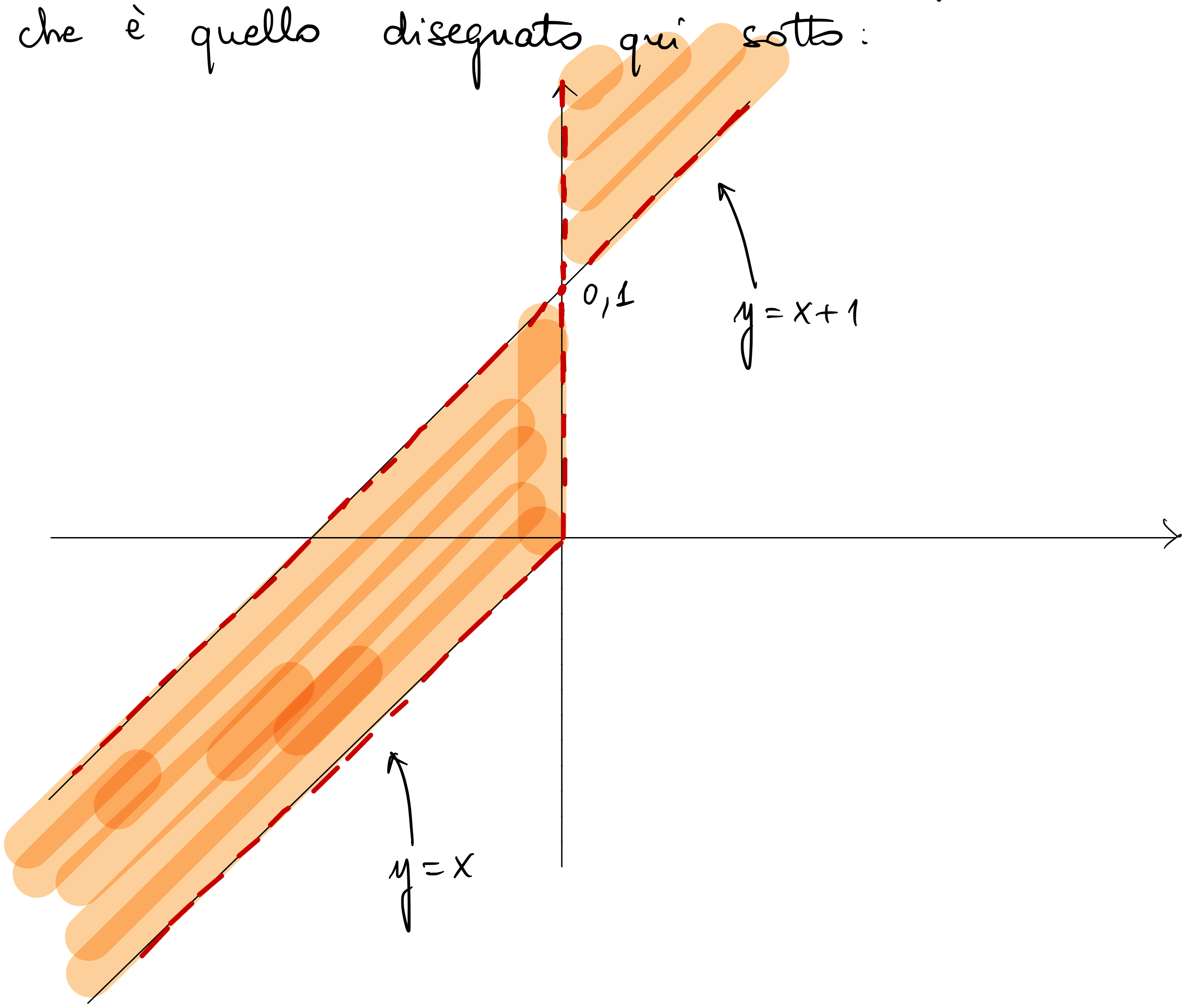
9. $f(x,y) = \log(x \log(y-x))$

$\text{dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \log(y-x) > 0\} =$

$= \{(x,y) : x > 0, \quad y > x+1\} \cup$

$\cup \{(x,y) : x < 0, \quad x < y < x+1\}$

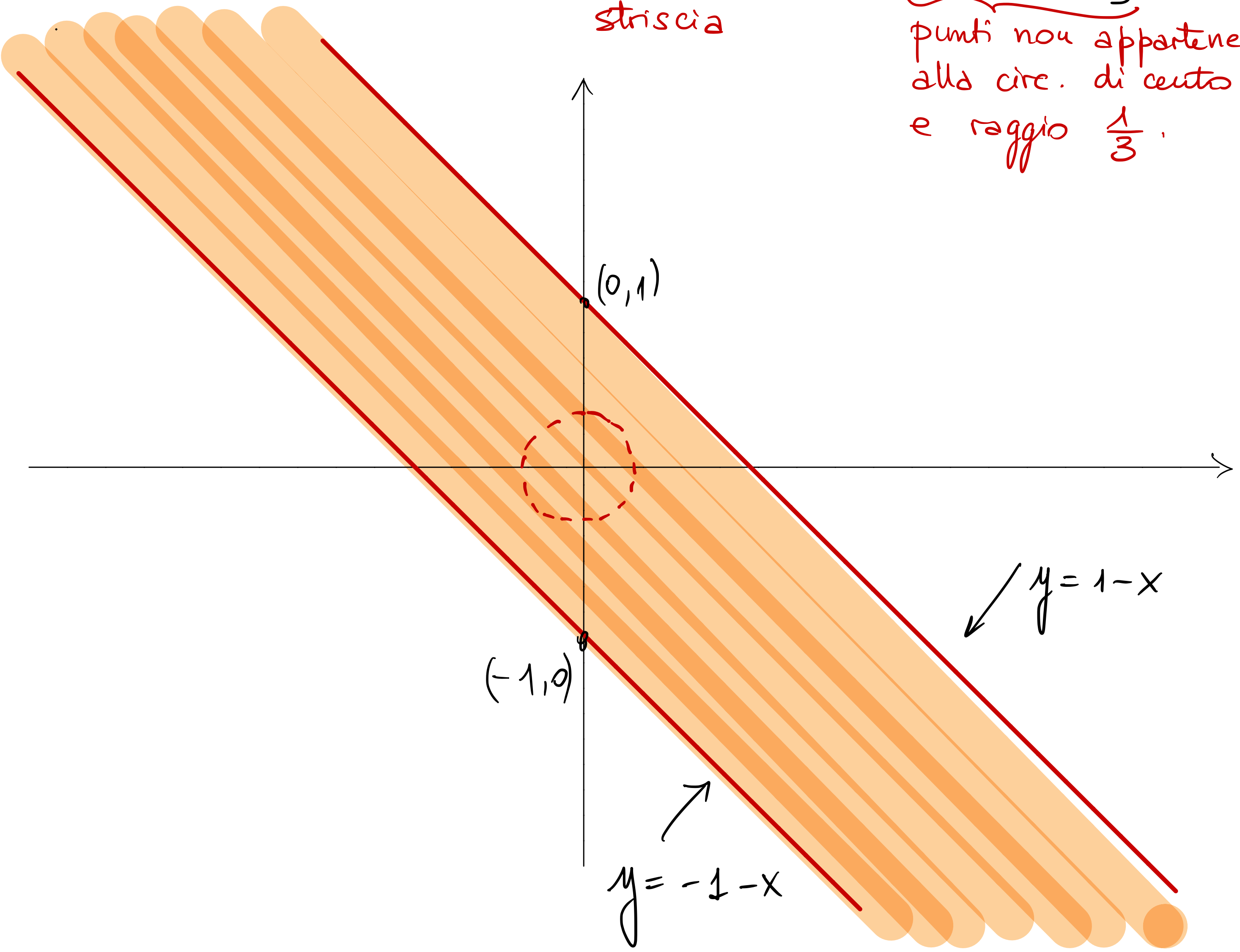
che è quello disegnato qui sotto:



dom f è aperto, non chiuso, limitato.
La sua frontiera è data dall'unione della retta $y = x+1$, del semiasse positivo delle x e della semiretta $y = x$, con $x \leq 0$.

10. $$f(x,y) = \frac{\arcsin(x+y)}{\sqrt[3]{9x^2+9y^2-1}}$$

$$\text{dom } f = \{(x,y) : \underbrace{-1 \leq x+y \leq 1}_{\text{striscia}},\ \underbrace{x^2+y^2 \neq \frac{1}{9}}_{\text{punti non appartenenti alla circ. di centro } (0,0) \text{ e raggio } \frac{1}{3}.}\}$$



Quindi dom f è dato dalla striscia chiusa delimitata dalle rette $y = \pm 1 - x$, privata della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{3}$.

dom f è non chiuso, non aperto, non limitato.

$\partial(\text{dom} f)$ è l'unione delle due rette e della circonferenza.

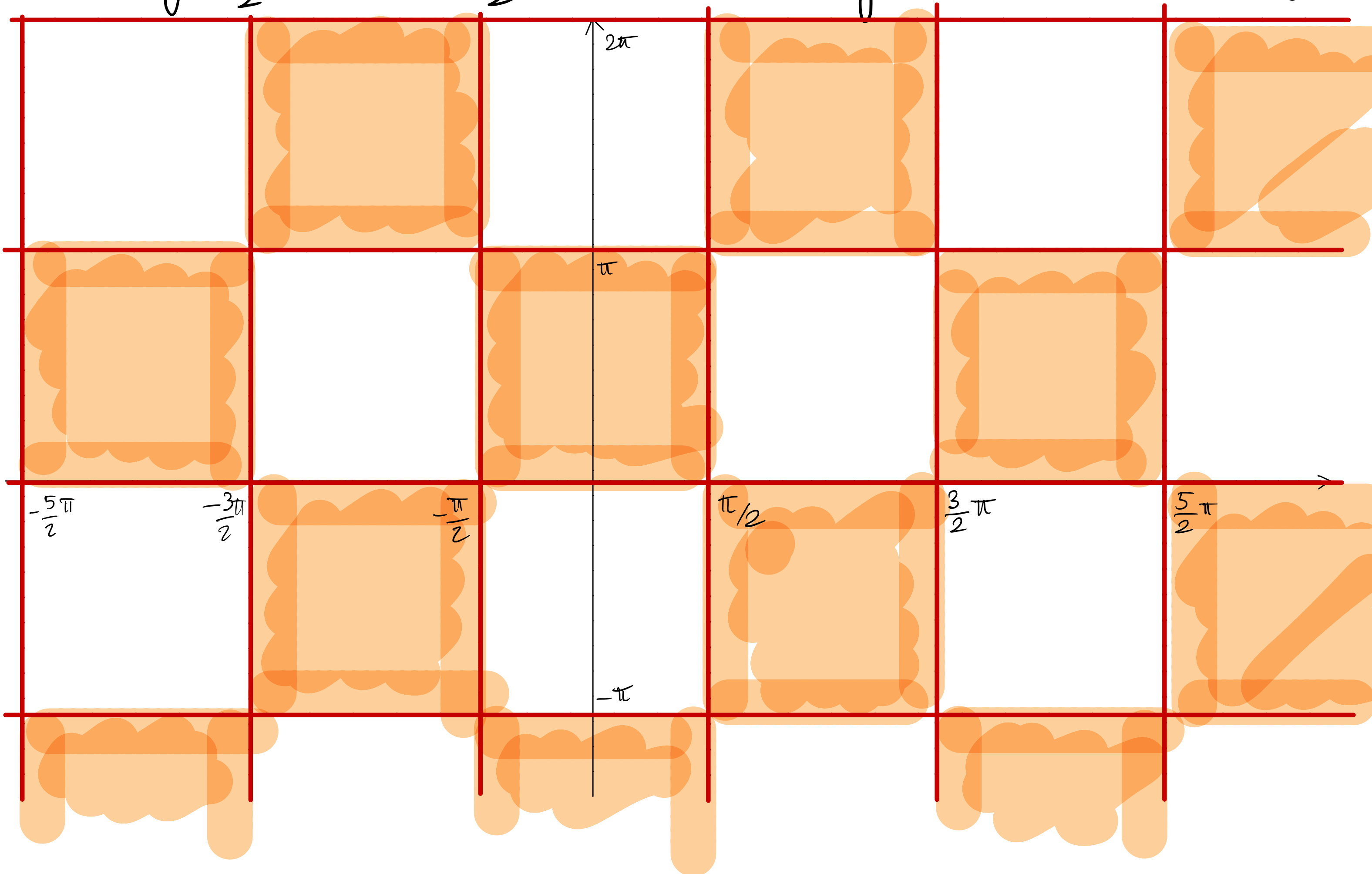
11. $f(x,y) = \sqrt{\cos x \ \operatorname{sen} y}$

$\cos x$ e $\operatorname{sen} y$ devono essere entrambi ≥ 0 oppure entrambi ≤ 0.

Quindi $\operatorname{dom} f =$

$= \{(x,y) : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2h\pi \leq y \leq (2h+1)\pi,\ h,k \in \mathbb{Z}\} \cup$

$\cup \{(x,y) : \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ (2h-1)\pi \leq y \leq 2h\pi,\ h,k \in \mathbb{Z}\}$



dom f è chiuso, non aperto, non limitato.
La sua frontiera è data dall'unione delle rette disegnate in rosso.

12. $f(x,y) = \sqrt[4]{\cos(\pi(x-y))}$

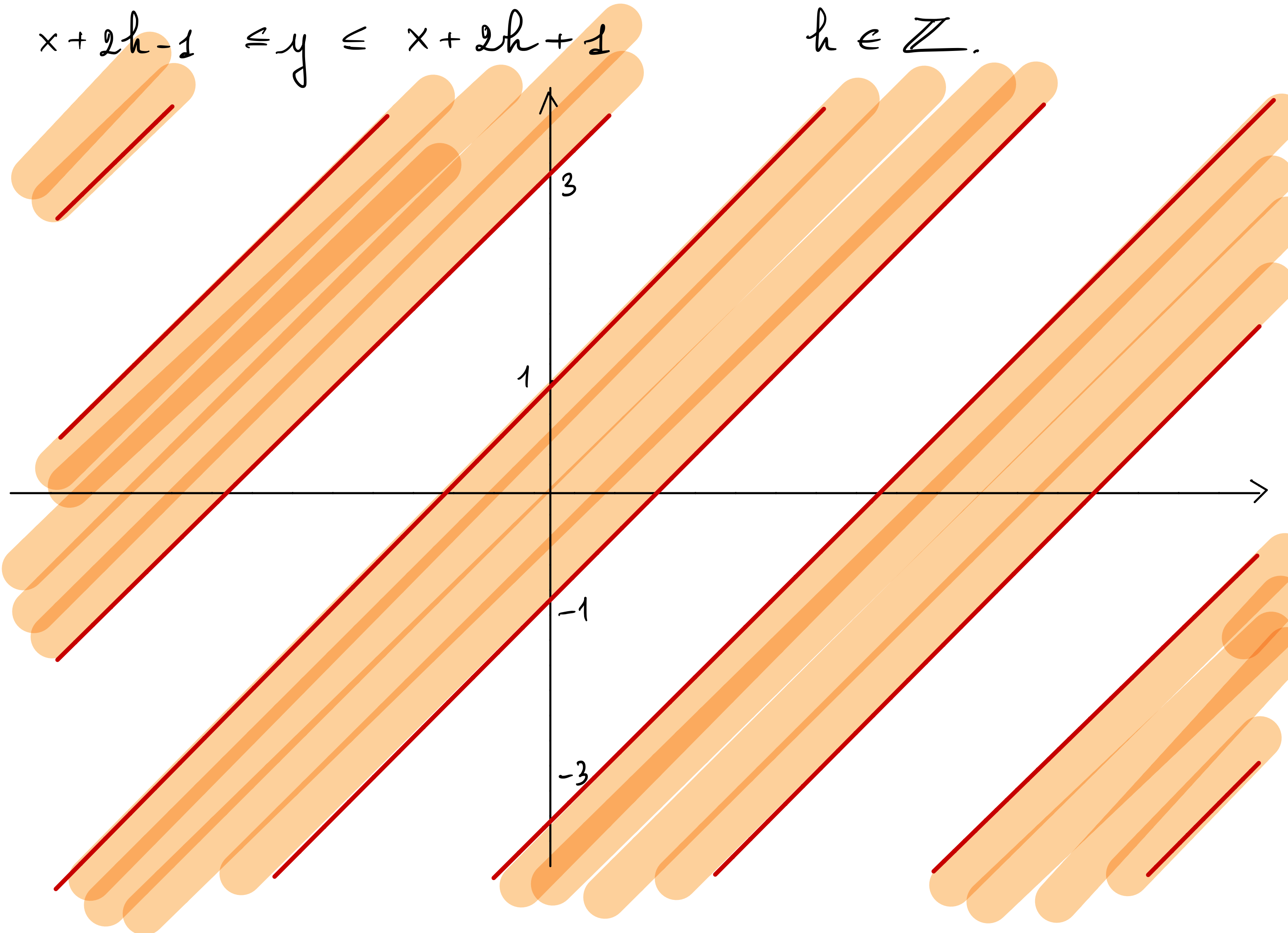
Deve essere $\cos(\pi(x-y)) \geq 0$, cioè

$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi(x-y) \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè

$2k-1 \leq x-y \leq 2k+1 \qquad k \in \mathbb{Z}$

cioè

$x+2h-1 \leq y \leq x+2h+1 \qquad h \in \mathbb{Z}.$



Dom f è chiuso, non aperto, non limitato.

$\partial(\mathrm{dom} f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x,y) : y = x + 2k+1\}$