MASTER 24 CFU

Matematica

I Lezione

prof.ssa Nicoletta Lanciano

testo da Emma Castelnuovo,
"Pentole, ombre, formiche - in viaggio con la matematica"

(Edizione UTET Università 2017)

Argomento 2

La matematica di tutti i giorni. Problemi di ottimizzazione

2.1 Da una pentola all'altra. Quando i sensi ingannano

È certo capitato anche a voi, e se non vi è capitato, andate in cucina e... provate.

Ho messo dell'acqua nella pentola bassa; poi ci ripenso: no, è meglio quella alta perché voglio cuocere gli spaghetti (fig. 2.1).

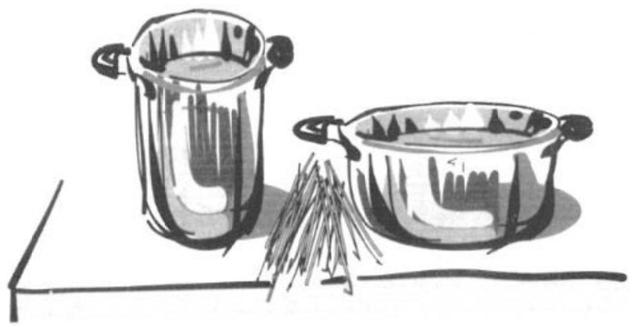


Fig. 2.1

Travaso l'acqua da una pentola all'altra. Ma, nella pentola alta, quell'acqua non c'entra proprio, e sì che nella bassa era molto al di sotto del bordo.

Non ci faccio caso, ma poi... ci ripenso. È vero che il fondo della seconda pentola è più piccolo di quello della prima, ma la pentola è assai più alta.

Riprovo e poi... misuro.

Misuro il diametro di base delle due pentole (spesso non c'è bisogno di prendere le misure perché c'è scritto sul fondo, all'esterno). Sono uno di 12 cm e l'altro di 24; le altezze sono rispettivamente di 16 e di 8 cm. Dunque c'è proprio una compensazione: quando il diametro è doppio l'altezza è la metà, e viceversa. Ma, allora, i due recipienti non dovrebbero contenere la stessa quantità di acqua?

In fig. 2.2 sono disegnate le due pentole «stilizzate», cioè due cilindri.

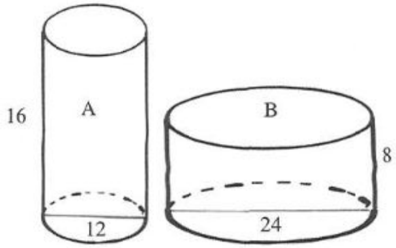


Fig. 2.2

Per confrontare i due cilindri, inserisco quello con la base più piccola (A) dentro quello con la base più grande (B) (fig. 2.3); è come se il cilindro A fosse diviso in due parti uguali: metà dentro il cilindro B e metà fuori.

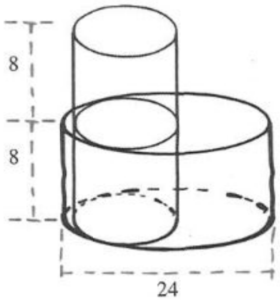


Fig. 2.3

Ci si chiede: le due metà, inserite nel cilindro B, lo riempirebbero completamente? Basta osservare la fig. 2.4 per capire la situazione: i due mezzi cilindri non riempiono certo il cilindro basso!

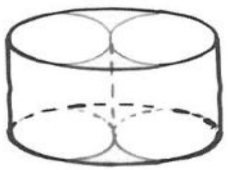


Fig. 2.4

SCHEDA STORICA

Galileo e i due contenitori cilindrici

Galileo nel *Dialogo intorno a due nuove scienze* considera i due cilindri di ugual superficie laterale che si ottengono avvolgendo un foglio di carta per il lungo o per il largo (fig. 2.5); prova che i due volumi stanno fra loro come le altezze *contrariamente prese*.

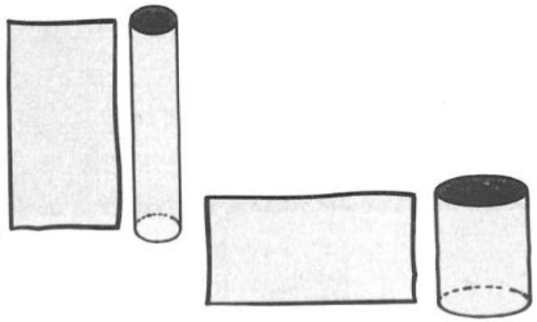


Fig. 2.5

Dice Galileo che la gente è sempre convinta che i cilindri costruiti in tal modo devono avere lo stesso volume. Ecco cosa scrive: «Di qui s'intende la ragione d'un accidente che non senza maraviglia viene sentito dal popolo; ed è come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito: come se, per esempio, la tela per un verso fusse 6 braccia e per l'altro 12, più terrà quando con la lunghezza di 12 si circondi la tavola del fondo, restando il sacco alto braccia 6, che se si circondasse un fondo di 6 braccia, avendone 12 per altezza. Ora, da quello che si è dimostrato, alla generica notizia del contenere più

SCHEDA STORICA

per quel verso che per questo, si aggiunge la specifica e particolare scienza del quanto ei contenga più; che è che tanto più terrà quanto sarà più basso, e tanto meno quanto più alto».
I contadini – sembra voler dire Galileo – hanno imparato la matematica dal loro lavoro, mentre la gente si meraviglia ancora di questo «accidente». E oggi? I secoli sono passati ma... è sempre così!

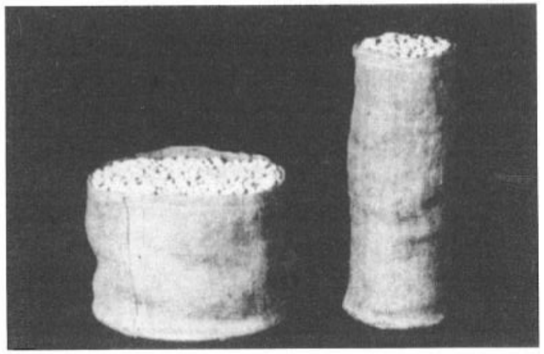


Fig. 2.6

2.2 Piegando un foglio di carta. I due contenitori

Lasciamo ora cucina e pentole per costruire dei contenitori con del cartoncino.

Prendiamo due fogli di carta. Un foglio di carta si può piegare in quattro strisce uguali in due modi: per il lungo e per il largo (fig. 2.7).

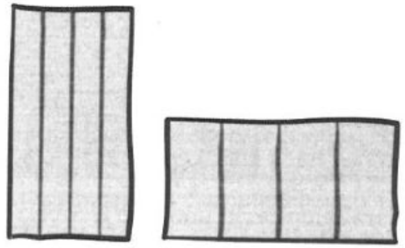


Fig. 2.7

Con due fogli uguali si possono costruire così due parallelepipedi con base quadrata (fig. 2.8).

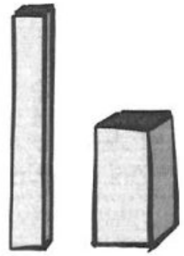


Fig. 2.8

Se invece della carta usiamo del cartone resistente e incolliamo un fondo quadrato, otteniamo due contenitori: uno è più alto ma ha per base un quadrato più piccolo, l'altro è più basso ma la sua base è più grande.

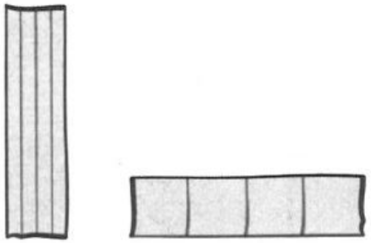
Ci si chiede: questi due contenitori costruiti con fogli uguali hanno lo stesso volume? Cioè contengono la stessa quantità di materiale, per esempio di farina o di riso o...?

È vero che possiamo tornare in cucina con queste due «pentole di cartone» e fare la prova, travasando per esempio del riso da una all'altra, ma, questa volta, cerchiamo di «vedere», di capire senza fare l'esperimento.

Viene voglia di rispondere subito: «certo che hanno lo stesso volume! è evidente: sono costruiti con fogli uguali!» E poi... «si vede»!

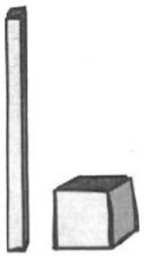
Per «vedere meglio» costruiamo i due parallelepipedi con fogli più stretti, per esempio con la metà di un foglio standard tagliato per il lungo (fig. 2.9).

Fig. 2.9



Otteniamo due parallelepipedi: uno alto e stretto, l'altro basso e largo (fig. 2.10).

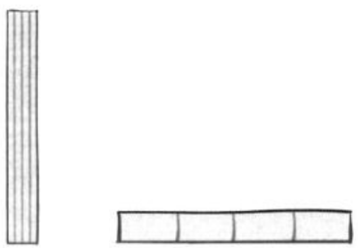
Fig. 2.10



Avranno lo stesso volume? Ora si rimane un po' perplessi.

Allora, altra costruzione: rendiamo le dimensioni del foglio ancora diverse, prendendo per esempio la metà dell'ultimo foglio tagliato per il lungo (fig. 2.11).

Fig. 2.11



Quando andiamo a costruire i due parallelepipedi, ci accorgiamo che uno è sottilissimo quasi fosse un tubicino a sezione quadrata, mentre l'altro ha un'altezza molto piccola ma una base ben larga (fig. 2.12).

Fig. 2.12

Ora si vede bene: no, i due contenitori non possono avere lo stesso volume!

Per convincersene basta tagliare il «tubicino» in 4 parti uguali (fig. 2.13); se inseriamo questi pezzi nel contenitore a base grande ci accorgiamo che rimane molto spazio libero (fig. 2.14). Le figg. 2.13 e 2.14 sono ingrandite per maggior chiarezza.

Fig. 2.13

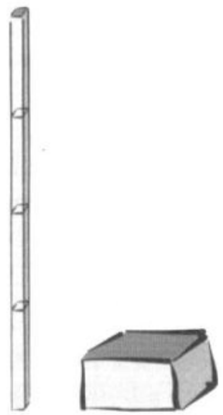
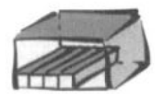


Fig. 2.14



2.3 Come si calcola il volume del parallelepipedo

Riflettiamo ancora sui due contenitori, costruiti piegando un foglio di carta.

Per un confronto sicuro fra i due contenitori occorre calcolare il volume del parallelepipedo. Se non si ricorda la formula, non ha importanza perché è facile capire come si trova. Dato che volume corrisponde a «contenuto», viene spontaneo di ragionare così (fig. 2.15): immaginiamo che la base inferiore del parallelepipedo si sposti,

Fig. 2.15

parallelamente a se stessa, fino ad aver raggiunto la base superiore; tutto il parallelepipedo viene così «spazzato» dal quadrato base che «sale» per un tratto uguale all'altezza. Il volume si otterrà perciò moltiplicando l'area di base per l'altezza. Ecco la formula in simboli:

$$V = A \cdot h$$

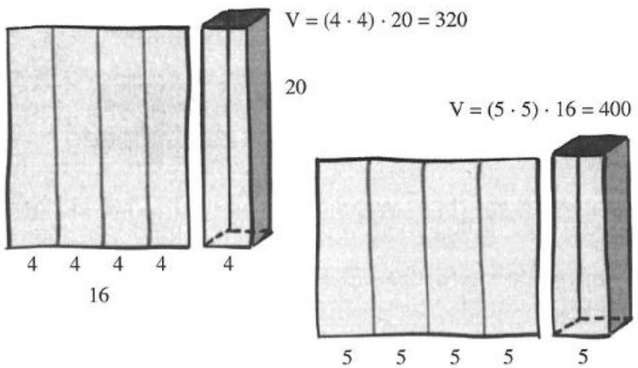
dove V indica il Volume, A l'area di base, e h l'altezza (si usa spesso la lettera h, iniziale della parola *height* che in inglese significa altezza).

Nel caso dei parallelepipedi costruiti prima con la carta, la base è un quadrato e quindi la sua area si ottiene moltiplicando il lato per se stesso, ossia calcolando il quadrato del lato.

Possiamo ora calcolare il volume dei nostri parallelepipedi nei vari casi. Cominciamo dal primo caso, quando le dimensioni del foglio non differiscono di tanto. Per facilitare i calcoli prendiamo un foglio di dimensioni 20 e 16 centimetri. In fig. 2.16 sono disegnati due fogli che hanno queste dimensioni, e, a fianco, sono disegnati i parallelepipedi che si ottengono piegando ogni foglio in 4 parti uguali.

Per ciascuno, è poi calcolato il volume.

Fig. 2.16



Risulta più grande il volume del parallelepipedo meno alto ma con la base più larga. Eppure non si vedeva!

Calcoliamo ora i volumi nel 3° caso, dove, invece, si provava facilmente che i volumi non erano uguali.

Le dimensioni della striscia ottenuta dividendo il foglio in quattro, per il lungo, sono ora 20 e 4.

Ecco allora figure e calcoli relativi a questo caso (fig. 2.17).

Si trova che i volumi differiscono davvero di molto!

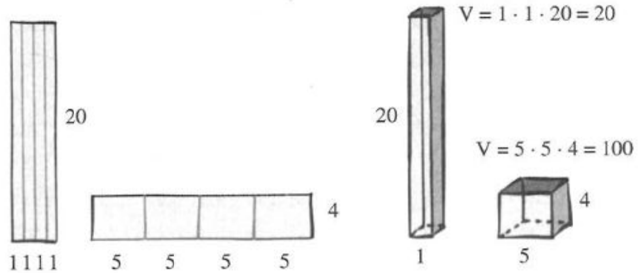


Fig. 2.17

2.4 La scoperta di un rapporto fra i volumi

Esaminiamo meglio l'ultima coppia di contenitori. Il volume del parallelepipedo a base più grande è 100, il volume dell'altro è 20. Risulta quindi che il parallelepipedo basso è 5 volte più capace di quello alto. Osserviamo che il rapporto 1 a 5, che abbiamo trovato fra i volumi dei due parallelepipedi, è proprio il rapporto fra le dimensioni, 4 e 20, del foglio da cui siamo partiti; risulta infatti

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Anche nel primo caso, in cui le dimensioni del foglio sono 16 e 20, si verifica la stessa proprietà; infatti i volumi risultavano 320 e 400, e il rapporto $\frac{320}{400}$ è proprio uguale a $\frac{16}{20}$; si ha infatti:

$$\frac{320}{400} = \frac{16}{20}$$

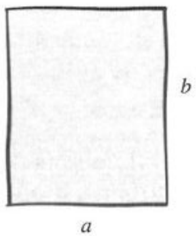
Sarà sempre così? Il rapporto fra i volumi dei parallelepipedi ottenuti con piegature in 4 parti uguali risulterà sempre uguale al rapporto fra le dimensioni del foglio?

Per esserne sicuri non basta provarlo in qualche altro caso; la prova in 100, 1000, ... casi ci dice che è molto probabile che avvenga sempre così, ma non ci dà la certezza assoluta. La certezza si ha se «facciamo astrazione» dai numeri, cioè se al posto dei numeri mettiamo delle lettere. Non ci si deve spaventare perché oggi capita sempre più spesso di usare dei simboli!

Indichiamo allora con *a*, *b* le dimensioni del foglio da piegare (fig. 2.18).

Quando pieghiamo il foglio in 4 parti uguali nei due modi (fig. 2.19), e formiamo i parallelepipedi (fig. 2.20), otteniamo per i volumi i valori indicati a fianco delle figure.

Fig. 2.18



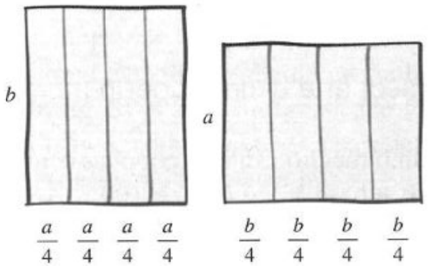
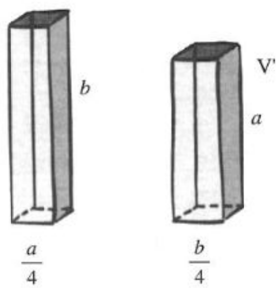


Fig. 2.19

Fig. 2.20

$$V = \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot b = a \cdot \frac{ab}{16}$$



$$V' = \frac{b}{4} \cdot \frac{b}{4} \cdot a = b \cdot \frac{ab}{16}$$

Si ha allora:

$$\frac{V'}{V} = \frac{b \cdot \frac{ab}{16}}{a \cdot \frac{ab}{16}} = \frac{b}{a}$$

Ora possiamo essere certi che il rapporto dei volumi di quei due parallelepipedi è proprio uguale al rapporto delle dimensioni del foglio. Si capisce quindi che se le dimensioni del rettangolo differiscono di molto, altrettanto avverrà per i volumi; mentre il rapporto dei volumi sarà vicino a 1 se è piccolo il divario fra le due dimensioni, e i volumi saranno ovviamente uguali nel caso di un foglio quadrato.

2.5 Costruire parallelepipedi di ugual volume lavorando con cubi

Nel paragrafo 2.2 abbiamo costruito dei parallelepipedi a base quadrata valendoci di fogli di carta uguali; avevano la stessa superficie laterale.

Adesso vogliamo costruire dei parallelepipedi a base quadrata che abbiano lo stesso volume. Lavoriamo con 8 cubetti uguali.

Si possono costruire tre parallelepipedi (fig. 2.21): uno di altezza 8, disponendo i cubi uno sull'altro; uno di altezza 4, ponendo quattro strati di due cubi ciascuno uno sull'altro; e uno di altezza 2, disponendoli a cubo, cioè mettendone quattro su quattro.

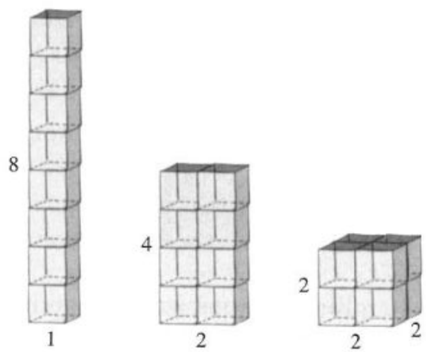


Fig. 2.21

I tre parallelepipedi hanno ovviamente lo stesso volume: è uguale a 8. Ma la superficie è diversa!

Si capisce che il parallelepipedo ha una superficie più piccola quando i cubetti sono «più concentrati», cioè quando la figura è «più compatta», ossia meno esposta all'aria.

È il cubo che, a parità di volume, realizza *la superficie minima*.

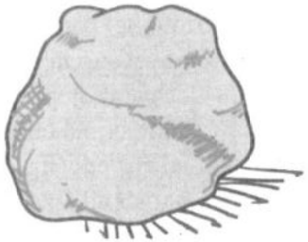
2.6 Costruire solidi di ugual volume lavorando con l'argilla

Abbiamo visto che, a parità di volume, il cubo presenta la superficie minima fra i parallelepipedi.

Ci si chiede: fra solidi che hanno lo stesso volume ma forme diverse, è sempre il cubo ad avere la superficie minima?

Se si vogliono costruire dei solidi di varie forme, i cubetti non vanno più bene; lavoriamo allora con un blocco d'argilla (fig. 2.22).

Fig. 2.22



Cominciamo a costruire proprio un cubo, valendoci dell'argilla (fig. 2.23).

Fig. 2.23

Poi, per rendere l'argilla «più compatta», comprimiamo il cubo esercitando, per esempio, una pressione orizzontale (fig. 2.24).

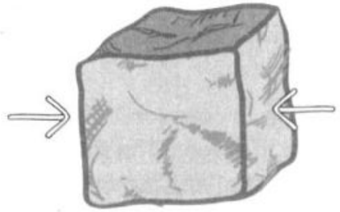


Fig. 2.24

Il solido diventa più stretto, ma più alto (fig. 2.25).

Fig. 2.25

Su questo nuovo solido esercitiamo una pressione verticale (fig. 2.26). L'altezza diminuisce, ma il solido si allarga (fig. 2.27).

Fig. 2.26

Fig. 2.27

E ora ricominciamo a premerlo orizzontalmente; si alza...

Poi lo premiamo verticalmente; si allarga...

Se continuiamo così, si nota che, via via, ad ogni compressione, il solido va rotondeggiandosi sempre di più. «Si sente» che si arriverà *a una sfera*.

E che sia proprio una sfera ce ne renderemo conto nel prossimo paragrafo giocando con le bolle di sapone!

2.7 Le bolle di sapone. Proprietà di minimo della superficie della sfera e del perimetro del cerchio

Le bolle di sapone. Chi non le conosce? Chi non ha giocato e fantasticato davanti a queste palle iridescenti ottenute con l'acqua saponata?

Ma, quando si gioca alle bolle di sapone, non si pensa davvero che in queste palline d'aria ci sia «dentro» la matematica!

Cerchiamo di capire come la matematica imponga le sue leggi anche a questo gioco. Osserviamo le varie fasi (fig. 2.28): si comincia con l'immergere una cannuccia in una bacinella di acqua saponosa; poi si solleva dall'acqua e si soffia nell'estremo asciutto, cioè si immette una certa quantità d'aria. È allora che si forma una palla iridescente: è la bolla di sapone.

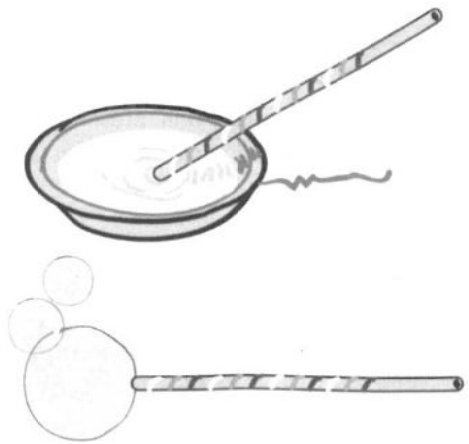


Fig. 2.28

La superficie sferica è formata da uno strato sottilissimo di acqua saponata, strato che trattiene la quantità di aria che abbiamo soffiato.

La bolla di sapone ha come involucro una sottilissima pellicola elastica, e questa pellicola, proprio perché è elastica, tende a contrarsi fino a rendere minima la sua superficie. Il fatto che la pellicola si dispone a sfera fa capire che, a parità di volume, cioè di quantità di aria soffiata, *la sfera ha la superficie minima*.

Continuiamo ora a giocare alle bolle di sapone, mettendo però qualche «ostacolo» alla formazione della sfera. Procediamo così: prendiamo

due lastre di vetro, e, dopo averle inumidite con la soluzione saponosa, disponiamole in modo che siano parallele (fig. 2.29).

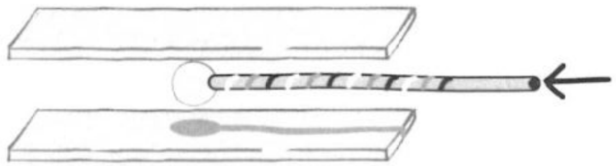


Fig. 2.29

Soffiamo ora una bolla nello spazio compreso fra le due lastre, e osserviamo. Se l'aria soffiata è poca, in quello spazio si formerà una piccola bolla.

Ma se si continua a soffiare, la pellicola, a un certo momento, non avrà più lo spazio per disporsi a sfera; e, di colpo, vedremo apparire un cilindro (fig. 2.30). Il cilindro ha per basi due cerchi disposti sulle due lastre.

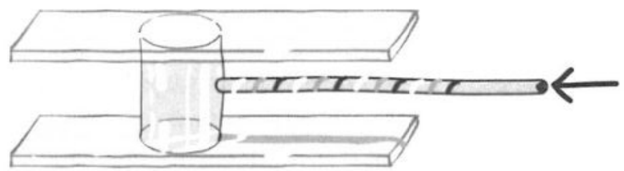


Fig. 2.30

Riflettiamo: ciascuna delle basi di questo cilindro è formata da una lamina saponosa, e quindi elastica; il fatto che la lamina si contrae a cerchio significa che il cerchio ha il contorno minimo fra tutte le figure piane che contengono la stessa quantità di sostanza saponosa. Risulta così che *il cerchio ha, a parità di area, il perimetro minimo*.

Insomma, *fra tutte le figure piane aventi la stessa estensione, è il cerchio che ha il perimetro minimo*.

Il cerchio ha dunque, nel piano, la stessa proprietà che ha la sfera nello spazio.

Abbiamo cominciato con un gioco, ma questo gioco ci ha condotti a scoperte matematiche sulle superfici minime e sui contorni minimi, sotto certe condizioni. Occorre dire che l'idea di studiare le bolle di sapone da un punto di vista scientifico è dovuta a un grande fisico-matematico del secolo scorso: il belga J.-A.-Ferdinand Plateau.

Questi problemi di ottimizzazione – rendere minimo un involucro, rendere minimo un contorno sotto certe condizioni – hanno stimolato fino ai giorni nostri un campo vastissimo di ricerche da parte dei matematici.

2.8 Ragionare per assurdo. Le proprietà ottimali della sfera e del cerchio

Il titolo non deve spaventare: non vuol dire che ci proponiamo di dire delle assurdità! Abbiamo scoperto che:

1) la sfera ha la superficie minima a parità di volume;

2) il cerchio ha il perimetro minimo a parità di area.

Da queste due proprietà ne discendono altre due; si dimostra che:

1') la sfera ha il volume massimo a parità di superficie;

2') il cerchio ha l'area massima a parità di perimetro.

Per rendersi conto che valgono queste ultime due proprietà basta un ragionamento; riferiamoci per esempio al cerchio. Sappiamo che: il cerchio ha il perimetro minimo fra tutte le figure piane che hanno la stessa area.

Consideriamo ora delle figure che hanno lo stesso perimetro; è facile realizzarle: basta prendere come contorno un pezzo di spago e disporlo in vari modi, a quadrato, a triangolo, a cerchio, a... (fig. 2.31).

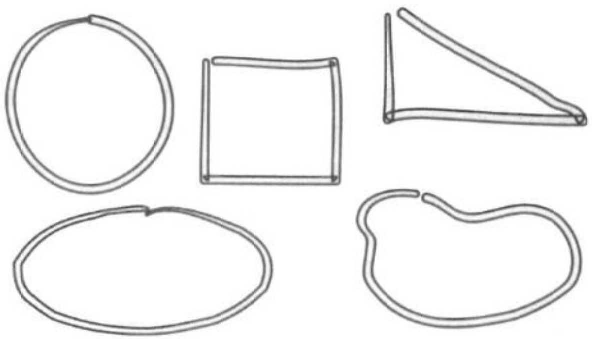


Fig. 2.31

Confrontiamo per esempio il cerchio con il quadrato. Se l'area del cerchio non fosse più grande di quella del quadrato, le due aree sarebbero per esempio uguali. Ma se le aree sono uguali, il cerchio ha, per la proprietà 2), il perimetro minore, e questo è *assurdo* perché abbiamo supposto che le due figure abbiano lo stesso perimetro.

Con un ragionamento analogo si esclude che il cerchio possa avere un'area più piccola del quadrato.

Si conclude che, insieme alle proprietà 1) e 2), valgono anche *le proprietà duali* 1') e 2').

2.9 Le proprietà della sfera nelle applicazioni

Le proprietà della sfera messe in evidenza nel paragrafo precedente permettono di rendersi conto del perché si dà la forma sferica a molte realizzazioni tecnologiche.

Cominciamo con cose «piccole», e torniamo in cucina. Le teiere della marca Stella e di altre marche hanno spesso una forma sferica (fig. 2.32). Non è solo l'estetica che ha suggerito questo tipo di teiera, ma la forma sferica è conveniente perché la teiera occupa poco posto nella credenza pur avendo una grande capacità.

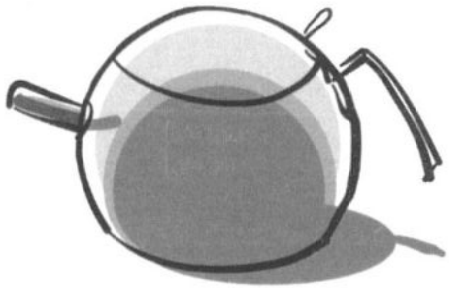


Fig. 2.32

Un esempio, invece, di cose «grandi». Nel volo spaziale del 31 luglio 1992, volo a cui ha preso parte il primo astronauta italiano, alla navetta era collegata una sfera di 1 metro e mezzo di diametro, che serviva anche come contenitore. Ora possiamo capire perché è stata data a questo contenitore la forma sferica: la sfera è, fra le varie forme, quella che realizza il massimo volume, cioè la massima capienza, a parità di involucro.

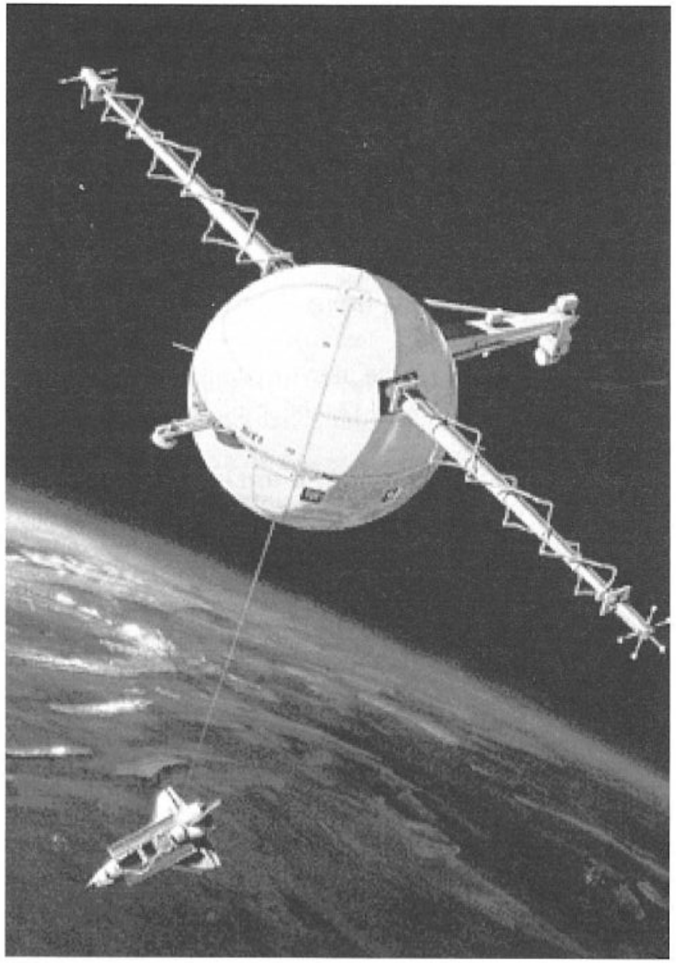


Fig. 2.33 Ecco una rappresentazione fantasiosa dell'esperimento, dove è ben evidenziata la forma sferica del satellite Tethered.

SCHEDA STORICA

La costruzione di Cartagine. Il cerchio in un Dialogo di Galileo

La proprietà del cerchio di racchiudere la massima area a parità di perimetro è nota da tempo e si perde nella leggenda.
Virgilio, nell'Eneide, ci racconta la storia di Didone, e ci fa capire che questa donna, intelligente e ardita, conosceva la proprietà ottimale del cerchio.
Didone (IX sec. a.C.), figlia del re di Tiro, fiorente città della costa fenicia (oggi misera località del Libano), decise di lasciare la sua patria insieme a un gruppo di abitanti della sua città per sottrarsi al potere del fratello Pigmalione. Racconta Virgilio che Didone, giunta per nave sulla costa della Numidia (regione che comprendeva l'attuale Tunisia, fig. 2.34), affascinata dal paesaggio pensò di acquistare una parte di terra per costruirvi una città. Ma il re di Numidia si oppose, e, per prenderla in giro, le offrì una pelle di bue dicendole che, utilizzando solo questa, le concedeva il diritto di limitare il recinto della nuova città.
Didone ebbe l'idea di far tagliare la pelle in strisce sottilissime e di congiungerle una all'altra in modo da ottenere un cordone con cui recintare una parte di terreno. Dispose questo cordone a forma di cerchio (o meglio di semicerchio perché voleva che la città si affacciasse sul mare); è così che, il cordone fatto di pelle di bue formò il recinto di una città ben presto famosa: Cartagine.

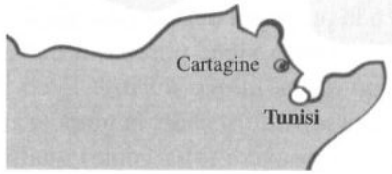
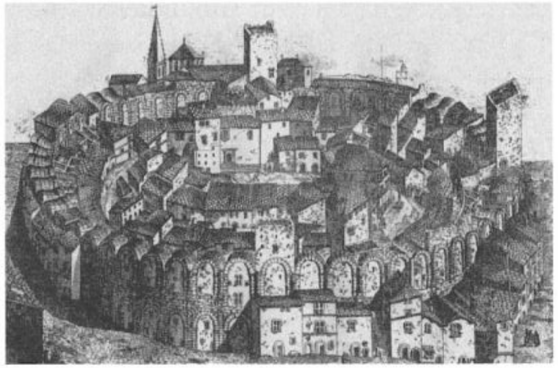


Fig. 2.34

Si capisce allora che Didone, tanti secoli prima di Cristo, era a conoscenza della proprietà: a parità di perimetro è il cerchio che contiene l'area massima.

La proprietà duale del cerchio, quella cioè di avere un perimetro minimo a parità di area, è stata forse utilizzata nel Medioevo, sempre per la costruzione di città. Non sono poche infatti le città, costruite in quel periodo, che presentano forma circolare. La ragione era probabilmente quella di risparmiare sulla lunghezza delle mura di cinta, e, allo stesso tempo, di poter sorvegliare con un numero minimo di uomini gli attacchi che venivano alla città dall'esterno.

Fig. 2.35



Dal punto di vista matematico, una dimostrazione sulle proprietà ottimali del cerchio si trova nell'opera di Pappo d'Alessandria, un matematico greco del III secolo d.C. Sembra certo che Pappo si sia ispirato a un lavoro del matematico greco Zenodoro, vissuto alla fine del II secolo a.C.
Quanti secoli erano ormai passati dalla leggenda di Didone!
Passano ancora dei secoli e la proprietà del cerchio di racchiudere la massima area a parità di perimetro viene portata in discussione da Galileo nel *Dialogo intorno a due nuove scienze*. Ecco cosa dice: «... per determinar, come spesse volte accade, la grandezza di diverse città, intera cognizione par di avere (alla gente) qualunque volta sanno la quantità dei recinti di quelle, ignorando che può essere un recinto eguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello. Il che accade non solamente fra le superficie irregolari, ma fra le regolari, delle quali quelle di più lati sono sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio, come poligono di infiniti lati, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito».
È proprio nel dialogare con gli amici che Galileo sottolinea l'errore, ancor oggi molto comune, di confondere il concetto di area con quello di perimetro. E la proprietà già nota a Didone, quella che il cerchio racchiude area massima a parità di perimetro, viene esposta da Galileo agli amici perplessi... Quanti secoli sono passati!

SCHEDA 1

Un metodo per confrontare volumi

Abbiamo parlato nel paragrafo 2.3 di un metodo che porta a trovare la formula per il calcolo del volume del parallelepipedo.
Abbiamo immaginato che la base del parallelepipedo (fig. 2.36) si sposti parallelamente a se stessa fino a «spazzare» interamente il solido.

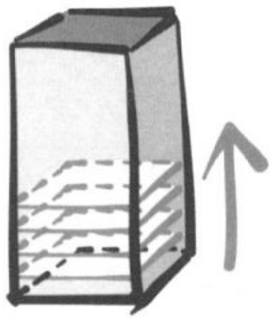


Fig. 2.36

In questo modo si capisce che, per avere il volume, cioè per sapere quale è il contenuto del parallelepipedo, occorre «ripetere» tante volte l'area di base quante ne indica l'altezza; occorre cioè moltiplicare la base per l'altezza. Dunque il volume dipende dall'area della figura piana che si sposta parallelamente a se stessa e dall'altezza del solido.
Questa idea ha condotto nel 1627 un allievo di Galileo, il padre Bonaventura Cavalieri, ad affermare che: *se dei solidi di uguale altezza, segati con piani paralleli a un piano fisso, per esempio al piano della base, danno sezioni di uguale area, allora i solidi hanno lo stesso volume.*

Per capire bene il significato di questa affermazione, che va nota come *Principio di Cavalieri*, osservate la fig. 2.37: sono rappresentati tre solidi di uguale altezza e poggiati sullo stesso piano, uno a base triangolare, uno a base quadrata e uno che ha per base una figura a contorno curvilineo.

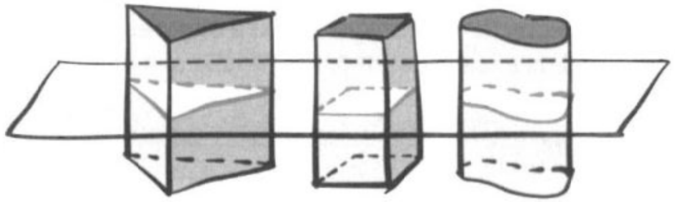


Fig. 2.37

Questi solidi vengono tagliati con piani paralleli alla base. Se risulta che le tre sezioni hanno, a qualunque livello, la stessa area, allora è evidente che la quantità di materiale che costituisce i solidi è sempre la stessa, e dunque i solidi hanno lo stesso volume.