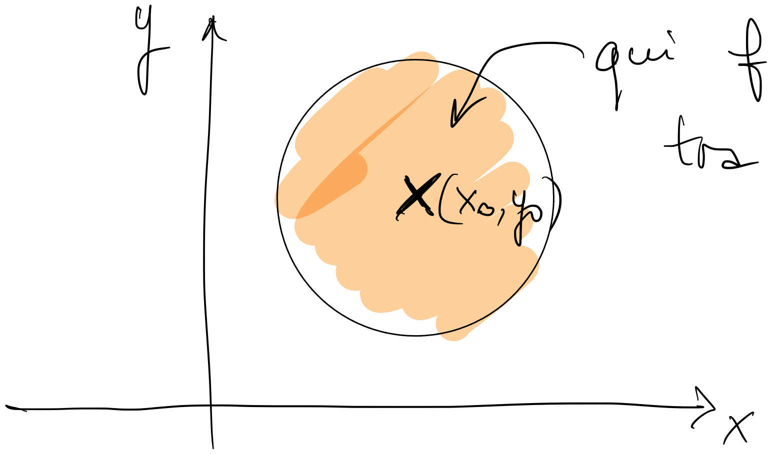
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R} \quad \text{significa:}$$

dominio di f.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall (x,y) \in D$ t.c.

$0 < |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta$ si ha $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$.



qui $f(x,y)$ è compresa tra $\ell - \varepsilon$ e $\ell + \varepsilon$.

Proprietà dei limiti:

1) Il limite, se esiste, è unico.

2) Permanenza del segno:

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$, e se $\ell \in (0, +\infty]$

allora $\exists$ un intorno

$$B_r(x_0,y_0) = \{(x,y) : |(x,y) - (x_0,y_0)| < r\} \text{ in cui}$$

$$f(x,y) > 0 \quad \text{se } (x,y) \in B_r(x_0,y_0) \cap D \setminus \{(x_0,y_0)\}.$$

Conseguenza: se $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in D$, e se

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$, allora $\ell \geq 0$.

TEOREMA. Se $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = m \in \mathbb{R}.$$ Allora

1) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) \pm g(x,y)\right] = \ell \pm m$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) \cdot g(x,y)\right] = \ell \cdot m$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\ell}{m}$$ purché $m \neq 0$.

$\Downarrow$

che implica $g \neq 0$ vicino a (x_0,y_0)

ESEMPIO

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{\overbrace{\underbrace{x^2}_{1}\,\underbrace{y}_{3}}^{3}}{\underbrace{\underbrace{x}_{1} + \underbrace{2y}_{6}}_{7}} = \frac{3}{7}$$

Questa "algebra dei limiti" si può estendere

Per es.

(Teorema)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{\underbrace{x^2+y^4}_{\to 0^+}} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty$$

cioè tende a zero rimanendo > 0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\underbrace{\frac{3}{x^2+y^4}}_{\to +\infty} + \underbrace{5x^2y+2}_{\to 2}\right) = (+\infty+2) =$$

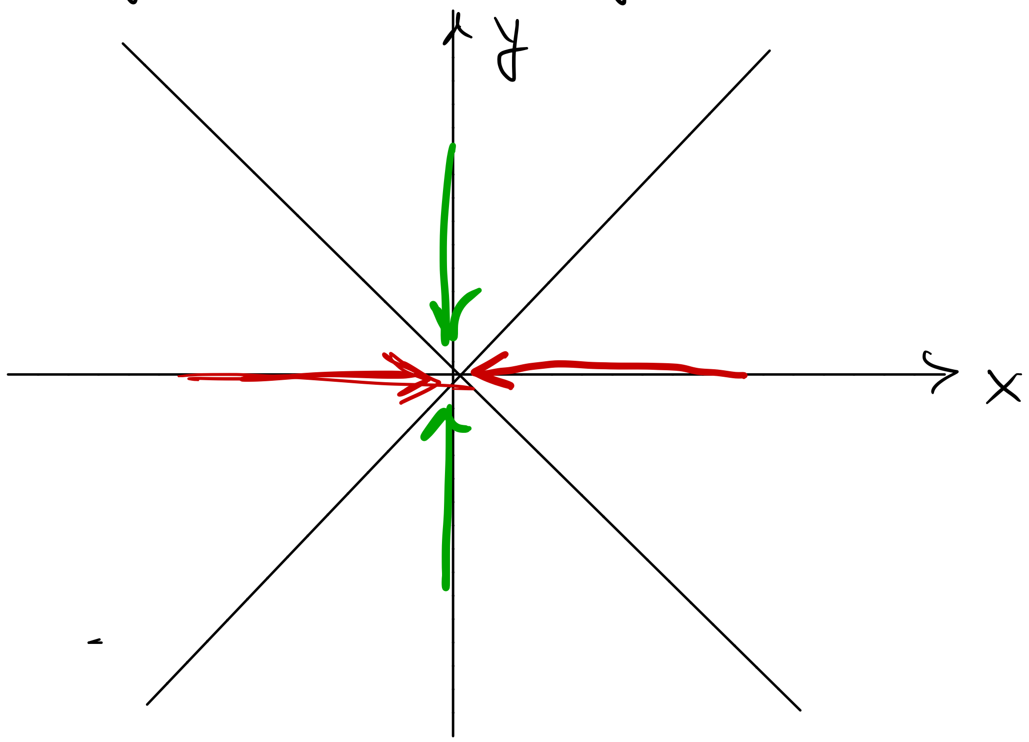
$$= +\infty$$

Etc. etc. per es. $(+\infty\cdot(-5)) = -\infty$.

Restano le varie forme indeterminate

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad +\infty-\infty$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2-y^2} \qquad y \neq \pm x$$



posso avvicinarmi a $(0,0)$ in varie direzioni, per es. posso calcolare il limite lungo il semiasse positivo delle x

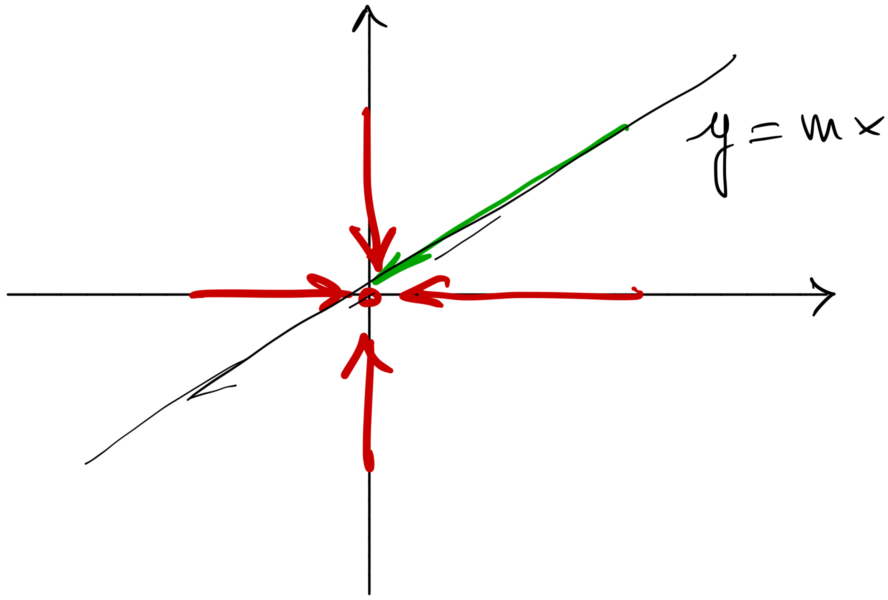
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Se invece mi avvicino lungo l'asse y

$$\lim_{y\to 0^+} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$



Sugli assi la f vale zero $\Rightarrow$ il limite lungo gli assi vale zero $\Rightarrow$ il limite, <u>se esiste</u>, vale zero.

Faccio allora il limite lungo la retta $y = mx$.

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,m\,x}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$\Rightarrow$ dipende da m $\Rightarrow$ il limite non esiste.

Ma non basta controllare il limite lungo le rette:

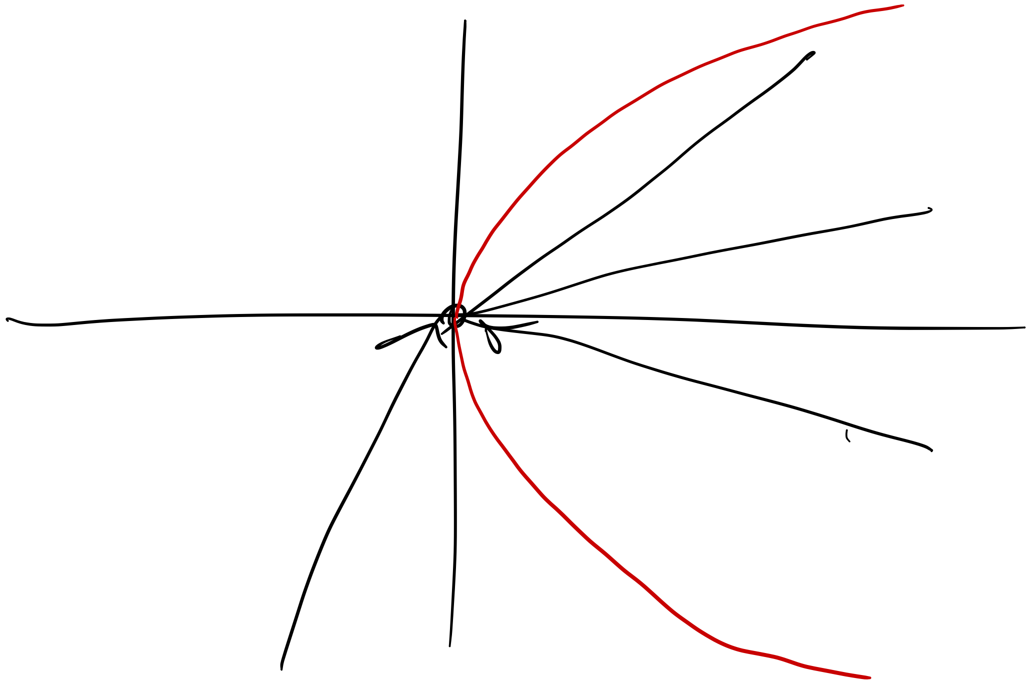
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Si ha che il limite lungo tutte le rette passanti per l'origine vale 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = (\text{esercizio}) = 0 \quad \forall m\in\mathbb{R}$$

Tuttavia

$$\lim_{\cancel{x}\, y\to 0} f(\cancel{x}\, y^2, \cancel{x}\, y) = \frac{1}{2}.$$



In altre parole: il limite lungo la parabola $x=y^2$ vale $\frac{1}{2}$.

Pertanto il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ non esiste!