Soluzione Compito A

1. Nella condizione iniziale la condizione statica della pallina si traduce nella seguente equazione: $\rho_G V/2\ g - mg = 0$.
   Da cui si ottiene la relazione che definisce la densità della pallina ϱ_G all'equilibrio pari a $\rho_S= m/V = \rho_G/2=900\ kg/m^3$. Una volta aggiunto l'olio, la pallina riceve un'ulteriore spinta verso l'alto e la statica del sistema si riscriverà:
   $x\rho_G Vg + \rho_{olio}(1-x)Vg - mg = 0$. In cui x è la frazione immersa.
   Da questa relazione si ottiene:
   $x = (m/V - \rho_{olio}) / (\rho_G - \rho_{olio}) = x = (\rho_S - \rho_{olio}) / (\rho_G - \rho_{olio}) = 0.1$

2. Per il sistema in esame vale la seconda legge di Newton espressa nella forma:
   $F_{ext}= (M+m)a$ (tutte le altre forze, attrito - elastica, sono interne).
   Avremo poi, sulla massa M, poiché M si muove $f_{AS}^{max} + kx \neq F_{ext}$
   $f_{AS}^{max} + kx = Ma$
   $f_{AS}^{max} = \mu_S N = \mu_S mg$
   Ricavando a dalla seconda equazione e sostituendo il valore della forza di attrito statico massima si ottiene:
   $\mu_S mg + kx = MF_{ext}/(M+m)$
   $F_{ext} = (M + m) (\mu_S gm/M + kx/M) = 216.2$ N.

3. I dati iniziali sono: $y_0 = 100$ m, $V_{0y} = 40$ m/s, $t_0 = 1$ s.
   Per il gavettone scriveremo:
   $y = y_0 - 1/2\ gt^2$
   e per la freccia avremo
   $Y = V_{0y} (t-t_0) - 1/2\ g\ (t-t_0)^2$.
   Imponendo y = Y si ottiene che il tempo t* a cui tale condizione si verifica è pari a:
   $y_0 -1/2\ gt^{*2} = V_{0y} (t^*-t_0) -1/2\ g\ (t^* -t_0)^2$.
   Si ottiene quindi:
   $\mathbf{t^* = [y_0 + V_0y\ t_0 +1/2\ gt_0^2]/ (V_0y + gt_0) = 2.9\ s.}$
   A tale tempo la quota d'urto sarà data dalla posizione del gavettone al tempo t*:
   $\mathbf{y_U = y_0 - 1/2\ gt^{*2} = 62\ m.}$

4. Al fine di mantenere in equilibrio l'asta, il cuneo dovrà essere posto SOTTO al baricentro in modo da annullare il momento della forza peso che altrimenti metterebbe in rotazione l'asta. Il calcolo del baricentro (coincidente con il centro di massa) si effettua tramite:
   $x_{CM} = 1/m \int x\ dm = 1/M \int x\ \lambda dx =1/M \int x\ kx\ dx = kL^3/(3M)$
   Considerando che $\lambda = kx$ otteniamo per x_{CM} l'espressione finale integrata:
   $kL^3/3M$ con L = lunghezza totale dell'asta.
   Analogamente la massa totale dell'asta si calcola tramite:
   $\mathbf{M = \int\lambda dx =\int kx\ dx = kL^2/2= 240\ g.}$
   Si ottiene dunque per x_{CM} il valore: $x_{CM}= (kL^3/(3M))(2/(\mathbf{kL^2})) = 2/3L = 0.2667$ m.

5. Essendo il gas biatomico il calore specifico a pressione costante vale c_p=7/2R, il volume iniziale è V_1=nRT_1/p_0 ed il volume finale è V_2 = nRT_2/p_0.
   Il calore scambiato nell'isobara sarà:
   $\Delta Q = nc_p(T_2-T_1) = 39.3$ kJ
   Il lavoro, essendo p_0 costante sarà pari a:
   $L = p_0(V_2-V_1) = 11.2$ kJ.
   infine la variazione di entropia dell'universo sarà pari a:
   $\Delta S_u = \Delta S_{GAS} + \Delta S_{AMB} = \mathbf{nc_p ln(T_2/T_1) - \Delta Q/T_2 = 27.6\ J/K}$

Soluzione Compito B

1. Dalla condizione statica sulla sfera otteniamo:
   $0.5xV_{Sfera}\ \varrho_A g = 2/3\pi\ R_2^3\ \varrho_A g = Mg$ da cui $M = 2/3\pi\ R_2^3\ \varrho_A = 56.6$kg.
   con ϱ_A=1000 Kg/m^3.
   Si calcola dunque la densità del materiale di cui è costituita la sfera tramite:
   $\varrho_S = M /(4/3\pi(R_2^3 - R_1^3)) = (0.5\varrho_A\ R_2^3)/(R_2^3 - R_1^3) = 1845$ k g/m^3.

2. Per ottenere la condizione richiesta cioè che m_2 non si muova rispetto a m_1 dobbiamo imporre che l'accelerazione fornita ad m_2 dalla forza di attrito tra m_1 ed m_2 sia massima ed uguale ed opposta al valore dell'accelerazione del sistema m_1+m_2:
   $a_{(1+2)}= - kx_M/(m_1+m_2)$ mentre $a_2=m_2\mu_s g/m_2=\mu_s g$
   da cui eguagliando si ottiene che l'elongazione massima vale:
   a) $x_M = (m_1+m_2)\mu_s g/k = 0.63$ m (una soluzione alternativa si può ottenere dalle equazioni del moto armonico)
   per calcolare la velocità massima basta ora ricordare che il sistema (m_1+m_2) si muove di moto armonico la cui velocità vale $A\omega\cos(\omega t + \phi)$. Il massimo di tale funzione vale $A\omega$ ed essendo $\omega=\sqrt{(k/(m_1+m_2))}$ si ottiene:
   b) $v_{Max}= \mu_s g\sqrt{(m_1+m_2)}/\sqrt{k}=1.57$ m/s

3. Le velocità iniziali sono rispettivamente v_{01} = 6 m/s e v_{02} = 5 m/s. Il t_0 del lancio del secondo palloncino è pari a t_0 = 1 s. Per le quote dei palloncini si avrà:
   $y_1 = y_0 + v_{01}\ t - 1/2\ gt^2$ e
   $y_2 = y_0 + v_{02}\ (t-t_0) -1/2\ g\ (t-t_0)^2$.
   Imponendo $y_1 = y_2$ si ottiene la relazione che definisce il tempo t* di urto tra i palloncini:
   $v_{01}\ t^* - 1/2\ gt^{*2} = v_{02}(t^* -t_0) - 1/2\ g\ (t^* - t_0)^2$
   da cui si ricava $t^* = (v_{02}\ t_0 + 1/2\ gt_0^2\ )/\ [\ - (v_{01} - v_{02}) + gt_0] = 1.12$ s.
   La quota H si potrà ricavare tramite $H = y_0 + v_{01}\ t^* - 1/2\ gt^{*2} = 1.55$ m.

4. Le forze che agiscono sul ponte sono rispettivamente: la tensione T applicata all'estremo del ponte, la forza peso applicata nel centro di massa, la reazione vincolare in A (con componenti parallele all'asse verticale ed orizzontale).
   All'equilibrio si ha che la risultante di tali forze è nulla come anche il momento totale.
   Scegliendo come polo il punto A si scriverà per la risultante dei momenti:
   $\tan(\vartheta)$=h/l=60:
   $M = 0 = lmg/2 - l\ T\sin\vartheta = 0$.

Se ne ricava che $T = mg/ (2 \sin\vartheta)$.
Imponendo che la risultante delle forze sia nulla si scriverà: $mg + T + R = 0$.
proiettando orizzontalmente e verticalmente l'equazione vettoriale si ottiene:
$Rx = -T \cos\vartheta$ e $Ry = -T \sin\vartheta + mg$.
Sostituendo il valore di T si ottiene:
$Rx = -mg / (2 \,tg\vartheta)$ ed $Ry = mg/2$
ed il modulo vale
$R = mg/(2 \sin\vartheta) = T = 2.04x10^4$ N.

5. $\Delta U = Q - W$. Essendo $\Delta U = 0$ sul ciclo, si avrà $Q = W > 0$ e quindi calore assorbito. Il calcolo del lavoro è pari a $L = 3p_0(3V_0-V_0) - p_0(3V_0-V_0) = 4\, p_0V_0$. La variazione di energia interna $\Delta U(ABC) = nc_V(T_C-T_A)$.
   Avendosi:
   $T_A = 3p_0V_0/nR$ e $T_c = p_03V_0/nR$ si ottiene $\Delta U(ABC) = 0$.
   Le temperature massima e minima nel ciclo sono rispettivamente
   $T_B = 9p_0V_0/nR$ e $T_D = p_0V_0/nR$.
   Il rapporto T_B/T_D è quindi = 9.