Oscillazioni

significato di $f = -kx$ ("forza elastica")

Se il punto è fermo in x=0, la forza è nulla

il punto x=0 è tale che se mi allontano da esso verso destra o verso sinistra, la forza si oppone allo spostamento

si tratta quindi di una "forza di richiamo"

la dinamica che corrisponde a questa forza è una oscillazione

la soluzione dell'equazione del moto generato da una forza elastica è una sinusoide perfetta: "moto armonico"

condizione: il punto x=0 è una posizione di equilibrio stabile

La forza elastica non è l'unico esempio di forza di richiamo, tutte le forze di richiamo danno vita ad una oscillazione, ma non tutte le forze di richiamo sono puramente elastiche

in prima approssimazione (approssimazione delle piccole oscillazioni) tutte le forze di richiamo sono armoniche

oscillazioni e moto armonico

abbiamo una oscillazione

- in ogni intorno di un punto di equilibrio stabile
- oppure in ogni minimo dell'energia potenziale
- oppure per ogni forza di richiamo

e in tutti questi casi

- le piccole oscillazioni sono armoniche

il moto armonico

raggio, velocità e accelerazione del moto armonico

- $x(t) = r \cos(\omega t)$
- $v(t) = -\omega r \sin(\omega t)$
- $a(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$
- la costruzione geometrica delle derivate

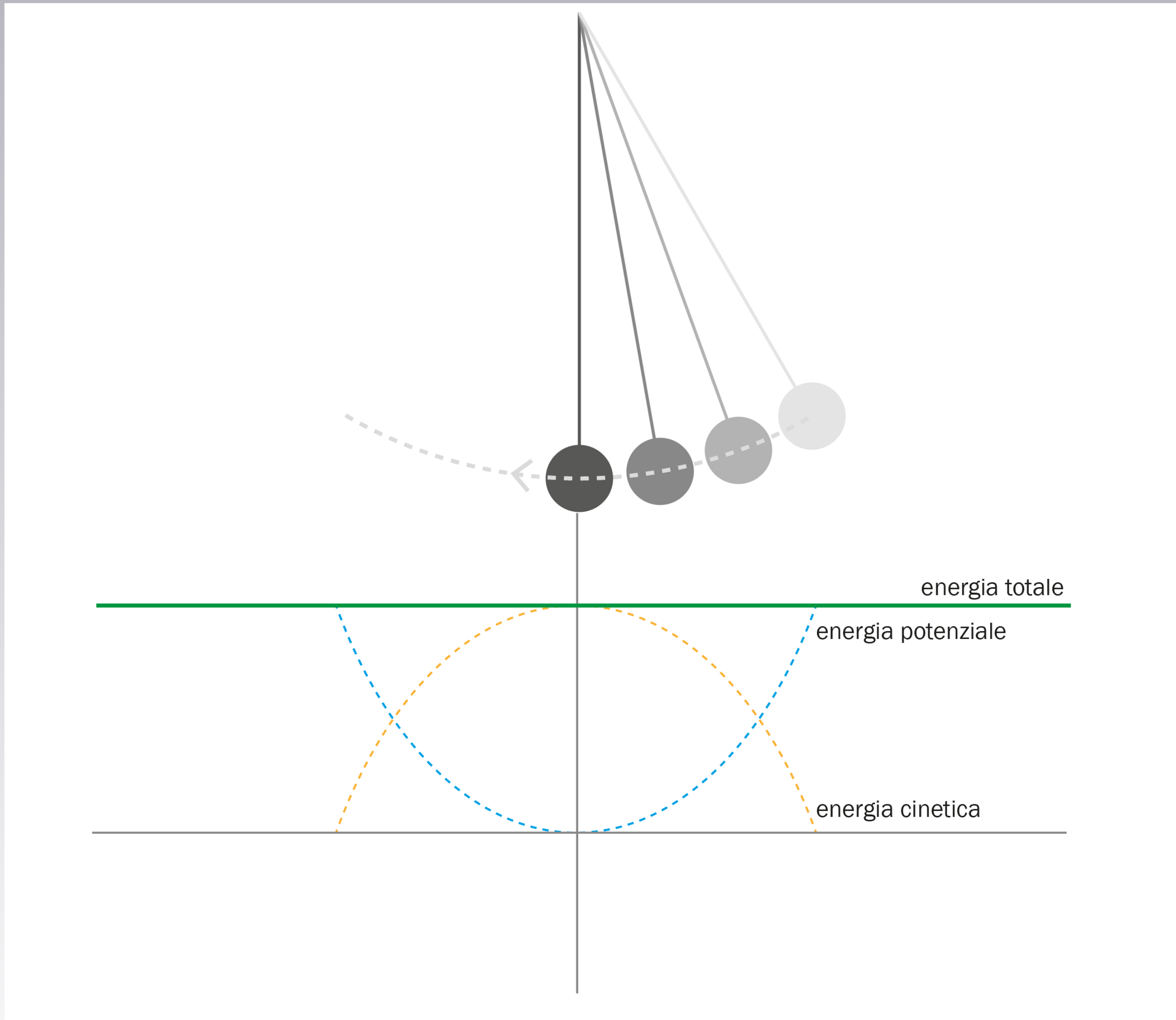
la forza nel moto armonico

- $f = ma$
- $f = -m\omega^2 x = -kx$
- se $-kx(t) = -m\omega^2 x(t)$ avremo $\omega^2 = k/m$
- la prima equazione differenziale

la conservazione dell'energia (senza integrali)

- $T = 1/2\ m\ v^2(t) = 1/2\ m\ v_{max}^2 \sin^2(\omega t)$
- $E = T + U = 1/2\ m v_{max}^2 = 1/2\ m\ \omega^2 x_0^2$ (costante)
- $U(x) = 1/2\ m\ \omega^2 x_0^2 (1 - \sin^2(\omega t)) = 1/2\ m\ \omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t) = 1/2\ k\ x^2(t)$

l’energia nel moto armonico



oscillazioni

1. Le leggi che governano il moto armonico possono essere ricavate in maniera completa e rigorosa utilizzando principi fisici di base e strumenti matematici piuttosto semplici.
2. Per piccole oscillazioni, qualunque sistema oscillante si può approssimare con un moto armonico.
3. E’ piuttosto agevole riconoscere il rispetto di queste leggi nel comportamento di semplici oggetti come una molla, un lampadario che oscilla o un’altalena. Addirittura è possibile realizzare con poco sforzo qualche oscillatore meccanico su cui fare osservazioni e verifiche e poi complicare via via gli esperimenti, ad esempio realizzando l’accoppiamento di due (o più) di questi oscillatori.
4. Infine si può man mano scoprire che nel mondo che ci circonda moltissime cose, tra loro diversissime, si comportano in realtà come oscillatori. Le semplici leggi che avremo imparato ci aiuteranno quindi ad interpretare e comprendere fenomeni tra loro molto lontani per natura (dagli oscillatori meccanici ai circuiti elettrici) e per dimensioni (dalla scala atomica alla interpretazione delle orbite ellittiche dei pianeti).

le leggi di Keplero

In generale, in un campo centrale si conservano energia e momento angolare

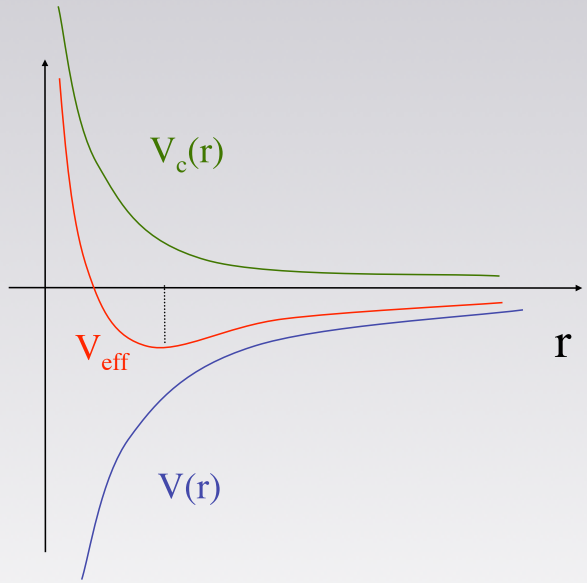
$$E = T + V = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) = \text{costante}$$

$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}} = \text{costante}$ il che implica anche che il moto si svolga su un piano

$J = mr^2\dot{\vartheta}$ il che implica una velocità areolare costante

$$E = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) = \text{costante}$$

L'energia si può quindi esprimere come una funzione di un'unica variabile r. Tutto il moto si può quindi analizzare come quello di un punto materiale che si muove lungo r sottoposto ad un potenziale "efficace", che per il moto di un pianeta intorno al sole diventa:



$$V_{eff} = \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

interpretazione del potenziale efficace

In un riferimento rotante col pianeta, questo è soggetto alla gravitazione, attrattiva e alla forza centrifuga, repulsiva.

E' facile verificare che V_c rappresenta il potenziale della forza centrifuga:

essendo $\dot{\vartheta} = \dfrac{J}{mr^2}$

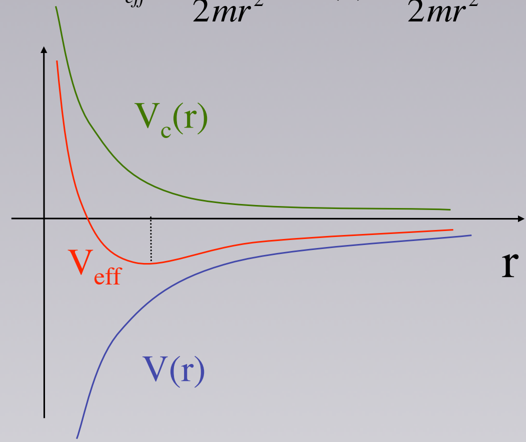
si ha

$$f_c = mr\dot{\vartheta}^2 = \frac{J^2}{mr^3}$$

$$V_c = -\int f_c\, dr = -\int \frac{J^2}{mr^3} dr = -\frac{J^2}{m}\int \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2}\frac{J^2}{mr^2}$$

barriera centrifuga

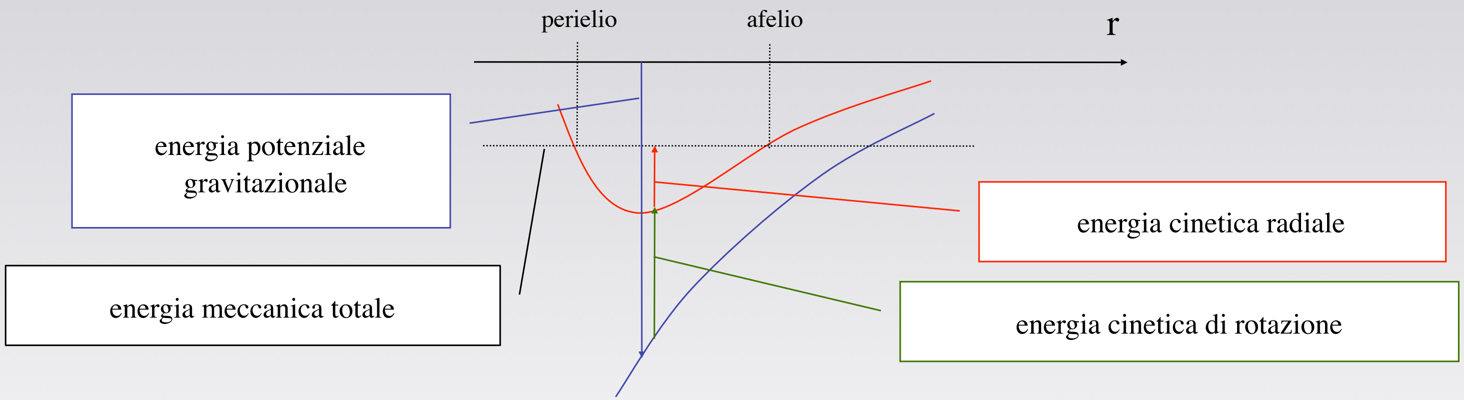
$$V_{eff} = \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{J^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m_p}{r}$$



Per piccoli r, domina V_c, per cui il pianeta non può cadere sul Sole, a grandi r domina V

Il pianeta non può allontanarsi indefinitamente se E<0.

Se E coincide col minimo di V_{eff}, l'orbita è perfettamente circolare, altrimenti il pianeta oscilla tra afelio (r_{max}) e perielio (r_{min}), descrivendo un'orbita ellittica.



generalità del risultato

qualunque sistema a due corpi che si attraggono

(dalle molecole biatomiche alle stelle doppie)

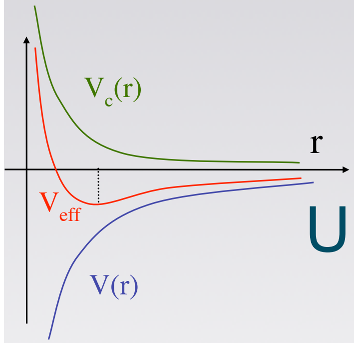
ha un potenziale analogo a quello di un pianeta intorno al sole: potenziale attrattivo + barriera centrifuga

(coservazione del momento angolare e dell’energia)

conseguenze della barriera centrifuga

forma a disco delle galassie: la attrazione gravitazionale può contrarre la galassia solo nella direzione ortogonale al piano di rotazione, mentre su di esso la barriera centrifuga contrasta la contrazione

aumento dell'energia per contrazione: un corpo in rotazione che perda energia (per attrito, irraggiamento ecc.) aumenta paradossalmente la sua energia cinetica: infatti, diminuendo il momento angolare, il sistema si sposta verso raggi minori, ossia verso valori del potenziale gravitazionale maggiori in modulo. Quindi T=-V/2 aumenta.



Una nuvola di gas in rotazione che perde energia per irraggiamento si contrae, aumentando la sua energia cinetica (e quindi la sua temperatura): questo è il meccanismo che innesca la combustione stellare.

conclusione sui principi della dinamica

Li troverete esposti secondo la formulazione classica su quasi tutti i libri di testo, ci dovrete convivere.

Ricordatevi almeno di aggiungerci come **principio zero la relatività galileiana**, ossia l'equivalenza tra sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo e uniforme, o ancora l'impossibilità di distinguerli stabilendo quale dei due è in quiete o in moto, **fondandolo, come Galileo, sulle osservazioni sperimentali**.

e di **formulare il primo principio come l'esistenza di sistemi inerziali,** definiti come quelli nei quali **un punto isolato fermo rimane fermo**, ossia, grazie al principio zero, quelli in cui i punti isolati si muovono di moto rettilineo e uniforme

indicazioni didattiche minimaliste

- sviluppare rapidamente i tre principi del modello standard (con gli accorgimenti ricordati)
- sottolinearne le basi sperimentali (aggiungendo a quelle già citate la conservazione della quantità di moto e del momento angolare di un sistema isolato)
- introdurre ed usare i teoremi dell'energia cinetica e dell'impulso
- introdurre prima possibile l'energia potenziale come energia legata alla posizione nello spazio
- collegare (sperimentalmente) la forza alla variazione nello spazio dell'energia potenziale

propagazione per onde

- onde, ottica
- interferenza
  - l’interferenza in laboratorio
- diffrazione e principio di indeterminazione

Fisica Moderna

- relatività ristretta
- teoria dei quanti
- struttura atomica e subatomica
- le particelle elementari
- l'evoluzione dell'universo
- la relatività generale

dimensione teorico/concettuale, dimensione sperimentale e dimensione tecnologica

generalmente si tende a privilegiare la prima

invece le tre dimensioni emergono in maniera evidente quando si affronta la struttura atomica e subatomica:

- come facciamo a sapere che la struttura è proprio quella?
- non ce lo può dire certo né la relatività, né la meccanica quantistica

va notato che le scoperte sperimentali sono in genere molto più semplici da descrivere che non le teorie conseguenti

relatività ristretta

i due postulati:

- equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali: le leggi fisiche sono le stesse in tutti i riferimenti in moto rettilineo e uniforme tra di loro
- invarianza della velocità della luce

combinati con i principi di invarianza e conservazione

l’energia totale, la quantità di moto e il momento angolare di un sistema isolato si conservano

discussione sull'insegnamento della relatività ristretta

"Relativamente semplice"
(articolo di G. Battimelli)

- invarianza della velocità della luce ed equazioni di Maxwell
  (però l'interferometro di Michelson-Morley è così affascinante!)
- non si può capire Lorentz senza Galilei
- "costruire" le trasformazioni di Lorentz
- chiarire esattamente quando la relatività diventa importante
- dare il giusto peso agli invarianti, piuttosto che alla relatività!
- rivisitare le leggi e i concetti della dinamica (quantità di moto, energia e loro conservazione) e il loro rapporto con le simmetrie dello spaziotempo
- conseguenze sperimentali della relatività ristretta
  - dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze
  - trasformazione di massa in energia

Da Maxwell a D'Alambert

Eq. di Maxwell

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu J$$

nel vuoto:

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

ricordiamo la proprietà del rotore $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} - \text{grad}(\text{div } \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$

applichiamo il rotore alla terza $\text{rot}(\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = 0 \rightarrow -\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t} = 0$

usiamo la quarta $-\nabla^2 \vec{E} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ eq. di d'Alembert

La luce (onda elettromagnetica) viaggia con velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

l’esperimento di Michelson-Morley

misurare le variazioni della velocità della luce rispetto al trascinamento della Terra, per esempio misurando la differenza in tempo di un percorso di un segnale luminoso dalla sorgente allo specchio e ritorno, al variare della direzione rispetto alla velocità della Terra

$$t = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \sim l \cdot 10^{-8}$$

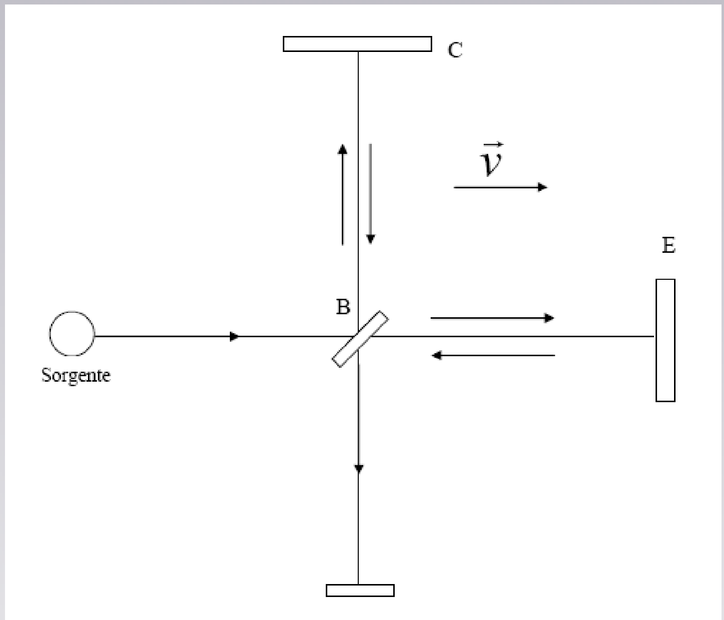
$$v_T = 3 \cdot 10^4 \,\mathrm{m/s}$$

$$\frac{\Delta t}{t} \propto \frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$$

misura assoluta di tempo evidentemente impossibile

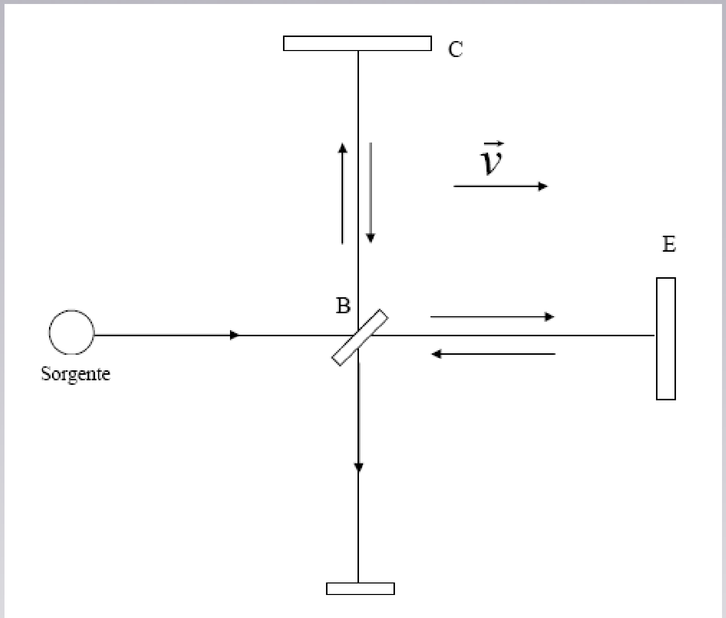
E’ però possibile una misura differenziale interferometrica

l'interferometro di Michelson-Morley



video!

l'interferometro di Michelson-Morley



tenendo conto anche del tempo dovuto al braccio ortogonale a v si ottiene

$$\Delta t \approx \frac{lv^2}{c^3}$$

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

$$\lambda = 590 \text{ nm}$$

$$l = 1 \text{ m} \rightarrow \frac{2l}{\lambda} = 3.4 \cdot 10^6$$

$$\Delta N = 0{,}034$$