

Esercizi settimana 3: limiti di funzioni e continuità

Tutoraggio di Analisi Matematica (a.a. 2017/18)

- Calcolare i seguenti limiti:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x^2 - 6x + 9)^2}{[e^{(x^2-9)} - 1]^4} \quad \left[\frac{1}{1296} \right]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x-2})^4}{(x^2 - 4)^{1/3} \log[(x-1)^4]} \quad \left[\frac{1}{4\sqrt[3]{4}} \right]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3)^{[1-\cos(x-3)]} \quad [1]$$

[Suggerimento: ricordare il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha |\log|x||^\beta = 0 \quad \forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$]

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3}{x - \log x} \quad [0]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 \log x \sin(x-3)}{(5x+1)[e^{(x-3)} - 1]} \quad \left[\frac{9 \log 3}{16} \right]$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log x^2} \quad [0^-]$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right] \quad [1]$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{x^4+1}{x^3+5}} \quad [e^2]$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2+x)}{3x^3 - 1 + 2x^2} \quad [0]$$

- Studiare la continuità in \mathbb{R} delle seguenti funzioni:

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1|} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} \frac{\log(x+1)}{x^2+x} & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ \frac{x^2+1}{(x-3)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 0 \\ \frac{\cos x - \cos(3x)}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Soluzioni:

- 10. $f(x)$ non è continua, in quanto $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie
- 11. $f(x)$ non è continua, in quanto $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie
- 12. $f(x)$ è continua in \mathbb{R}

- Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano continue in $x = 0$:

$$13. f(x) = \begin{cases} \alpha & x = 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 & x \neq 0 \end{cases} \quad [\alpha = 5]$$

$$14. f(x) = \begin{cases} -(x - \alpha)^2 & x \geq 0 \\ \frac{1-e^{x^3}}{\sin^3 x} + 2 & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad [\alpha = \pm 1]$$

$$15. f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} & x \geq 0 \\ (x - \alpha)^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad [\alpha = \pm 1]$$