OSS 1 Vale il teorema dei carabinieri

$f, g, h : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D$$

e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \ell$.

Allora $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \ell$.

OSS 2. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y) - \ell| = 0$$

Infatti basta scrivere le due def di limite e verificare che coincidono.

Applicazione: Voglio calcolare (se esiste)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Faccio il limite (per es.) lungo l'asse x

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Il limite, se esiste, vale zero.

Per dim. che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$,

si possono usare le oss. 1 e 2.

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |y| \leq |y| \to 0$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \longrightarrow 0$$

Funzioni continue di due (o più) variabili

In 1 variabile: $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

f si dice continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$ cioè se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in D$ verificante $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

In due variabili, la def^{ne} è la stessa.

$f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0) \in D$.

f si dice continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

cioè se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall (x,y) \in D$ verificante $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta$ si ha $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

f si dice continua in D se è continua in ogni pto di D.

ESEMPIO

$$f(x,y)=\frac{x^2y+y^2}{x^3-xy} \quad \text{è continua in } (1,2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\overbrace{\overbrace{x^2y}^{2}+\overbrace{y^2}^{4}}^{6}}{\underbrace{\underbrace{x^3}_{1}-\underbrace{xy}_{-2}}_{-1}} = -6 = f(1,2)$$

Usando le proprietà dei limiti, si vede che

PROP somma, differenza, prodotto, rapporto(*), composizione di funzioni continue sono continue.

(*) nei pti in cui non si annulla il denominat.

Esempio:

$$f(x,y)=\frac{x^2y+y^2}{x^3-xy} \quad \text{è continua nel suo dominio}$$

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{è continua in } \mathbb{R}^2$$

$$h(x,y) = \operatorname{sen}\left(e^{x^3y}\right) - \ln(x^2+y^2) \quad \text{è continua in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Per le f. continue valgono alcuni risultati già visti per funzioni di 1 variabile

<u>Permanenza del segno</u>. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

f continua in (x_0, y_0)

Se $f(x_0, y_0) > 0$, allora $\exists$ intorno $B_r(x_0, y_0)$ t.c.

$$f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap D$$

<u>TEOREMA DI WEIERSTRASS</u> (dim. 1)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Allora $\exists$ $x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

<u>TEOREMA DI WEIERSTRASS</u> (dim. 2)

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.

<u>Pb.</u> che ipotesi metto al posto di "$D = [a,b]$"?

Allora $\exists$ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ t.c.

$$f(x_1, y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2, y_2)$$

$$\forall (x,y) \in D.$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS (dim. 2)

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

con $D \subset \mathbb{R}^2$ insieme chiuso e limitato.

Allora $\exists\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ t.c.

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$$

$$\forall (x, y) \in D.$$

In altre parole: una f. continua in un insieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluti.

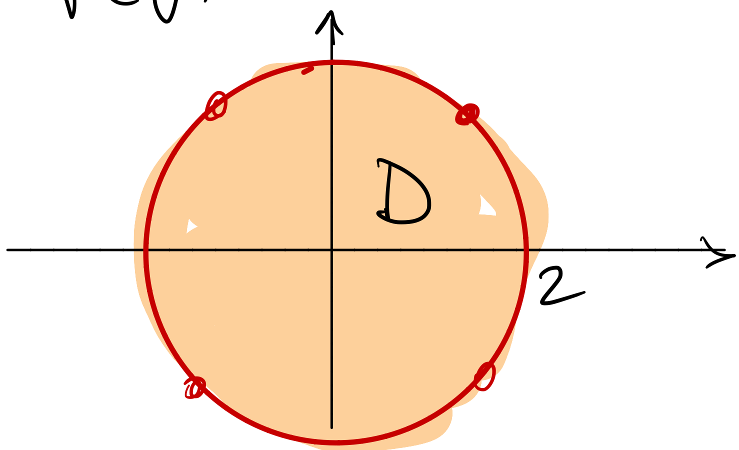
ESEMPI $f(x,y) = xy$ in

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ammette massimo e minimo assoluti.

Infatti $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$.

$D =$



chiuso e limitato.

Teorema di esistenza degli zeri (dim. 1)

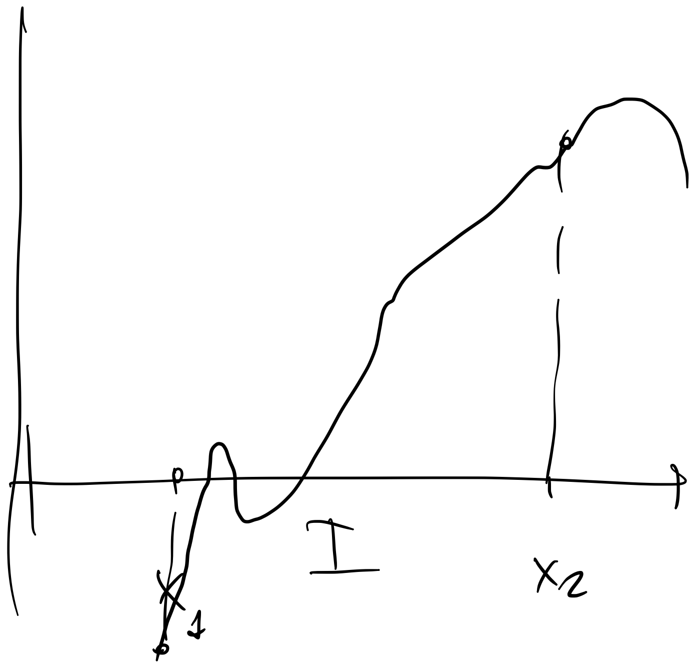
$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

f continua in I.

Se $\exists\ x_1, x_2 \in I$ t.c. $f(x_1) < 0 < f(x_2)$

$\Rightarrow \exists\ \bar{x} \in I$ t.c.

$f(\bar{x}) = 0$.



<u>Conseguenza</u>: $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo

f continua in $I \Longrightarrow$

f assume tutti i valori compresi tra

$$\inf_{x \in I} f(x) \quad \text{e} \quad \sup_{x \in I} f(x)$$

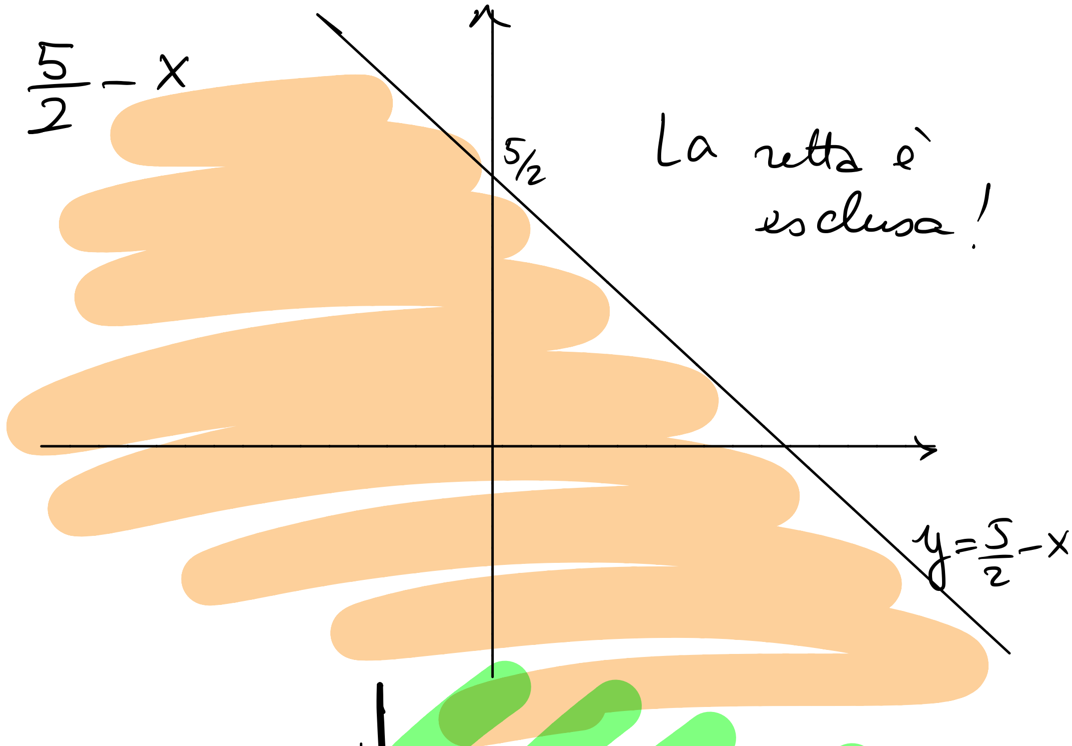
2. $f(x,y) = \sqrt{xy-1}\ \log(5-2x-2y)$

Condizioni da imporre: $(A) \wedge (B)$

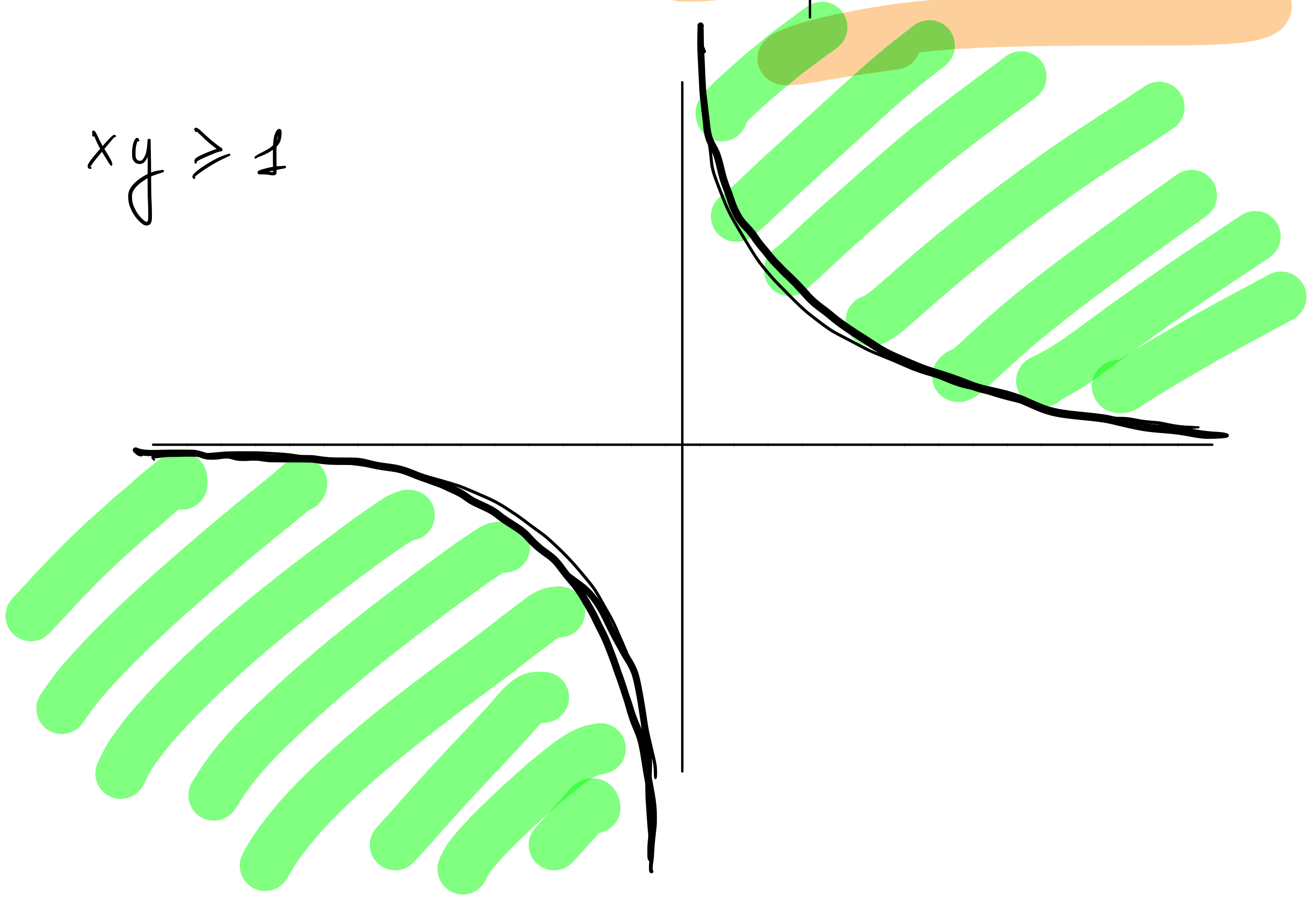
$(A)\quad xy-1 \geq 0$

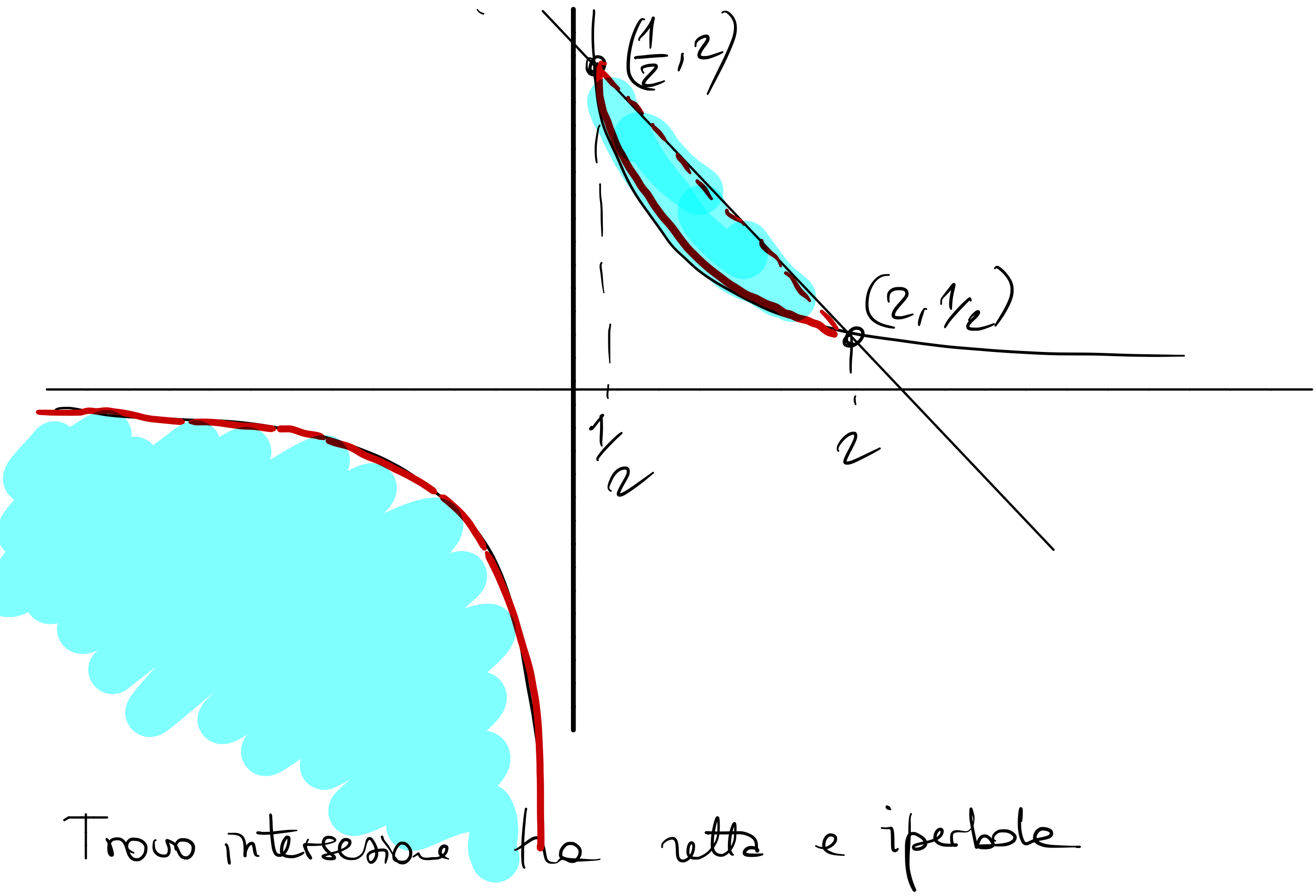
$(B)\quad 5-2x-2y > 0.$

$(B) \iff y < \frac{5}{2} - x$



$(B)\quad xy \geq 1$





Trovo intersezione tra retta e iperbole

$$\begin{cases} y = 1/x \\ y = \frac{5}{2} - x \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x \quad \Rightarrow$$

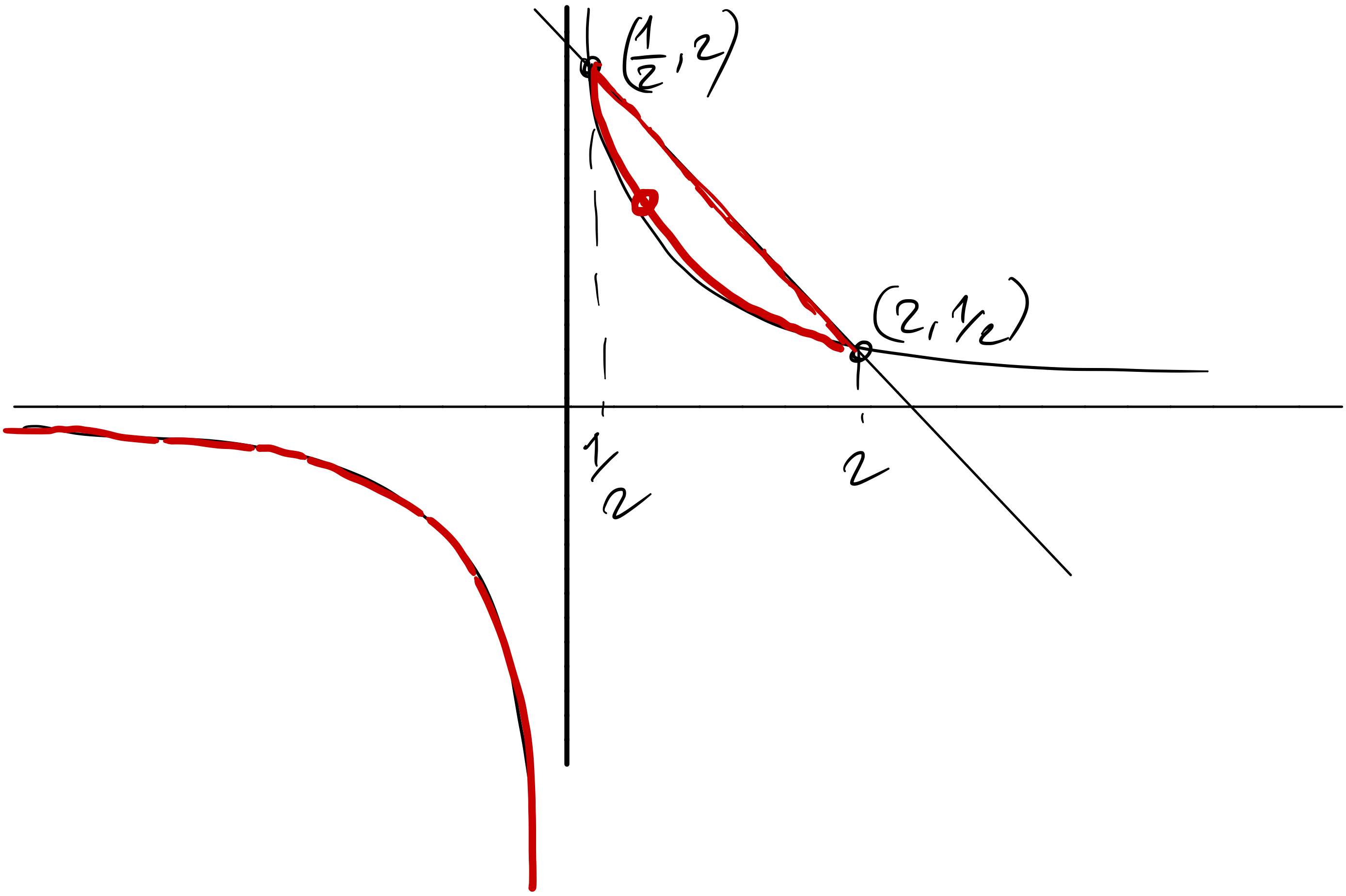
$$\Rightarrow 2 = 5x - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ 2. \end{cases}$$

$$\text{dom } f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \,,\; y \leq \frac{1}{x} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{1}{2} < x < 2 \,,\; \frac{1}{x} \leq y < \frac{5}{2} - x \right\}$$

dom f è non chiuso, non aperto, non limitato.



$$\partial(\mathrm{dom}\, f) = \left\{ (x,y) \text{ t.c. } \quad x<0, \quad y = \frac{1}{x} \right\} \cup$$

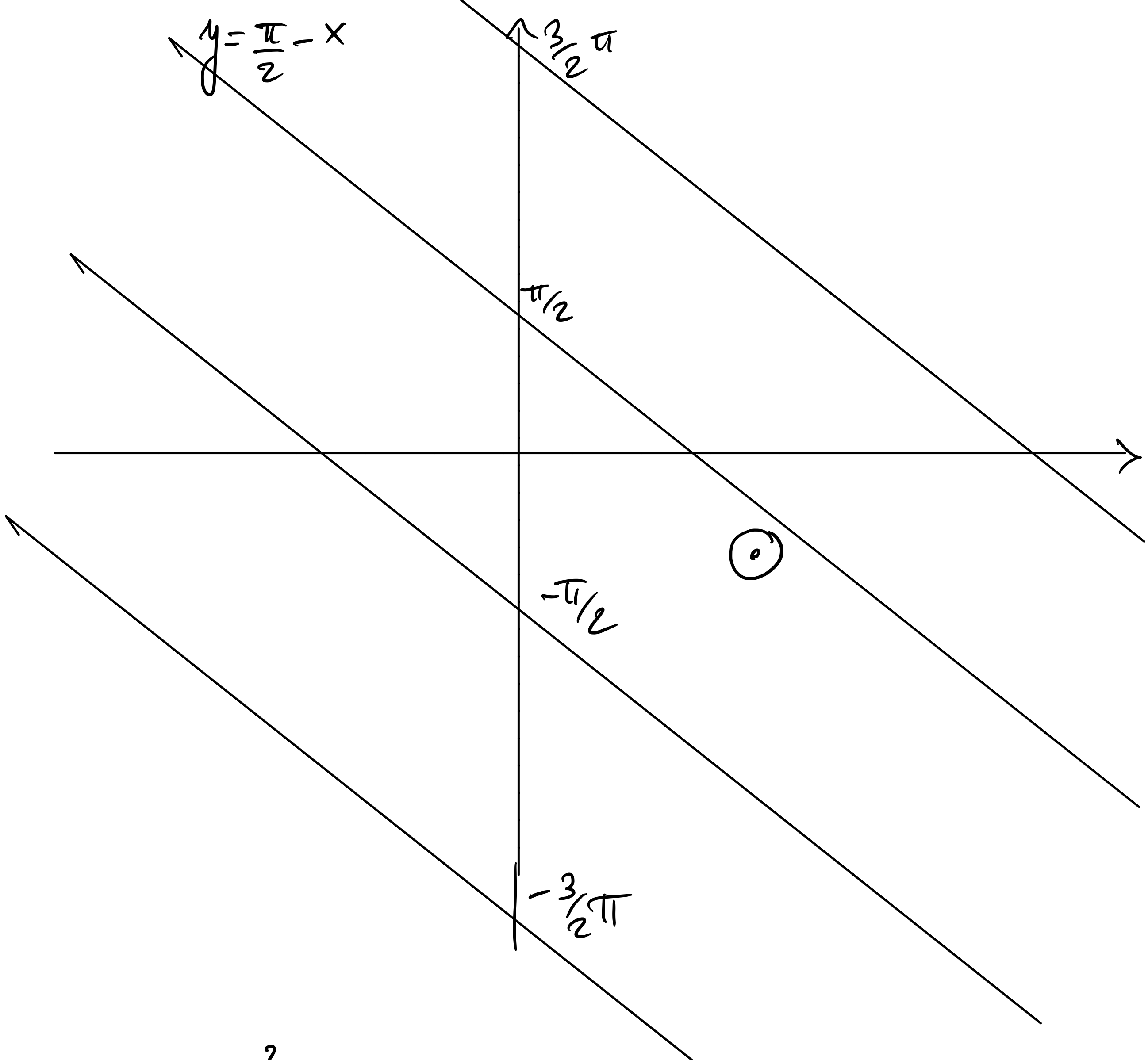
$$\cup \left\{ (x,y) \text{ t.c. } \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \quad y = \frac{1}{x} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) \text{ t.c. } \quad \frac{1}{2} < x < 2, \quad y = \frac{5}{2} - x \right\}$$

1) $f(x,y) = tg\,(x+y)$

$k \in \mathbb{Z}$

$\text{dom} f = \left\{ (x,y) : \quad x+y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$



dom f = $\mathbb{R}^2$ tolte le infinite
rette della forma
$$y = -x + (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\partial(\text{dom} f) = \left\{ (x,y) : \quad y = -x + (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

dom f non chiuso, aperto, non limitato.

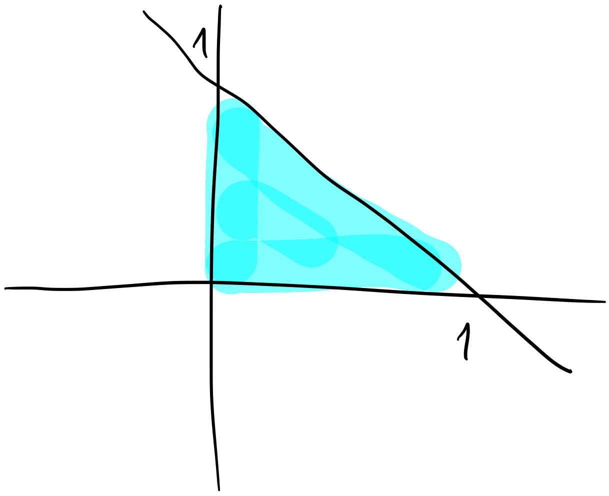
8. $f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$

dom $f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1-|x|-|y| \geq 0 \}$

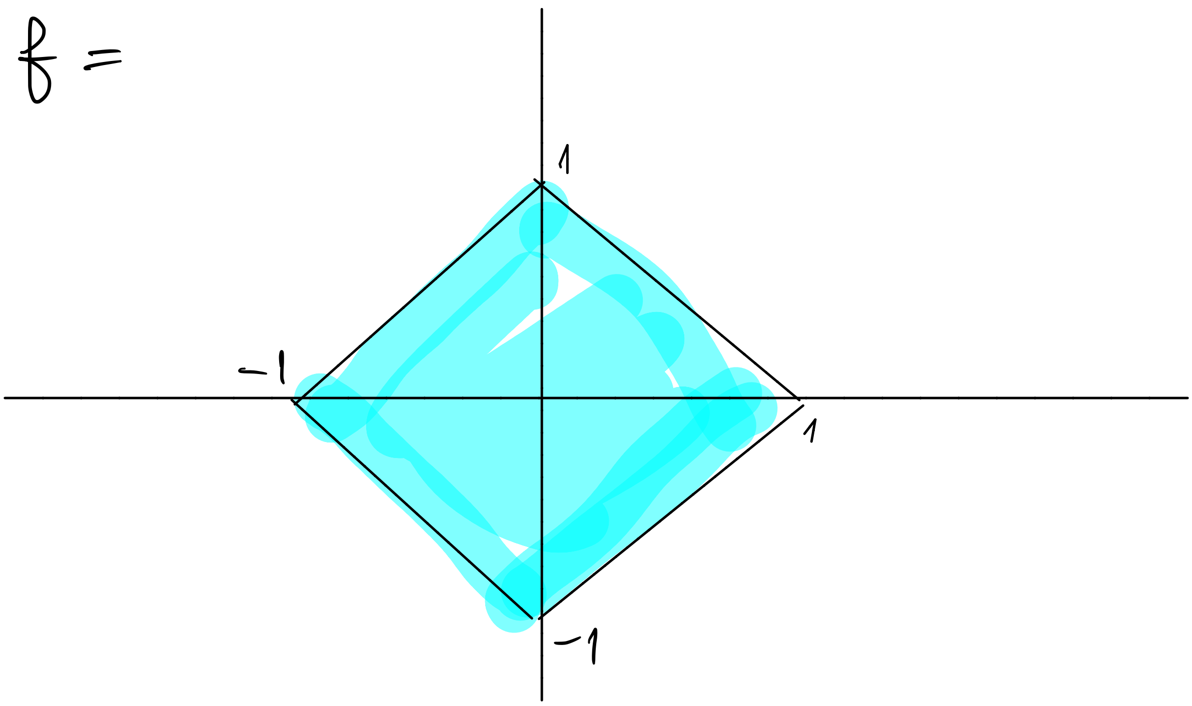
La $g(x,y) = 1-|x|-|y|$ è "pari" sia rispetto alla x sia rispetto alla y.

$\Rightarrow$ Studio la diseq$^{\text{ne}}$ solo nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$. e poi "rifletto".

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1-x-y \geq 0 \end{cases}$$



dom $f =$



$= \{ (x,y) : \quad -1 \leq x \leq 0, -1-x \leq y \leq x+1 \} \cup$

$\cup \{ (x,y) : \quad 0 < x \leq 1, -1+x \leq y \leq 1-x \}$