Dinamica relativistica

impulso relativistico

Utilizzando semplici problemi d'urto, si può far vedere che la conservazione della quantità di moto classica non vale per velocità relativistiche.

Es. urto centrale elastico, dalla conservazione di energia e impulso: $V_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$ $\quad V_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{se } m_1 = m_2 \\ V_1 = 0 \\ V_2 = v_1 \end{array}}$

assumiamo $m_1 = 2m_2$ e $v_1 = 0.9c$

$$V_1 = \frac{m_2 v_1}{3m_2} = \frac{v_1}{3} \qquad V_2 = \frac{4v_1}{3} = 1.2c > c$$

d'altra parte mv non è la componente spaziale di un quadrivettore, essendo il prodotto di una costante per la velocità, che non è la componente spaziale di un quadrivettore!

conservazione dell’impulso

La forma classica dell’impulso, considerando la trasformazione relativistica delle velocità, non garantisce che se l’impulso si conserva in un sistema di riferimento si conservi in qualunque sistema di riferimento inerziale, violando il primo postulato della relatività

(Vedi Krane 2.7)

impulso relativistico

analizzando più in dettaglio, in $\left(m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy,}{dt}, m\frac{dz}{dt} \right)$

dx, dy, dz sono le componenti spaziali di un quadrivettore ma sono divise per una quantità non invariante, dt.
Se vogliamo mantenere le dimensioni fisiche di un impulso, facendo però in modo che abbia le proprietà della componente spaziale di un quadrivettore, possiamo dividere per il tempo proprio dt_o, che è invariante, anziché per dt :

$$\vec{p} = \left(m\frac{dx}{dt_0}, m\frac{dy,}{dt_0}, m\frac{dz}{dt_0} \right) = \gamma \left(m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy,}{dt}, m\frac{dz}{dt} \right)$$

Per ottenere un quadrivettore, la componente temporale deve necessariamente essere $\frac{mcdt}{dt_0} = \gamma \frac{mcdt}{dt} = \gamma mc$

cosa rappresenta questo termine?

Quadrivettore impulso, o quadrimpulso:

$$\overline{P} = \left(mc\frac{dt}{dt_0}, m\frac{dx}{dt_0}, m\frac{dy,}{dt_0}, m\frac{dz}{dt_0} \right) = \left(\gamma mc, \gamma m\frac{dx}{dt}, \gamma m\frac{dy,}{dt}, \gamma m\frac{dz}{dt} \right) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = (\gamma mc, \vec{p})$$

quadrimpulso

il modulo (invariante) del quadrimpulso è:

$$\left|\left(\gamma mc, \gamma m\vec{v}\right)\right|^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = \gamma^2 m^2 \left(c^2 - v^2\right) = \gamma^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^2$$

Consideriamo ora che una particella, sotto l'azione di una forza costante che agisce per un tempo Δt, passi da un impulso $\vec{p}$ ad un impulso $\vec{p} + \Delta\vec{p}$, con $\Delta p \ll p$

Come cambia la componente temporale? La massa della particella, deve rimanere la stessa, e quindi anche il modulo del quadrimpulso rimane uguale:

$$\left(\gamma mc + \Delta(\gamma mc)\right)^2 - \left(\vec{p} + \Delta\vec{p}\right)^2 = \left(\gamma mc\right)^2 - \left(\vec{p}\right)^2$$

$$(\gamma mc)^2 + 2\gamma mc \cdot \Delta(\gamma mc) + \left(\Delta(\gamma mc)\right)^2 - \left(p^2 + 2\vec{p}\cdot\Delta\vec{p} + \left(\Delta\vec{p}\right)^2\right) = \left(\gamma mc\right)^2 - p^2$$

$$2\gamma mc \cdot \Delta(\gamma mc) \simeq 2\vec{p}\cdot\Delta\vec{p} \Rightarrow \Delta(\gamma mc) = \frac{\vec{p}\cdot\Delta\vec{p}}{\gamma mc} \Rightarrow \Delta(\gamma mc) = \frac{\vec{v}}{c}\cdot\Delta\vec{p} \Rightarrow c\Delta(\gamma mc) = \vec{v}\cdot\Delta\vec{p}$$

$\Delta\vec{p} = \vec{f}\Delta t$ teorema dell'impulso

$$\vec{v}\cdot\Delta\vec{p} = \vec{f}\cdot\vec{v}\Delta t = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r}$$

$\Delta E = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r}$ teorema dell'energia cinetica

$$\Delta E = \vec{v}\cdot\Delta\vec{p} = c\Delta(\gamma mc)$$

La variazione dell'energia cinetica è uguale alla variazione della parte temporale del quadrimpulso

energia relativistica

Il quadrimpulso (o quadrivettore energia-impulso) di una particella in moto con velocità v si ottiene applicando una trasformazione di Lorentz (con velocità $-v$) al quadrimpulso di una particella ferma:

$$\overline{P}_0 \equiv (mc,0,0,0) \xrightarrow{\text{Lorentz}} \overline{P} \equiv (\gamma mc, \beta\gamma mc, 0, 0) = \left(\frac{E}{c}, p, 0, 0 \right)$$

E dunque per una particella ferma $E_0 = mc^2$

e per una particella in moto $E = \gamma mc^2$

L'energia va all'infinito come gamma ma la velocità rimane finita (< c)

Dove è andata a finire l'energia cinetica classica?

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \ldots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \ldots$$

Invarianza e conservazione

E’ importante sottolineare la distinzione tra invarianza del modulo di un quadrivettore e la sua (eventuale) conservazione nel tempo:

qualunque quadrivettore, per definizione

(un quadrivettore è un oggetto di quattro componenti che al variare del sistema di riferimento si trasformano secondo la trasformazione di Lorentz),

ha un modulo invariante.

Il quadrivettore posizione di un oggetto gode di questa proprietà:

p. es. la quadridistanza dall’origine è la stessa in qualunque sistema di riferimento

ma lungo la linea di universo dell’oggetto la sua posizione cambia nel tempo.

La conservazione del quadrimpulso

Come abbiamo visto, il modulo del quadrimpulso è sempre uguale ad mc^2 in qualunque sistema di riferimento (invarianza del modulo di un quadrivettore)

ma se la massa è una proprietà dell'oggetto che non cambia nel tempo, allora il modulo del quadrimpulso è anche costante, ossia indipendente dal tempo.

D'altra parte, la conservazione dell'energia e dell'impulso per un sistema isolato è verificata sperimentalmente anche per velocità relativistiche e la conservazione delle due componenti del quadrivettore (che non sono invarianti per trasformazioni di Lorentz!) implica anche la conservazione del modulo del quadrimpulso.

Notiamo che tutto questo vale per qualunque sistema isolato, anche se costituito da più componenti...

massa invariante e relazione tra energia, impulso e massa

$$\sqrt{\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}} = \sqrt{E^2/c^2 - |\overrightarrow{p}|^2} = \sqrt{(m\gamma c)^2 - (m\gamma|\overrightarrow{v}|)^2} = m\gamma\sqrt{1-\beta^2}\, c = mc$$

$$E^2 = |\overrightarrow{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$$

Se il quadrimpulso si riferisce ad una singola particella,la massa m è evidentemente quella della particella.

Se il quadrimpulso si riferisce ad un sistema di particelle, m rappresenta la “massa invariante” del sistema (che è sempre maggiore della somma delle masse dei componenti).

Le particelle, interagendo tra di loro, modificheranno sia la loro energia che il loro impulso, rispettando tuttavia la conservazione separata dell’energia totale e dell’impulso totale del sistema e quindi della massa invariante del sistema

decadimento di una particella instabile

Se consideriamo una particella instabile, che decade in altre particelle, la massa invariante del sistema finale sarà uguale alla massa della particella iniziale.

Inoltre, l'energia totale e l'impulso totale durante il decadimento si devono conservare.

Per esempio, consideriamo un decadimento in due corpi:

$$A \rightarrow B + C$$

Nel riferimento di quiete di A sarà:

$$\bar{P}_A \equiv \left(m_A c;0,0,0\right);\bar{P}_B \equiv \left(E_B / c; p_B,0,0\right);\bar{P}_C \equiv \left(E_C / c; p_C,0,0\right)$$

$$E_B + E_C = m_A c^2$$

$$\vec{p}_B = -\vec{p}_C$$

relazioni tra le componenti del quadrimpulso

$$\overline{P} \equiv (\gamma mc, \beta\gamma mc, 0, 0) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

- $\gamma = E/mc^2 = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{p}|^2 + m^2c^2}}{mc}$
- $\beta = |\overrightarrow{p}|c/E$
- $\gamma\beta = |\overrightarrow{p}|/mc$
- $K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$ energia cinetica

Tutte le relazioni di cui sopra valgono sia per una singola particella che per un sistema.
Beta e gamma sono i fattori di Lorentz che fanno passare da un sistema di riferimento di partenza (per esempio il “riferimento del laboratorio”) al riferimento nel quale la particella o il c.d.m. del sistema si trovano in quiete (“riferimento del c.d.m.”)

$E=mc^2$?!

L'articolo di Lev Okun sul "concetto di massa" inizia elencando le quattro possibili formulazioni della "famosa relazione di Einstein" tra massa ed energia:

$$E_0 = mc^2$$

$$E = mc^2$$

$$E_0 = m_0c^2$$

$$E = m_0c^2$$

E_0 indica l'energia di riposo
In alcuni testi troverete una distinzione tra m_0 definita come massa a riposo, ed m definita come massa relativistica

$$m = \frac{E}{c^2} = \gamma m_0$$

per porre due semplici domande:

- quale delle quattro formulazioni segue dalla relatività speciale?
- quale fu la prima formulazione utilizzata da Einstein?

Qual è la formulazione che trovate più spesso?

Qual è la formulazione che abbiamo dato noi?

Cosa ha scritto Einstein?

Nel famoso articolo del 1905, si trova la prima formulazione dell’equivalenza tra masssa ed energia, nella forma: $\Delta E_0 = \Delta mc^2$

L’idea della completa equivalenza di massa ed energia fu successivamente utilizzata da Einstein soprattutto durante l’elaborazione della relatività generale, per essere poi abbandonata con la formulazione completa di quest’ultima teoria.

Nel 1948, Einstein comunque in una lettera scrive esplicitamente:

“non è una buona cosa introdurre il concetto di *massa* $M = m\gamma$ per la quale non si può dare una chiara definizione. E’ bene non usare altro che *la massa a riposo* m ”

perché parlare oggi di massa relativistica?

Oggi, nessun articolo o testo professionale di fisica utilizza più il concetto di massa relativistica.

Introdurlo in un corso di fisica elementare è inutile e fuorviante.

In particolare, le conclusioni che se ne possono trarre sono sbagliate!

Per esempio, non è vero che un fotone abbia una massa gravitazionale pari a E/c^2

Ricordatevi sempre che trovate scritto $E=mc^2$, dovete sempre precisare che E è l'energia nel riferimento in cui la massa è a riposo.

Unità di misura di energia, massa e impulso per particelle relativistiche

Le particelle cariche vengono solitamente accelerate passando attraverso una differenza di potenziale ΔV.

Se partono con energia cinetica nulla ed hanno una carica elementare e, alla fine avranno una energia cinetica pari a $e\Delta V$.

E' quindi naturale misurare le energie in eV, o elettronvolt.

e = 1.602 10^{-19} C

1 eV = 1.602 10^{-19} J

Essendo $E^2 = |\overrightarrow{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$

se si misurano gli impulsi in eV/c e le masse in eV/c^2,

E, p ed m si possono sommare direttamente senza curarsi dei fattori c

(il che equivale a considerare c = 1)

Masse dell'elettrone e del protone

$1\ \text{kg}\ c^2 = 9\ 10^{16}\ \text{J}$
$1\ \text{kg} = 9\ 10^{16} / 1.6\ 10^{-19}\ \text{eV}/c^2 = 5.6\ 10^{35}\ \text{eV}/c^2$

$m_e = 9.109\ 10^{-31}\ \text{kg}$, $m_p = 1.673\ 10^{-27}\ \text{kg}$

$m_e = 0.511\ \text{MeV}/c^2$, $m_p = 938.3\ \text{MeV}/c^2$

massa del neutrone:
$m_n = 939.6\ \text{MeV}/c^2$

Il deutone

Il deutone (il nucleo del deuterio) è uno stato legato di un protone e di un neutrone. Il deuterio è un “isotopo” dell’idrogeno.

La massa del deutone è di 1875.6 MeV/c^2, inferiore di 2.2 MeV/c^2 alla somma delle masse di protone e neutrone.

Come si spiega questa differenza?

Il deutone è uno stato stabile, per rompere il legame è necessario fornire dall’esterno l’energia di legame, pari appunto a 2.2 MeV/c^2. Viceversa, quando un protone cattura un neutrone per formare il deuterio, si libera la stessa energia, sotto forma di radiazione elettromagnetica

Esempio di processo di “fusione nucleare”

L'atomo di idrogeno

Anche l'atomo di idrogeno è uno stato legato. L'energia di legame, misurabile osservando quanta energia si deve fornire per scinderlo in un elettrone ed un protone, risulta essere di 13.6 eV.

C'è una corrispondente differenza di massa?

$$\frac{13.6}{(938.3+0.5)\cdot 10^{6}} = 1.45\cdot 10^{-8}$$

troppo piccola da essere apprezzabile.

Questo è vero per qualunque legame atomico, ossia per qualunque legame chimico (da cui la legge approssimativa di conservazione della massa di Lavoisier), mentre l'energia di legame non è mai trascurabile per i legami nucleari

Il trizio

Il trizio è il secondo isotopo dell'idrogeno, costituito da un protone e due neutroni.

La massa del trizio è 2.809 MeV/c^2, superiore di circa 8 MeV/c^2 alla somma delle masse dei componenti.

E' dunque instabile. La sua massa è superiore anche alla somma delle masse di ^3He, e^- e neutrino, per cui decade in queste particelle attraverso la trasformazione di un neutrone in un protone, un elettrone ed un antineutrino.

Esempio di "decadimento beta", uno dei possibili modi di decadimento dei nuclei instabili.

Al momento delle prime osservazioni dei processi radioattivi, questi vennero classificati in alfa, beta e gamma a seconda del segno dei prodotti di decadimento: positivi, negativi o nulli

reazioni di fusione nucleare

reazione deuterio-trizio:

$^{2}H + {}^{3}H \rightarrow {}^{4}He + n$

1876 MeV/c^2 + 2809 MeV/c^2 > 3727 MeV/c^2 + 940 MeV/c^2

si liberano circa 18 MeV (0.4% della massa iniziale) in energia cinetica

Questa e altre reazioni di fusione sostengono la combustione delle stelle

Possiamo interpretare nello stesso modo le razioni chimiche di combustione?

“masse estreme”

i casi che abbiamo visto finora comportano la trasformazione di piccole frazioni di massa in energia e viceversa.

Ci sono casi in cui la differenza tra la massa finale e la somma delle masse dei componenti è molto più sostanziale.

Il primo esempio riguarda una situazione estrema nell’Universo.

Il secondo è invece molto più sorprendente, perché riguarda sostanzialmente tutta la massa con cui abbiamo a che fare sulla terra, ma è stato capito solo negli ultimi decenni.

Stelle di neutroni

Prodotti dell'esplosione di una supernova con masse comprese tra 1.5 e 3 masse solari.

Le supernove sono le fasi finali della combustione delle stelle, quando esaurendosi l'energia sviluppata dalla fusione nucleare, la materia della stella collassa gravitazionalmente su se stessa.

Il collasso gravitazionale è tale da trasformare i protoni ed elettroni in neutroni e neutrini (decadimento beta inverso). I neutrini si allontanano, ed a questo punto i neutroni si compattano fino al limite del principio di esclusione di Pauli: una massa simile a quella del Sole è concentrata in qualche decina di chilometri. Una stella di neutroni è uno stato legato (una specie di supernucleo formato da circa 10^{60} nucleoni) la cui massa è circa il 70% della somma delle masse dei neutroni. L'energia in eccesso (30%) è quella portata via dai neutrini nell'interazione (debole) nella quale si fondono elettroni e protoni.

("masse estreme", in Asimmetrie n. 14)

La massa dei nucleoni

Qual è l'origine della massa del protone e del neutrone?

Oggi sappiamo che il protone ed il neutrone sono fatti di quark, in particolare dei due quark più leggeri, up e down.

Le masse di questi quark sono rispettivamente 400 e 200 volte più piccole di quelle del protone o del neutrone.

In totale si arriva a malapena a 10 MeV.

Da dove viene il restante 99%?

("particelle a colori", in Asimmetrie n. 14)

Particelle prive di massa

Per una particella priva di massa (per esempio un fotone), il modulo dell'energia è sempre uguale al modulo dell'impulso moltiplicato per c: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = p^2c^2 \rightarrow E = pc$

L'impulso espresso in eV/c è uguale all'energia espressa in eV: $\overline{P} \equiv (E/c; p,0,0) \equiv (E/c; E/c,0,0) \equiv (p; p,0,0)$

Una particella priva di massa si muove sempre con velocità pari alla velocità della luce $\beta = \frac{pc}{E} = 1$

Come si trasforma il quadrimpulso di un fotone per trasformazioni di Lorentz?

Consideriamo una sorgente che emette isotropamente fotoni di energia E, e supponiamo che la sorgente si trovi in una posizione x>0. Noi riceveremo fotoni con impulso negativo $\overline{P} \equiv (E/c; -E/c,0,0)$

Trasformazione dell'energia del fotone

Ora consideriamo che la sorgente si allontani o si avvicini a noi. Dobbiamo utilizzare la trasformazione di Lorentz che ci riporta dal riferimento in movimento al nostro riferimento, con un termine non diagonale uguale nei due casi a $\pm\beta\gamma$ (+ se la sorgente si allontana, - se si avvicina)

segno - perché il fotone viaggia verso di noi

$$\bar{P} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \pm\beta\gamma & 0 & 0 \\ \pm\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{P}' = \begin{pmatrix} \gamma & \pm\beta\gamma & 0 & 0 \\ \pm\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(E'/c; -E'/c, 0, 0\right) =$$

$$= \left(\gamma E'/c \mp \beta\gamma E'/c; \pm\beta\gamma E'/c - \gamma E'/c, 0, 0\right) = \left(\gamma E'/c(1\mp\beta); -\gamma E'/c(1\mp\beta), 0, 0\right)$$

e quindi nel nostro riferimento il fotone viaggia verso di noi con una energia pari rispettivamente a

$$E = \gamma E'(1\mp\beta) = E'\frac{(1\mp\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = E'\sqrt{\frac{(1\mp\beta)^2}{(1-\beta)(1+\beta)}} = E'\sqrt{\frac{(1\mp\beta)}{(1\pm\beta)}}$$

Effetto Doppler relativistico

L'energia del fotone quindi aumenta o diminuisce a seconda che la sorgente si avvicini o si allontani. D'altra parte sappiamo che l'energia di un fotone è proporzionale alla frequenza, per cui per una sorgente che si allontana

$$E = h\nu \Rightarrow \nu = \nu'\sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}} < \nu'$$

Spostamento verso il rosso, o red shift

Nell'effetto Doppler classico si avrebbe $\nu = \nu'\frac{1}{(1+\beta)} < \nu'$

Come ci si aspetta, le due formule coincidono al primo ordine, poiché

$$\frac{1}{(1+\beta)} \approx (1-\beta) \Rightarrow \frac{1}{(1+\beta)^2} \approx \frac{(1-\beta)}{(1+\beta)} \Rightarrow \frac{1}{(1+\beta)} \approx \sqrt{\frac{(1-\beta)}{(1+\beta)}}$$

Nel caso classico tuttavia, le formule sono diverse a seconda che la sorgente o l'osservatore siano in moto rispetto al mezzo in cui l'onda si propaga, mentre nel caso relativistico i due casi sono perfettamente simmetrici, non essendoci un mezzo privilegiato nel quale l'onda si propaga