Metodologia didattica e Storia nell'insegnamento della Matematica

Claudio Bernardi
claudio.bernardi@uniroma1.it

Rigore, *intuizione e percezione in matematica; introduzione ed uso - a vari livelli - di definizioni e teoremi*, *linguaggio e formalismo matematico.*

V. Villani, C. Bernardi, S. Zoccante, R. Porcaro,
Non solo calcoli - domande e risposte sui perché della matematica, collana Convergenze, Springer, 2012

capitoli 6, 7, 8, 9, 10, 11

inizio con un episodio spiacevole, che mi è capitato pochi mesi fa

all'Accademia dei Lincei si era da poco concluso un *pomeriggio interdisciplinare*

una persona (non un matematico) racconta:

lui va nella scuola primaria e vede i bambini svegli, attivi, curiosi; poi va alle superiori e trova studenti svogliati, lenti

conclusione: «*la scuola li rovina*»

ho risposto: «*prova a non mandare un ragazzo a scuola*, *così non lo roviniamo*»

la frase «*la scuola li rovina*» è un commento superficiale;

ma vale la pena aggiungere qualche osservazione:

- la scuola potrebbe certamente fare di più
- un bimbo ha più potenzialità e maggiori capacità di apprendimento rispetto a un ragazzo più grande (esempio: apprendimento di una lingua)
- alle superiori gli studenti sanno "scansare gli ostacoli"

alle varie età gli studenti hanno caratteristiche e potenzialità diverse
compito di ogni insegnante è insegnare ai *suoi* studenti, che hanno quella specifica età

una seconda citazione, completamente diversa

Phillip Griffiths è stato Direttore dell'*Institute for Advanced Study* di Princeton negli USA
(in passato ne hanno fatto parte Albert Einstein, Kurt Gödel, John von Neumann, Hermann Weyl)

Griffiths ha citato spesso la sua insegnante di matematica:

«***I can honestly say that the most important person in my own career was Lottie Wilson***»

«***Her love of the subject was "infectious"***»

«***She understood the majesty and mystery of mathematics***»

un insegnante è contagioso: trasmette la voglia di fare (o di non fare), il desiderio di studiare, trasmette il suo gusto tutto ciò è più importante di un capitolo nel programma; a un insegnante si chiede anche voglia di insegnare, passione

insegnamento della matematica = educazione alle regole ??

l'educazione matematica ha un peso rilevante nella *formazione* culturale degli studenti, perché educa:

- *alla precisione e alla concisione di linguaggio*;

- *al ragionamento*, *alla coerenza*, *a uno spirito critico*,
in questo senso la matematica può dare sicurezza;

- *a un metodo*, *alla scoperta di strategie*
saper affrontare un problema è importante in tutti i lavori

- *alla fantasia*, *alla capacità di vedere*, *a rappresentare*

linguaggio* e *ragionamento

a tutte le età, l'educazione matematica contribuisce allo sviluppo della *competenza linguistica*

vediamo alcune semplici frasi (*non* tutte corrette!)

- il prodotto di due numeri è dispari se e solo se entrambi i numeri sono dispari
- il prodotto di due numeri è pari se e solo se entrambi i numeri sono pari
- il prodotto di due numeri è un multiplo di 3 se e solo se almeno uno dei due numeri è multiplo di 3
- il prodotto di due numeri è un multiplo di 4 se e solo se almeno uno dei due numeri è multiplo di 4

- la somma di due addendi è pari se e solo se entrambi gli addendi sono pari
- la somma di due addendi è dispari se e solo se un addendo è dispari e l'altro è pari

- *credo* che mia mamma sia a casa, ma non sono *sicuro*
- l’autobus 64 è *più frequente* del 23
- è *impossibile* che domenica la Roma perda
- sono (*quasi*) *sicuro* di aver fatto bene il tema
- è *possibile* che domani piova, ma *non* è *probabile*
- in matematica è *più facile* prendere 5 che prendere 10

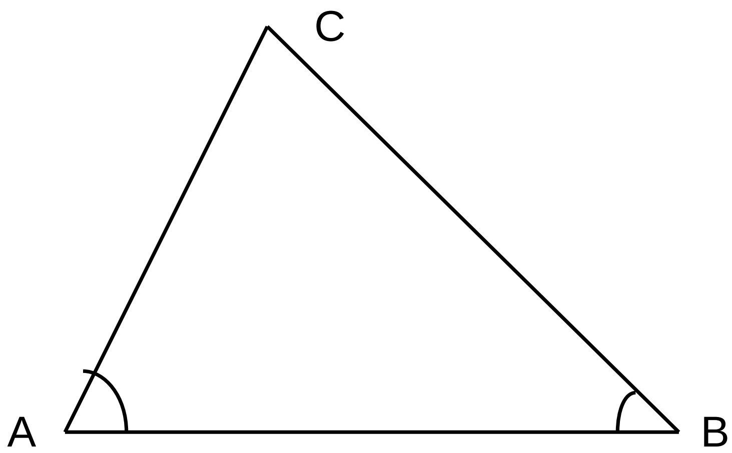
vale la pena dedicare un po' di tempo all'analisi di frasi

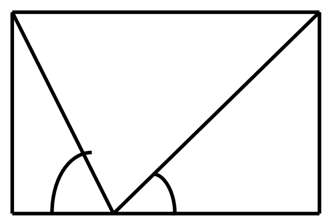
teoremi e dimostrazioni

«*la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto*»

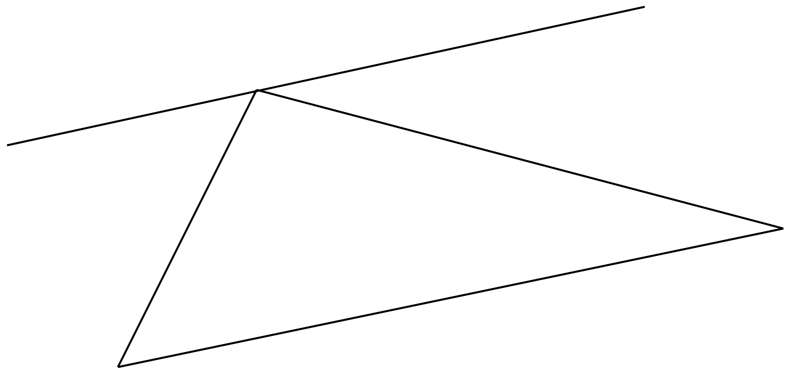
in un primo tempo, *verifica*, per esempio ritagliando un triangolo di carta e accostando gli angoli

è più significativa la verifica che si ottiene considerando i punti medi di due lati e piegando il triangolo





in un secondo tempo, *dimostrazione* con il postulato delle parallele



l'enunciato *non* è un teorema nelle geometrie non euclidee

sulla superficie terrestre ci sono triangoli in cui la somma degli angoli è maggiore di un angolo piatto

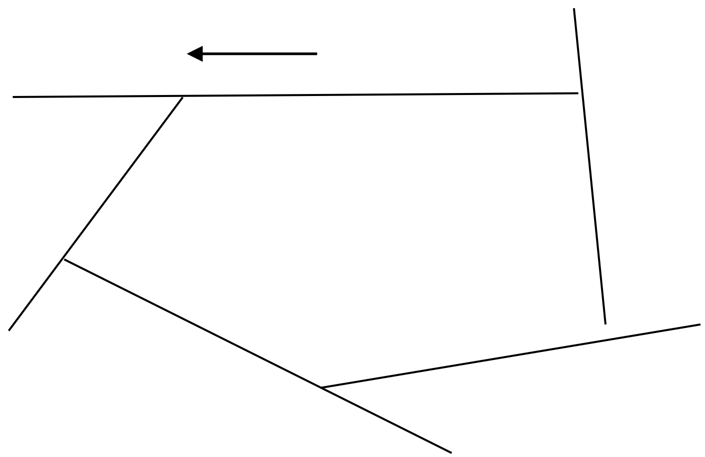
- facciamo altre verifiche con la *piegatura della carta*

per determinare le tre *bisettrici* di un triangolo, si ripiega il triangolo in modo che un lato si sovrapponga a un altro

se ripieghiamo tre volte il triangolo, *verifichiamo* che le tre bisettrici passano per uno stesso punto

analogamente si possono ottenere le *altezze* di un triangolo acutangolo, per verificare che passano per uno stesso punto, ecc.

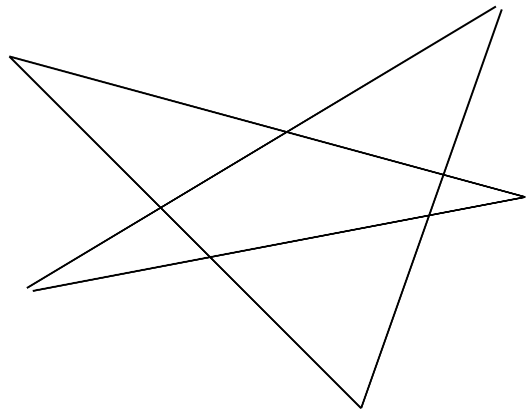
dimostriamo un teorema più generale: *la somma degli angoli esterni di un poligono P è uguale a 4 angoli retti* seguiamo con un fiammifero il contorno di *P*: in ogni vertice *V* di *P* il fiammifero ruota di un angolo (orientato) uguale all'angolo esterno in *V*



il fiammifero fa un giro completo (2 piatti)
la somma degli angoli esterni è ...; la somma di tutti gli angoli interni ed esterni è ...
la somma degli angoli interni è ...

dimostrazione non formale, convincente per la sua immediatezza *visiva*; si applica anche a poligoni *concavi* (qualche angolo esterno va considerato negativo)

qual è la somma degli angoli nelle 5 punte della stella?

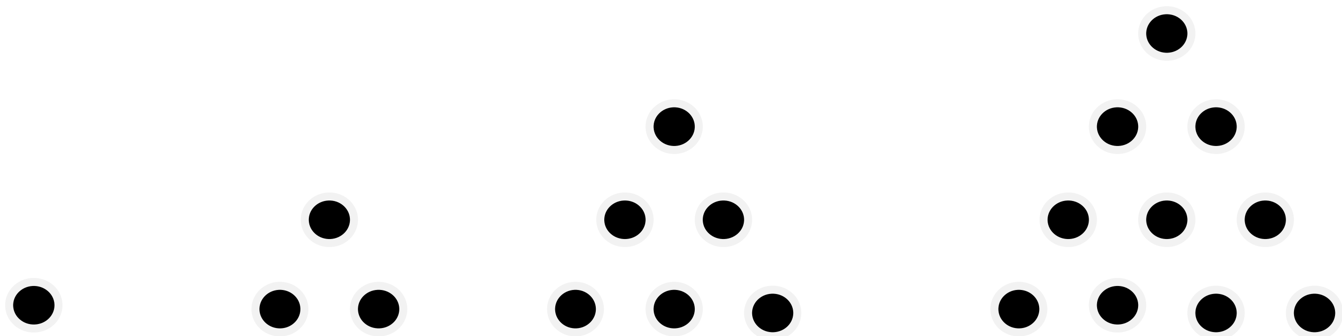


il fiammifero fa 2 giri (4 piatti) che corrispondono alla somma degli angoli ...;
la somma di tutti gli angoli interni ed esterni è ...; la somma degli angoli interni è ...

- un esempio numerico in cui, prima di dimostrare, è utile *esplorare*, *congetturare*, *comunicare*

i *numeri triangolari* sono i numeri che si ottengono come somme dei primi numeri interi positivi:

1 $\quad$ $1 + 2 = 3$ $\quad$ $1 + 2 + 3 = 6$ $\quad$ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $\quad$ ...



1 $\quad$ 3 $\quad$ 6 $\quad$ 10 $\quad$ 15 $\quad$ 21 $\quad$ 28 $\quad$ 36 $\quad$ 45 $\quad$ 55 ...

dove si trovano i numeri pari? perché?

è vero che troviamo un multiplo di 3 ogni tre numeri?

che si può dire della somma di due triangolari consecutivi?
i numeri triangolari sono del tipo $n(n+1)/2$
la somma di due numeri triangolari consecutivi è:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+n+2)}{2}=\frac{(n+1)(2n+2)}{2}=(n+1)^2$$

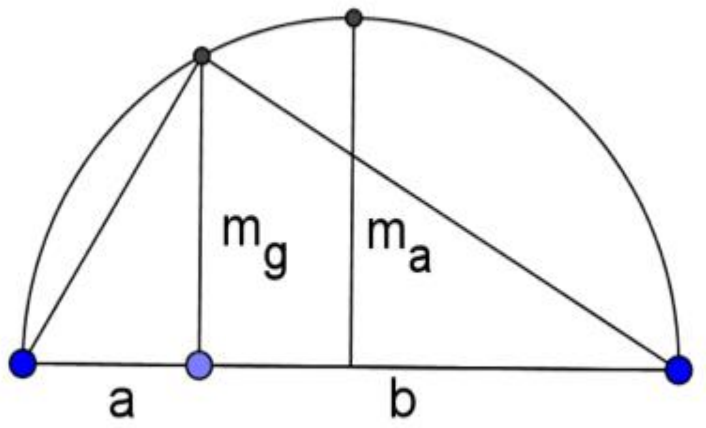
- vediamo ora un esempio in cui una *figura* chiarisce confronto fra *media aritmetica* e *media geometrica* di due numeri positivi *a*, *b*; per via algebrica:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \qquad (a+b)^2\geq 4ab \qquad (a-b)^2\geq 0$$

per via geometrica, *semicirconferenza* di diametro $a+b$:

il confronto fra media aritmetica m_a e media geometrica m_g si riconduce al confronto fra raggio e metà di una corda

risulta anche chiaro che $m_a = m_g$ se e solo se $a = b$



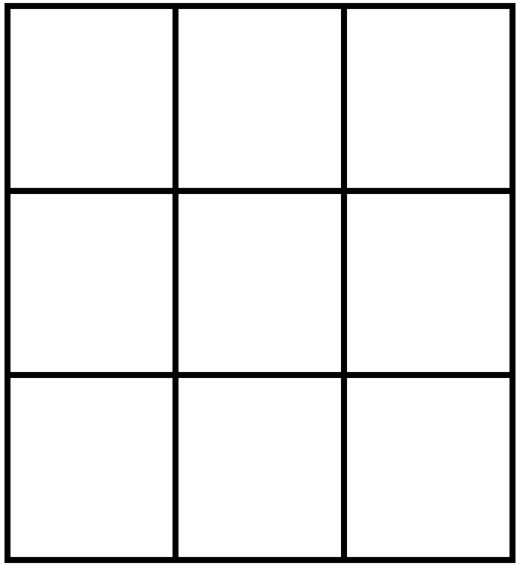
il procedimento algebrico è più semplice;

la dimostrazione geometrica, se capita, è più formativa e più facile da ricordare

due esempi di problemi (non ripetitivi!)

(2017 *Mediterranean Youth Mathematical Championship*)

In ogni casella di una tabella 3×3 *viene scritto un numero intero in modo che la somma di ogni riga e di ogni colonna sia dispari. Fra i nove numeri scritti nelle caselle, quanti possono essere i numeri pari*?



A) 0, 2, 4, 6, 8 B) 0, 2, 4, 6 C) 0, 2, 6

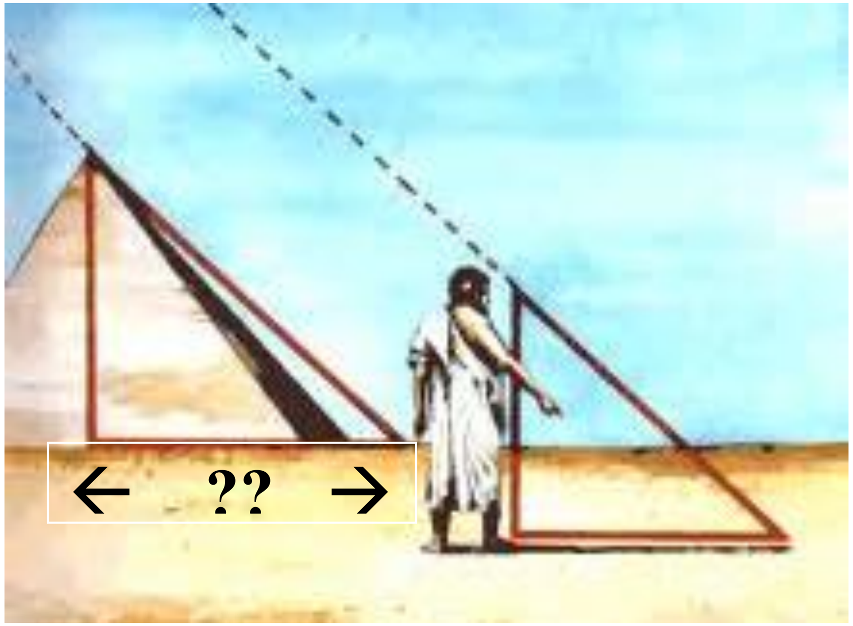
D) 0, 4, 6 E) 0, 4

la somma di tutti i 9 numeri è dispari
i dispari sono in numero dispari e quindi i pari sono in numero pari
una tabella senza numeri pari è accettabile;
8 numeri pari non vanno bene; e nemmeno solo 2 pari (non ci può essere una riga o una colonna con un solo pari);
è abbastanza facile costruire esempi con 4 e con 6 pari
la risposta corretta è ...

<u>vedere nello spazio</u>
Talete misurò l'altezza di una piramide confrontando l'ombra della piramide con l'ombra di un bastone. Descrivere il procedimento di Talete.

ricorrendo alla similitudine abbiamo la proporzione

lunghezza bastone : *ombra bastone* =
= *altezza piramide* : *ombra piramide*



tuttavia, la proiezione sul terreno del punto più alto della piramide non è accessibile propongo un'idea più raffinata:

non si misura la lunghezza dell'ombra,
ma lo spostamento dell'ombra

si mette un segno in corrispondenza alle punte delle ombre della piramide e del bastone;
dopo un po' di tempo, si misura *di quanto si sono spostate le punte* delle due ombre

sempre per similitudine, abbiamo la proporzione:

gli spostamenti delle punte delle due ombre stanno fra loro nello stesso rapporto delle rispettive altezze

le implicazioni

supponiamo che sia vero che

«se vinco al Lotto, allora divento ricco»

si tratta di un'*implicazione*, cioè la frase ha la forma

«se p allora q», che equivale a «p implica q».

<u>se sono ricco</u>, è sicuro che abbia vinto al Lotto?
no: potrei avere ricevuto una cospicua eredità;
<u>se invece non sono ricco</u>, allora è sicuro che non ho vinto al Lotto (se avessi vinto al Lotto, sarei diventato ricco)

partiamo da $p \to q$ e costruiamo le due implicazioni

inversa $q \to p$

contronominale $\text{non } q \to \text{non } p$

l'*inversa* si ottiene scambiando l'ipotesi con la tesi;
l'implicazione *contronominale* si ottiene negando sia l'ipotesi sia la tesi, e scambiandole fra loro

se l'implicazione $p \to q$ è vera, allora è sempre vera anche l'implicazione contronominale non $q \to$ non p
invece, se $p \to q$ è vera, l'inversa $q \to p$ in alcuni casi è vera, in altri è falsa

«se un numero n è un multiplo di 4, allora n è pari» (vera)
«se n non è pari, allora n non è multiplo di 4» (vera)
«se un numero n è pari, allora n è un multiplo di 4» (l'inversa è falsa)

«se un numero è multiplo di 6 allora è pari»
l'inversa è . . .   la contronominale è . . .

domande sul ragionamento logico   (*Sapienza*, 2016 test per l'ammissione a Scienze della Formazione primaria)

- Per sostenere che il proverbio “chi beve birra campa cent'anni” è *SBAGLIATO*, occorre trovare uno che

A) non ha bevuto la birra ed è morto prima di compiere 100 anni
B) ha bevuto la birra ed è morto prima di compiere 100 anni
C) non ha bevuto birra e ha compiuto 100 anni
D) ha bevuto birra e ha compiuto 100 anni

(*la percentuale di risposte corrette è stata l'* 80%)

- Supponendo che sia vero che "se una persona ha l'influenza allora ha la febbre", si può dedurre che

A) se Giovanni non ha l'influenza allora non ha la febbre

B) se Giovanni non ha la febbre allora non ha l'influenza

C) tutti coloro che hanno la febbre hanno l'influenza

D) nessuno di coloro che ha la febbre ha l'influenza

(*la percentuale di risposte corrette è stata solo il* 26%)

- Supponendo che sia vero che «se uno non studia inglese da bambino, da adulto non saprà bene l'inglese», quale delle seguenti affermazioni è corretta?
- se un adulto non sa bene l'inglese, da bambino non ha studiato inglese
- se un bambino studia inglese, da adulto saprà bene l'inglese
- se un adulto sa bene l'inglese, da bambino ha studiato inglese