Esercizi settimana 2: serie

Tutoraggio di Analisi Matematica (a.a. 2017/18)

- Determinare il carattere delle seguenti serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^n$ [converge]

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!(e+1)^n}n$ [converge]

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n+1}{n-1}$ [converge]

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}$ [converge]

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^4-n^2+\log n)\arctan\left(\frac{2}{n^5}\right)$ [diverge]

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}-1\right)}$ [diverge]

- Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere delle seguenti serie:

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |\log(1+\alpha)|^n \qquad \alpha > -1$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha+1}}{\tan\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\arcsin\frac{1}{n^\alpha}\right)n^{3-\alpha} \qquad \alpha > 0$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3(7^{\alpha+2})^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left[2(\log n)^{\alpha-7}\right]^n}{n^2}$

Soluzioni:

7. converge per $\frac{1}{e}-1<\alpha<e-1$, diverge per $-1<\alpha<\frac{1}{e}-1$ e per $\alpha>e-1$
8. converge per $\alpha<-\frac{5}{2}$, diverge per $\alpha>-\frac{5}{2}$
9. converge per $\alpha>2$, diverge per $\alpha<2$
10. converge per $\alpha\geq\frac{\log 4}{\log 7}-2$, diverge per $\alpha<\frac{\log 4}{\log 7}-2$
11. converge per $\alpha<7$, diverge per $\alpha\geq 7$

- Stabilire per quali valori di $\alpha>0$ le seguenti serie convergono:

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha}$ [$\alpha>1/2$]

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n^{\alpha}}-1\right) n^{1-\alpha}$ [$\alpha>2/3$]

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^{\alpha}}}-1\right) n^{2-\alpha}$ [$\alpha>3/2$]

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\alpha}-1\right] n^{4}$ [$\alpha>5/2$]

- Studiare convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+2(-1)^n n}$ [converge assolutamente e semplicemente]

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+\log n}{n^2}$ [converge semplicemente]

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)e^{-2n}\log n}{n}$ [converge assolutamente e semplicemente]

    [Suggerimento: riscrivere $\cos(n\pi)$ studiandone l'andamento al variare di n.]

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n+n^2+(-1)^n(n-n^2)}$ [non converge]

    [Suggerimento: studiare in maniera separata l'andamento del termine generale della serie per n pari e per n dispari.]

- Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge semplicemente e assolutamente:

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2n} \right]$

Soluzione:
La serie converge semplicemente per $(-1-\sqrt{5})/2 \le x \le (-1+\sqrt{5})/2$ e converge assolutamente per $(-1-\sqrt{5})/2 < x < (-1+\sqrt{5})/2$.