-Supponendo che sia vero che «se uno non studia inglese da bambino, da adulto non saprà bene l'inglese», quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A se un adulto non sa bene l'inglese, da bambino non ha studiato inglese

B se un bambino studia inglese, da adulto saprà bene l'inglese

C se un adulto sa bene l'inglese, da bambino ha studiato inglese

Supponendo che sia vero che "can che abbaia non morde", si può dedurre che . . . . .
(*scrivere l'implicazione contronominale*)

Qual è la negazione della frase «tutti i numeri dispari sono primi»?

A) tutti i numeri pari sono primi
B) nessun numero dispari è primo
C) esiste un numero pari primo
D) esiste un numero dispari che non è primo

Qual è la negazione della frase «tutti i numeri dispari sono divisibili per 3»?

A) tutti i numeri pari sono divisibili per 3
B) nessun numero dispari è divisibile per 3
C) esiste un numero dispari non divisibile per 3
D) esiste un numero pari divisibile per 3

ancora su teoremi e dimostrazioni

educare alla dimostrazione è un processo lungo

Un teorema è un enunciato che si dimostra, all'interno di una determinata *teoria*.

Talvolta si usano i termini seguenti.

- *Corollario*: è un teorema con una dimostrazione molto semplice.
- *Lemma*: è un teorema che si applica in dimostrazioni successive.
- *Criterio*: esprime una condizione sufficiente perché una determinata proprietà sia soddisfatta (criteri di uguaglianza triangoli, criteri di convergenza di una serie).

Quando si parla di un teorema, quasi sempre si fa riferimento all'*ipotesi* e alla *tesi*. Tuttavia, *non è vero che ogni teorema ha un'ipotesi e una tesi*. Per esempio:

- esistono infiniti numeri primi;
- tre punti qualunque sono contenuti in una retta o in una circonferenza

Una **dimostrazione** è *un ragionamento mediante il quale si stabilisce la correttezza dell'enunciato di un teorema*.

Se l'enunciato del teorema è del tipo
«*per ogni triangolo ...*» o «*per tutte le funzioni...*»,
allora il ragionamento non potrà limitarsi a verificare l'enunciato in alcuni casi particolari, ma dovrà avere carattere generale.

Una dimostrazione sostituisce *infinite* verifiche. Non siamo in grado di verificare per *tutti* gli interi che «la *somma di un numero intero con il suo quadrato è pari*»; e un controllo in un numero finito di casi non ci dà garanzie; invece, *una* dimostrazione ci permette di stabilire che l'enunciato è corretto.

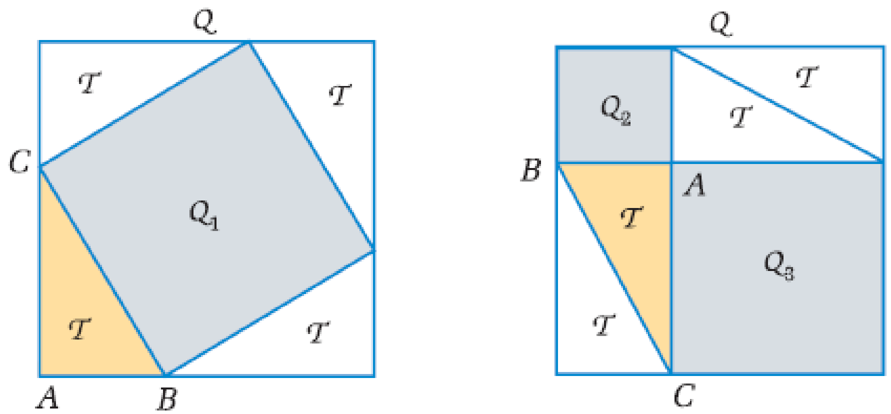
In geometria non possiamo trarre conclusioni da una figura costruita con un software geometrico (anche perché un pixel sullo schermo ha dimensioni diverse da zero).

Il concetto di dimostrazione è uno dei punti fondamentali di tutta la matematica, nella ricerca e nell'insegnamento.
N. Bourbaki: «*Far matematica, dopo i Greci, vuol dire dimostrare*»

Nelle Superiori si parla di teoremi e dimostrazioni in maniera esplicita e sistematica, ma è bene proporre qualche semplice dimostrazione già nella Scuola Media.
È bene usare esplicitamente le parole dimostrazione e teorema anche in algebra (esempi: prodotti notevoli e formula risolutiva delle equazioni di secondo grado).

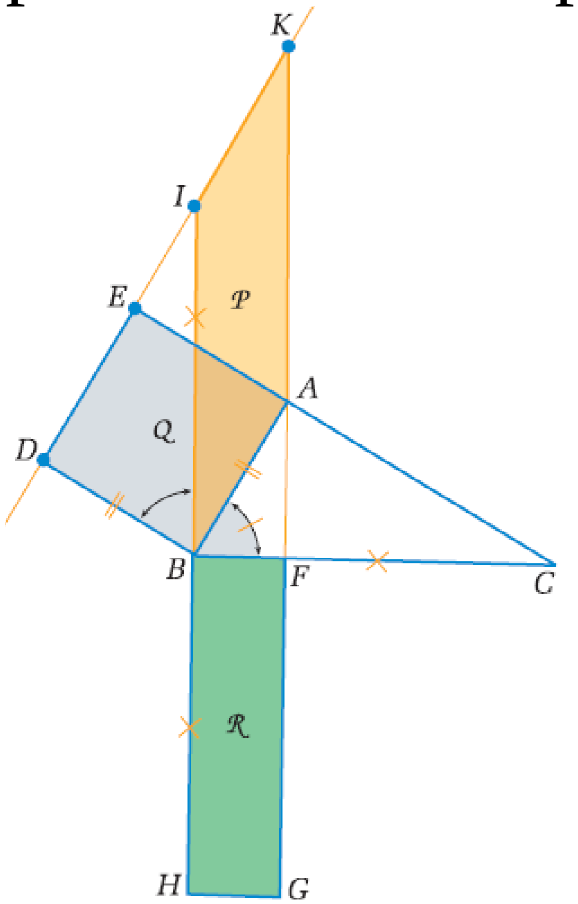
Teorema di Pitagora.

Dimostrazione per differenza



Si costruisce il quadrato che ha per lato la somma dei cateti.

Se si introduce l'equivalenza con l'*equiscomponibilità* (poligoni somme di poligoni uguali sono equivalenti), non è facile dimostrare che due poligoni che si ottengono per differenza di poligoni uguali sono equiscomponibili.

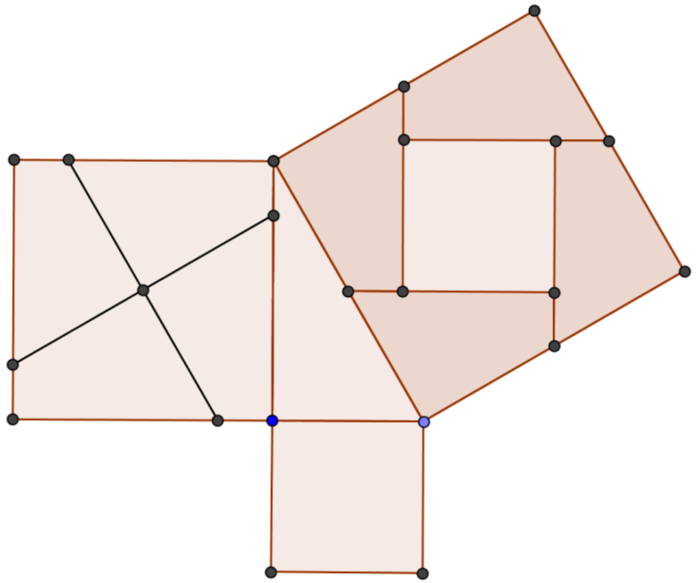


Dimostrazione classica, via il primo teorema di Euclide.

Parallelogrammi con la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.

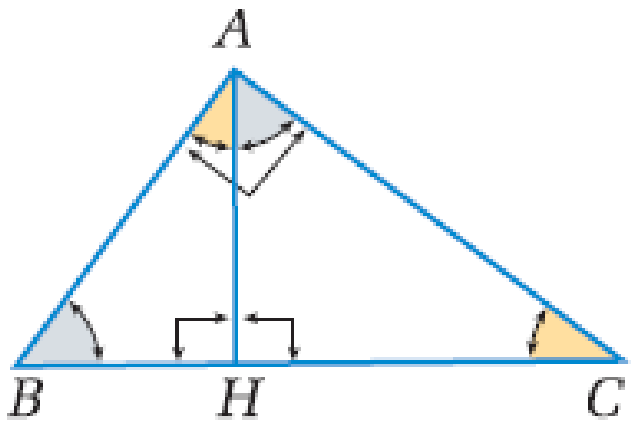
Quindi: Q equivalente a P; P equivalente ad R.
In conclusione: Q equivalente a R
(e analogamente per l'altro cateto).

Dimostrazione per scomposizione in parti uguali



I vari pezzi sono solo *traslati*. Nel quadrato costruito sull'ipotenusa si considerano i punti medi dei lati e si tracciano parallele ai cateti.

Dimostrazione per similitudine.



BC : BA = BA : BH
e si ottiene subito il primo teorema di Euclide

Una generalizzazione. Invece che costruire tre quadrati, si costruiscono, sui lati di un triangolo rettangolo, tre figure simili (per esempio, tre semicerchi). La figura costruita sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle altre due.
La dimostrazione è facile: figure simili stano fra loro nello stesso rapporto dei quadrati di segmenti corrispondenti.

Alcuni criteri nella scelta di una dimostrazione

facilità comprensione, facilità memorizzazione, naturalezza, chiarezza deduttiva, generalità, legami con assiomi, legami con altri teoremi, bellezza, possibilità di tradurre in metafora.

torniamo alle implicazioni

In matematica sono frequenti le locuzioni:

X *è* **condizione sufficiente** *per* Y,

Z *è* **condizione necessaria** *per* W.

Dire che una condizione X è *sufficiente* per Y, significa che X basta, è sufficiente per concludere Y. Si tratta, quindi, di un altro modo di esprimere l'implicazione X $\rightarrow$ Y.

Per esempio, «*il fatto che un quadrilatero sia un rettangolo è condizione sufficiente perché le diagonali di quel quadrilatero siano uguali*» equivale a «*se un quadrilatero è un rettangolo, allora le diagonali sono uguali*».
Invece, dire che una condizione Z è *necessaria* per W, significa che, perché W sia soddisfatta, deve essere necessariamente soddisfatta anche Z, cioè che W può essere vera solo nel caso in cui Z è vera.
Si tratta di un modo di esprimere l'implicazione W $\rightarrow$ Z.

Per esempio, la frase:
«*condizione necessaria perché un poligono sia regolare è che sia inscrivibile*» equivale a
«*se un poligono non è inscrivibile, non può essere nemmeno regolare*», e quindi a
«*se un poligono è regolare*, *allora è inscrivibile*».

Riassumendo, è la stessa cosa dire:

$A \rightarrow B$,	A è condizione sufficiente per B,
$\neg B \rightarrow \neg A$,	B è condizione necessaria per A

per esempio, partiamo da
«*se un numero è multiplo di* 6, *allora è pari*»

abbiamo le tre affermazioni equivalenti:

«*se un numero non è pari*, *allora non è multiplo di* 6»;
«*condizione sufficiente perché un numero sia pari è che sia multiplo di* 6»;
«*condizione necessaria perché un numero sia multiplo di* 6 *è che sia pari*».

Se sono teorema sia A → B sia B → A, si dice che A è *condizione necessaria e sufficiente* per B. Per esempio: «*condizione necessaria e sufficiente perché un quadrilatero convesso sia inscrivibile è che abbia gli angoli opposti supplementari*».

Per mostrare che un'implicazione *non* è corretta, si costruisce un *controesempio*, cioè una situazione in cui vale l'ipotesi ma non la tesi.

Per mostrare che $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$ è sbagliata,

si deve dimostrare che $\exists x\, [P(x) \wedge \neg\, Q(x)]$.
Se troviamo un elemento x_0 che soddisfa P ma non soddisfa Q, allora concludiamo che non vale l'implicazione iniziale.

Si può parlare di controesempi fin dalla Scuola Media. Perché è sbagliato affermare che «*tutti i numeri pari sono multipli di* 6»? Basta considerare un singolo caso: «8 *è un numero pari*, *che non è multiplo di* 6».

esercizio assegnato in una gara per studenti delle Superiori (*Gara a Squadre – Roma* 2008)

Le seguenti affermazioni sono tutte errate. Per quale di esse il numero $n = 17$ è un controesempio?

A Se un numero n è primo, allora è dispari

B Condizione sufficiente perché un numero n sia primo è che non sia divisibile né per 2 né per 3

C Se un numero n non è primo, allora è divisibile per il quadrato di un numero primo

D Un numero n che superi di 1 un quadrato è primo

E Condizione necessaria perché un numero n sia primo è che sia la somma di due primi.