SOLUZIONI DEL FOGLIO 14

1) $f(x) = x\exp\left(\frac{1}{1-|x|}\right)$

Dominio $|x| \neq 1$ $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ $f(-x) = -x\exp\left(\frac{1}{1-|-x|}\right) = f(x)$

f è una funzione dispari, possiamo studiarla in $[0, 1) \cup (1, +\infty)$ e poi disegnare il grafico in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$ per simmetria rispetto all'origine.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 1^{+-}} f(x) = 0$ m$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{x} = 1$ q$= \lim_{x\to+\infty} \left[x\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) - x\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1$ si è usata l'asintoticità di $e^t - 1$ con t quando $t \to 0$

$x = 1$ e $x = -1$ asintoti verticali $y = x - 1$ asintoto obliquo a $+\infty$ $y = x + 1$ asintoto obliquo a $-\infty-$

$$\text{per x>0} \qquad f'(x) = \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) + x\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{1}{(1-x)^2} = \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{x^2-x+1}{(1-x)^2}$$

$$\text{per x<0} \qquad f'(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) + x\exp\left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{-1}{(1+x)^2} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{x^2+x+1}{(1+x)^2}$$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = e^1 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$ f è derivabile in tutto il suo dominio.

$f'(x)$ è positiva in tutto il dominio quindi f cresce in $(-\infty, -1), (-1, 1)$ e in $(1, +\infty)$.

$$\text{per x>0} \qquad f"(x) = \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{-x+2}{(1-x)^4}$$

$$\text{per x<0} \qquad f"(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{-x-2}{(1+x)^4}$$

$f"(x) = 0$ $x = \pm 2$ $f"(x) > 0$ in $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ $x = \pm 2$ punti di flesso. $f(2) = 2e^{-1}$ $f(-2) = -2e^{-1}$

f è convessa in $(-\infty, -2)$,in $(0, 1)$ e in $(1, 2)$ e concava in $(-2, -1)$, in $(-1, 0)$ e in $(2, +\infty)-$

L'immagine è $\mathbf{R}$.

L'equazione $f(x) = a$ ha due soluzioni $\forall a \neq 0$;se $a = 0$ l'equazione ha solo la soluzione nulla.

2) Per t$\neq 0$ f è continua perchè rapporto di due funzioni continue con quella a denominatore sempre non nulla, affinchè sia continua in $\mathbf{R}$ basta scegliere $a = \lim_{x\to 0} f(x)$ se il limite esiste finito. $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^t}{t} = -1$. Per $a = -1$ per le proprietà delle funzioni integrali $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$

$$F"(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F'(h) - F'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-e^h}{h} + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - e^h + h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - 1 - h - h^2/2}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

$F(0) = 0$ Il polinomio di Taylor di secondo grado è $P_2(x) = -1x - 1/4x^2$

3) $f(x) = arctg(x)\, e^{x^2-2}$ è una funzione continua perchè prodotto di funzioni composte di funzioni continue inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Per il teorema di esistenza dei valori intermedi l'equazione $f(x) = c$ ha almeno una soluzione qualunque sia c.

Inoltre $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} e^{x^2--2} + \arctan x\ 2x\ e^{x^2-2}$ che è sempre positiva perchè somma di due addendi positivi, pertanto $f(x)$ è strettamente crescente e l'equazione $f(x) = c$ ha un'unica soluzione qualunque sia c.

4) Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale li neare non omogenea del secondo ordinea coefficienti costanti.

Cerchiamo l'integrale generale dell'equazione omogenea a cui aggiungeremo un integrale particolare della nonomogenea e poi determineremo le costanti imponendo le condizioni del problema di Cauchy. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \cos x * C_2 \sin x$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione omogenea si può utilizzare il metodo di variazione delle costanti, ma è più rapido usare le formule di bisezione e il metodo di somiglianza. $\cos^2 x = 1/2 + 1/2 \cos 2x$.L'integrale particolare è quindi la somma dell'integrale particolare relativo al secondo membro $f_1(x) = 1/2$ che è $y_1(x) = 1/2$ e dell'integrale particolare relativo al secondo membro $f_2(x) = 1/2 \cos 2x$. Cerchiamo l'integrale particolare nella forma $y_2(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione si trova $a = -1/6 \quad b = 0$. L'integrale generale dell'equazione nonomogenea è

$$y(x) = C_1 \cos x * C_2 \sin x + 1/2 - 1/6 \cos 2x$$

Imponendo le condizioni iniziali si trova $C_1 = 0 \quad C_2 = -2/3$ La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -2/3 \sin x + 1/2 - 1/6 \cos 2x$$

5) $\iint_D \frac{x-2y}{(x+y)^2} dxdy \qquad$ D=$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x + y \leq 2, \quad 0 \leq x - y \leq 4\right\}$

E' utile considerare il cambiamentodi variabile lineare u=x+y, v=x-y , la cui trasformazione inversa Φ è data da $x = \frac{u+v}{2},\ \ y = \frac{u-v}{2}$

$D = \Phi([1, 2]x[0, 4])$ Il modulo del determinante della matrice Jacobiaa di Φ è$\left|\det \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{matrix}\right| = 1/2.$

$$\iint_D \frac{x-2y}{(x+y)^2} dxdy = 1/2 \int_0^4 dv \int_1^2 \frac{3v-u}{2u^2} du = 1/4 \int_0^4 \left[-\frac{3v}{u} - \log|u|\right]_1^2 dv =$$

$$1/4 \int_0^4 \left(\frac{3v}{2} - \log 2\right) dv = 1/4 \left[3/4 v^2 \log 2v\right]_0^4 = 3 - \log 2$$