ANALISI VETTORIALE
LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 13 - 20260108

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Determinare la soluzione* $w(t)$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(t) = |t| w(t) \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

i. esaminare se si tratta di funzione w *monotona,*
ii. esaminare se la soluzione sia o meno di classe $C^2(\mathbb{R})$*,*
iii. scrivere l'equazione integrale equivalente al problema di Cauchy assegnato.

ESERCIZIO 2. *Assegnata la funzione*

$$a(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & t \in [-1, 1] \\ 0 & t \notin [-1, 1] \end{cases}$$

si determinino le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t) y(t) \\ y(0) = y_0 \in \{\pm 2, \pm 1, 0\} \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. *Si consideri il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \left[4 + w^2(x)\right] w'(x) = w(x) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

i. si spieghi perché il problema possiede un'unica soluzione locale,
ii. si discuta l'esistenza globale della soluzione,
iii. si risolva il problema di Cauchy con $w_0 = 1$*.*

ESERCIZIO 4. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $y_n(t)$ *la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = n\left[y(t) - y^2(t)\right] \\ \qquad y(0) = 1/2 \end{cases}$$

i. si spieghi perché y_n *esiste ed è unica,*
ii. si spieghi perché y_n *è definita su tutta la semiretta* $S = [0, +\infty)$*,*
iii. si calcoli il $\lim_{n \to \infty} y_n(t)$*, per* $t \in S$*, e si dica in quali sottointervalli della semiretta tale convergenza è uniforme.*

ESERCIZIO 5. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = t u(t) (u(t) - 1) \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$$

si discutano (esattamente nell'ordine proposto) le seguenti affermazioni
i. il problema possiede un'unica soluzione locale,

ii. il problema possiede un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$,
iii. la soluzione ammette limite per $t \longrightarrow -\infty$,
iv. la soluzione è monotona,
infine si calcoli l'espressione esplicita della soluzione.

ESERCIZIO 6. *Si consideri il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\left(1 + u^2(t)\right) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e si risponda alle seguenti affermazioni i. Dire se il problema possiede un'unica soluzione in un intorno dell'origine.
ii. Dire se la soluzione è monotona nell'intervallo in cui è definita.
iii. Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 0$ *e calcolare l'intervallo massimale di definizione.*
iv. Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 1$ *e calcolare l'intervallo massimale di definizione.*

ESERCIZIO 7. *Assegnata l'equazione differenziale autonoma*

$$w'(t) = \frac{1}{1 + w(t)}$$

i. si verifichino le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità al variare dei dati iniziali (t_0, w_0),
ii. si determinino almeno tre sue soluzioni,
iii. si determini la soluzione del problema di Cauchy $w(0) = 0$,
iv. si provi che le soluzioni $w(t)$ *dell'equazione sono tutte funzioni monotone.*

ESERCIZIO 8. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = (1 + t)e^{-u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

si discutano le seguenti affermazioni esattamente nell'ordine proposto
i. il problema possiede un'unica soluzione locale u,
ii. u *è definita su una semiretta del tipo* $(-\delta, +\infty)$,
iii. la soluzione è crescente e non ha punti stazionari,
iv. u *è concava.*
Infine si calcoli esplicitamente la soluzione.

ESERCIZIO 9. *Data l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti*

$$u''(t) + \frac{1}{4t^2}u(t) = 0$$

i. si verifichi che $z(t) = \sqrt{t}$ *è soluzione,*
ii. si provi l'esistenza di una seconda soluzione linearmente indipendente della forma $w(t) = c(t)z(t)$,
iii. si trovi la soluzione dell'equazione con dati iniziali $u(1) = 1$ *e* $u'(1) = 0$.

ESERCIZIO 10. *Risolvere i seguenti sistemi differenziali nelle incognite* u *e* v

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + 2v(x) \\ v'(x) = u(x) - \cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) + v(x) + x = 0 \\ v'(x) - v(x) + 2u(x) = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 11. *Determinare la soluzione dei seguenti problemi:*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(1) = 0 \quad y'(1) = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 12. *Dati* $a, b \in \mathbb{R}$*, si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = ax(t) - 2by(t) \end{cases}$$

e si individui per quali tra le seguenti scelte dei parametri

$$(a, b) = (-1, 0) \qquad (a, b) = (0, 2) \qquad (a, b) = (1, 2)$$

l'origine $(0, 0)$ *è un punto di sella per il sistema. Per tale coppia, si calcolino autovalori ed autovettori poi si disegni qualitativamente le traiettorie nel piano delle fasi.*

ESERCIZIO 13. *Assegnato il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w''(s) - k^2 w(s) = f(s) \\ w(0) = w_0 \quad w'(0) = w_1 \end{cases} \qquad \textit{con } k > 0$$

si ottenga una formula risolutiva generale.

ESERCIZIO 14. *È ben noto che il Quidditch è uno sport magico che si pratica a cavallo di manici di scopa volanti con quattro palle e presenta elementi in comune con vari sport del mondo dei babbani. Il Quidditch è lo sport più popolare del mondo magico ed esistono numerose squadre professionistiche di questo sport e la scuola di magia e stregoneria di Hogwarts ha una squadra per ognuna delle case (Grifondoro, Serpeverde, Corvonero e Tassorosso)...*
Il boccino d'oro è una palla incantata dorata dal diametro di una noce dotata di ali. Ogni squadra mette in campo un proprio giocatore, il cercatore, il cui compito è darle la caccia e cercare di prenderla. è molto piccola e molto veloce, al punto che a stento la si vede, e per questo motivo i cercatori sono solitamente i giocatori più piccoli ed agili. La cattura del boccino segna la fine della partita, ed alla squadra del cercatore che è riuscito a catturarlo vengono assegnati 150 *punti.*
Supponiamo che, all'istante $t = 0$*, il boccino parta dal punto di coordinate* $P_0(x_0, 0)$*, con* $x_0 > 0$*, e proceda con velocità costante pari a* 1 *in linea retta con direzione* e_2*, quindi seguendo la traiettoria descritta dalla parametrizzazione* $b(t) = (x_0, t)$*. Contemporaneamente un cercatore parte dal punto* $O(0, 0)$ *e deve scegliere la sua traiettoria di inseguimento* $(x(t), y(t))$ *sapendo che si muove con velocità costante (in modulo) pari a* $v \geq 1$*. Si cerchi di aiutare il cercatore!*

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Determinare la soluzione* $w(t)$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(t) = |t| w(t) \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

i. esaminare se si tratta di funzione w *monotona,*
ii. esaminare se la soluzione sia o meno di classe $C^2(\mathbb{R})$*,*
iii. scrivere l'equazione integrale equivalente al problema di Cauchy assegnato.

DISCUSSIONE. i. L'equazione è a variabili separabili (o del primo ordine, lineare a coefficienti non costanti), quindi sapendo che la soluzione è non nulla, a causa dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy, possiamo procedere uguagliando le rispettive primitive

$$\ln(|w(t)|) = \int \frac{w'(t)}{w(t)} dt = \int |t| dt = \frac{1}{2} t|t| + c = \frac{1}{2} t|t|$$

dove abbiamo ottenuto che $c = 0$ sfruttando il dato iniziale $w(0) = 1$. Passando agli esponenziali abbiamo

$$|w(t)| = e^{t|t|/2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Abbiamo già osservato che la soluzione nulla è una soluzione dell'equazione differenziale, quindi la soluzione del nostro problema di Cauchy resterà sempre positiva, non potendo i grafici di soluzioni differenti incrociarsi, quindi abbiamo che $w(t) > 0$, cioè

$$w(t) = e^{t|t|/2} \qquad \text{e} \qquad w'(t) = |t|w(t) \geq 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

il che prova che la soluzione è monotona crescente (l'unico punto a derivata nulla è in $t = 0$).
ii. La soluzione non è di classe C^2, visto che la funzione valore assoluto non è derivabile in $t = 0$, questo si traduce nel fatto che l'argomento dell'esponenziale è $t|t|$, che è solo di classe C^1, la funzione non è derivabile due volte in $t = 0$.
iii. il problema integrale equivalente è il seguente

$$w(t) = w_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds = 1 + \int_0^t |s|w(s) ds$$

come suggerisce la dimostrazione del teorema di Picard-Lindelöff. ∎

ESERCIZIO 2. *Assegnata la funzione*

$$a(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & t \in [-1, 1] \\ 0 & t \notin [-1, 1] \end{cases}$$

si determinino le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = y_0 \in \{\pm 2, \pm 1, 0\} \end{cases}$$

DISCUSSIONE. La funzione a è non negativa e continua, pur essendo definita a tratti, l'equazione differenziale è lineare, per cui la soluzione locale di un problema di Cauchy si può prolungare su tutto $\mathbb{R}$. Siccome il prodotto $a(t)y$ è una funzione continua, y sarà, in generale, una funzione di classe C^1: questa osservazione ci permetterà di scrivere l'integrale generale dell'equazione.
Prima di tutto osserviamo che $y(t) \equiv 0$ è una soluzione globale dell'equazione differenziale che risolve il problema di Cauchy con dato iniziale $y(t_0) = 0$, quindi tutte le altre soluzioni non possono annullarsi (a causa dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy), quindi sappiamo che le altre soluzioni non hanno zeri, quindi in un intorno di $t = 0$ abbiamo

$$y'(t) = (1 - t^2)y(t) \qquad \text{da cui segue} \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = 1 - t^2$$

passando alle primitive (e accorpando le costanti di integrazione) abbiamo la relazione

$$\ln(|y(t)|) = t - \frac{t^3}{3} + c \qquad \text{e le soluzioni} \qquad y(t) = ke^{t - t^3/3} \qquad k \in \mathbb{R}$$

L'espressione trovata vale, ovviamente, solo in $[-1, 1]$. Fuori dall'intervallo la funzione a è nulla, per cui $y'(t) = 0$ il che significa che la soluzione si prolunga come una costante (avendo derivata nulla su un intervallo del tipo $(1, h)$ o $(h, -1)$) quindi, imponendo anche il dato iniziale, abbiamo che

$$y(t) = \begin{cases} y_0 e^{-2/3} & t \in (-\infty, -1) \\ y_0 e^{t - t^3/3} & t \in [-1, 1] \\ y_0 e^{2/3} & t \in (1, +\infty) \end{cases}$$

la formula ottenuta vale per tutti i valori di $y \in \mathbb{R}$ (a posteriori anche per $y_0 = 0$) e quindi anche per i valori indicati dal testo. ∎

ESERCIZIO 3. *Si consideri il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \left[4 + w^2(x)\right] w'(x) = w(x) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

i. si spieghi perché il problema possiede un'unica soluzione locale,
ii. si discuta l'esistenza globale della soluzione,
iii. si risolva il problema di Cauchy con $w_0 = 1$.

Discussione. i. L'equazione può essere scritta equivalentemente nella seguente forma normale

$$w'(x) = \frac{w(x)}{4 + w^2(x)} \qquad w' = f(w)$$

La funzione $f(w) = w/(4+w^2) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ciò implica che sono verificate le ipotesi del teorema di Picard-Lindelöff che assicurano l'esistenza e unicità locale del problema (**??**).
ii. La funzione f è limitata e globalmente lipschitziana in $\mathbb{R}$, infatti (ricordando che $\xi^2 \geq 0$) si ha

$$\begin{aligned}|f(u) - f(w)| &= \left|f'(\xi)\right| |u - w| = \left|\frac{4 - \xi^2}{(4 + \xi^2)^2}\right| |u - w| = \left|\frac{\xi^2 - 4}{4 + \xi^2}\right| \left|\frac{1}{4 + \xi^2}\right| |u - w| \\ &= \left|1 - \frac{8}{4 + \xi^2}\right| \left|\frac{1}{4 + \xi^2}\right| |u - w| \leq \left(1 + \frac{8}{4 + \xi^2}\right) \left|\frac{1}{4 + \xi^2}\right| |u - w| \leq \frac{3}{4}|u - w|\end{aligned}$$

e anche che

$$|f(w)| \leq \max_{\mathbb{R}} |f| = \frac{1}{4}$$

quindi possiamo applicare il teorema di esistenza in grande e affermare che la soluzione esiste in tutto $\mathbb{R}$.
iii. Notiamo che $w(x) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione differenziale. Per l'unicità due soluzioni distinte non possono intersecarsi, quindi $w(x) > 0$ se $w_0 > 0$ e $w(x) < 0$ se $w_0 < 0$. Poiché $w_0 = 1$ avremo $w(x) > 0$, integrando per separazione di variabili otteniamo

$$\int \left(\frac{4}{w} + w\right) dw = x + c \qquad \text{da cui} \qquad 4\ln(w) + \frac{w^2}{2} = x + c$$

e imponendo la condizione iniziale troviamo $c = 1/2$. A questo punto possiamo scrivere

$$\ln(w^4(x)) = -\frac{w^2(x)}{2} + x + \frac{1}{2} \qquad \text{da cui} \qquad w^4(x) = e^{1/2} e^x e^{-w^2(x)/2}$$
$$H(w(x)) := w^4(x) e^{w^2(x)/2} = e^{x+1/2}$$

Siccome la funzione H è invertibile sulla semiretta $(0, +\infty)$ (si noti che $H'(s) = (4 + s^2)s^3 e^{s^2/2}$ ha lo stesso segno del suo argomento e $w(x) > 0$ e che non possiamo scrivere esplicitamente l'espressione della funzione inversa) possiamo concludere che la soluzione w è definita implicitamente dalla relazione

$$w(x) = H^{-1}\left(e^{x+1/2}\right)$$

purtroppo non è possibile fare di meglio, a meno di non percorrere strade alternative, per esempio, calcolando il polinomio di Taylor della soluzione. ■

Esercizio 4. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $y_n(t)$ *la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = n\left[y(t) - y^2(t)\right] \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

i. si spieghi perché y_n *esiste ed è unica,*
ii. si spieghi perché y_n *è definita su tutta la semiretta* $S = [0, +\infty)$*,*
iii. si calcoli il $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$*, per* $t \in S$*, e si dica in quali sottointervalli della semiretta tale convergenza è uniforme.*

Discussione. i. Abbiamo a che fare con un'equazione differenziale a variabili separabili, di tipo autonomo, nella forma $y' = f(y)$ con $f(s) = n[s - s^2] \in C^\infty(\mathbb{R}) \subseteq C^1(\mathbb{R})$. Ciò implica che sono verificate le ipotesi del teorema di Picard-Lindelöff che assicurano l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema.
ii. Sappiamo che l'esistenza di due costanti non negative K_1, K_2 tali che

(1) $$|f(y)| \leq K_1 + K_2|y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

garantirebbe la validità del teorema di esistenza globale della soluzione su tutta la semiretta S. Nel nostro caso, però, la condizione (1) non vale perché f è a crescita quadratica.

Questa ipotesi può essere indebolita richiedendo che f verifichi l'ipotesi (1) soltanto lungo la soluzione del problema di Cauchy. Cioè che, detta y(t) la soluzione del nostro problema, l'esistenza di due costanti non negative C_1, C_2 (entrambe dipendenti da y(t)), tali che

$$|f(y(t))| \leq C_1 + C_2|y(t)| \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

implica che la soluzione y(t) è prolungabile su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo subito che $y_0 \equiv 0$ e $y_1 \equiv 1$ sono due soluzioni costanti dell'equazione differenziale e, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, sappiamo che due soluzioni distinte non possono avere punti del grafico in comune, quindi segue che $0 < y(t) < 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, visto che $y(0) = 1/2 \in (0,1)$. L'esistenza globale della soluzione è una conseguenza del fatto che $|f(y(t))| = n\,|y(t)(1-y(t))| \leq n$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi per ogni $t \in S$.
iii. Procediamo per separazione di variabili

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{1-y} = nt + c \qquad \text{integrando} \qquad \ln\left(\left|\frac{y}{1-y}\right|\right) = nt + c$$

e invertendo otteniamo l'espressione desiderata

$$y_n(t) = \frac{ke^{nt}}{1+ke^{nt}}$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo k = 1. Per $t \in S$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t) = \begin{cases} 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme in tutto S perché $y(t) \notin C^0(S)$ pur essendo $y_n(t) \in C^0(S)$. Sia $a > 0$, allora abbiamo

$$\sup_{[a,\infty]} |y_n(t) - y(t)| = \sup_{[a,\infty]} e^{-nt} = e^{-na} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0$$

dunque la convergenza della successione $\{y_n(t)\}$ è uniforme in $[a, \infty)$.
Generalizziamo l'esercizio appena concluso e consideriamo i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) = nf(w(t)) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

con $f \in C^1(\mathbb{R})$, e supponiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il precedente problema possiede un'unica soluzione (monotona, visto che il problema è autonomo del primo ordine) w_n definita su tutto l'asse reale. Operiamo il seguente cambio di variabile s = nt (che è una sorta di cambio di unità di misura per la variabile indipendente t) e, grazie alla formula di derivazione delle funzioni composte, troviamo che

$$\frac{d}{ds}w(s) = \frac{dw}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{n}w'(t) = f(w(t)) = f(w(s))$$

l'unicità della soluzione del problema di Cauchy ci permette di affermare che

$$w_n(t) = w(nt) = w(s)$$

visto che nella variabile s tutti i problemi sono uguali e indipendenti dal parametro $n \in \mathbb{N}$. Quanto ottenuto ci permette di inquadrare in modo più generale il comportamento della successione di funzioni $\{w_n\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$, infatti vale che

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n(t) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} w(nt) = \begin{cases} w_{+\infty} = \lim\limits_{s\longrightarrow+\infty} w(s) & t > 0 \\ w_0 = w(0) & t = 0 \\ w_{-\infty} = \lim\limits_{s\longrightarrow-\infty} w(s) & t < 0 \end{cases}$$

si noti che i limiti $w_{\pm\infty}$ esistono sempre, visto che abbiamo osservato che la soluzione risulta essere sempre monotona. La convergenza uniforme (su tutto $\mathbb{R}$) non è mai possibile, tranne il caso in cui $w(s) = w_0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. ∎

Esercizio 5. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = tu(t)\,(u(t)-1) \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$$

si discutano (esattamente nell'ordine proposto) le seguenti affermazioni
i. il problema possiede un'unica soluzione locale,
ii. il problema possiede un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$*,*
iii. la soluzione ammette limite per $t \longrightarrow -\infty$*,*
iv. la soluzione è monotona,
infine si calcoli l'espressione esplicita della soluzione.

Discussione. i. Il problema di Cauchy in oggetto riguarda un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale, la funzione a secondo membro è $f(t,p) = tp(p-1)$, un polinomio in due variabile di grado tre. Siccome $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \subseteq C^1(\mathbb{R}^2)$, tale funzione è localmente lipschitziana, quindi il teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy garantisce la veridicità dell'affermazione.
ii. Osserviamo subito che f **non** è una funzione globalmente lipschitziana, per questo motivo l'esistenza in grande della soluzione del problema di Cauchy non è assicurata a priori. Notiamo però che $u_*(t) \equiv 0$ e $u^*(t) \equiv 1$ sono due soluzioni costanti dell'equazione differenziale definite su tutto l'asse reale, siccome la nostra soluzione verifica $0 = u_*(0) < u(0) = 1/2 < u^*(0) = 1$, l'unicità della soluzione del problema di Cauchy implica che $0 \equiv u_*(t) < u(t) < u^*(t) \equiv 1$. Poiché si può provare che $|f(t,p)| = |tp(p-1)| \leq |t|$ per ogni $p \in [0,1]$, abbiamo che il grafico della soluzione è vincolato a svolgersi nella striscia di equazione $\{0 \leq p \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, in cui la funzione f è globalmente lipschitziana e quest'ultima osservazione prova che l'affermazione ii è vera.
iii. Abbiamo mostrato che la soluzione u è definita su tutto $\mathbb{R}$, naturalmente questo fatto da solo non implica l'esistenza dei limiti per $t \longrightarrow \pm\infty$. Però abbiamo osservato che $0 < u(t) < 1$ per ogni t, quindi possiamo concludere che $f(t,u(t)) > 0$ per $t < 0$ e che $f(t,u(t)) < 0$ se $t > 0$, quindi sulla semiretta dei reali negativi la funzione ha derivata prima positiva, cioè è monotona crescente ed essendo limitata deve possedere limite.
iv. L'ultima affermazione non è vera: come discusso precedentemente la soluzione è crescente sui negativi e decrescente sui positivi, quindi la soluzione non è globalmente monotona. Il calcolo della soluzione può essere effettuato usando due differenti strategie: o si osserva che l'equazione è a variabili separabili o che è un'equazione di Bernoulli.
Nel primo caso si procede come segue

$$u'(t) = tu(t)\,(u(t)-1) \qquad \text{da cui} \qquad \int \frac{u'(t)dt}{u(t)\,(u(t)-1)} = \int t dt$$

a questo punto risolviamo indipendentemente gli integrali indefiniti ottenendo

$$\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c$$

e anche

$$\int \frac{u'(t)dt}{u(t)\,(u(t)-1)} = \int \left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1}\right] du = -\ln|u| + \ln|u-1| + c = \ln\left(\frac{1-u}{u}\right) + c$$

ricordando che la soluzione assume solo valori in $(0,1)$. Uguagliando le primitive ottenute e accorpando le costanti d'integrazione possiamo scrivere

$$\ln\left(\frac{1-u}{u}\right) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

e invertendo la funzione logaritmo troviamo

$$\frac{1-u(t)}{u(t)} = Ke^{t^2/2} \qquad \text{cioè} \qquad u(t) = \frac{1}{1+Ke^{t^2/2}}$$

imponendo il dato iniziale $u(0) = 1/2$ si trova che $K = 1$ e si giunge all'espressione esatta della soluzione

$$u(t) = \frac{1}{1+e^{t^2/2}}$$

In alternativa si può scrivere l'equazione nel seguente modo

$$u'(t) + tu(t) = tu^2(t)$$

e, riconoscendo che si tratta di un'equazione di Bernoulli, possiamo operare la seguente sostituzione

$$u(t) = w^{-1}(t) \qquad u^2(t) = w^{-2}(t) \qquad u'(t) = -w'(t)w^{-2}(t)$$

in questo modo l'equazione si trasforma nella seguente

$$-w'(t)w^{-2}(t) + tw^{-1}(t) = tw^{-2}(t)$$

che equivale alla seguente equazione lineare

$$w'(t) + tw(t) = t$$

visto che per l'unicità della soluzione $u(t) \neq 0$, quest'ultima si risolve calcolando due primitive e si ottiene l'espressione trovata precedentemente. ∎

ESERCIZIO 6. *Si consideri il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\left(1 + u^2(t)\right) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e si risponda alle seguenti affermazioni
i. Dire se il problema possiede un'unica soluzione in un intorno dell'origine.
ii. Dire se la soluzione è monotona nell'intervallo in cui è definita.
iii. Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 0$ *e calcolare l'intervallo massimale di definizione.*
iv. Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 1$ *e calcolare l'intervallo massimale di definizione.*

DISCUSSIONE. i. È un'equazione differenziale a variabili separabili, di tipo autonomo, nella forma $u' = f(u)$ con $f(u) = u(1+u^2) \in C^1(\mathbb{R})$. Questo assicura l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema assegnato in un intorno $I_\delta = (-\delta, \delta)$ (teorema di Cauchy).
ii. La soluzione $u(t) \equiv 0$ è soluzione costante (monotona) del problema di Cauchy con la condizione iniziale $u_0 = 0$. Se $u_0 > 0$ [$u_0 < 0$] allora $u(t) > 0$ [$u(t) < 0$] nell'intorno dell'origine I_δ (per l'unicità due soluzioni non si intersecano). Quindi $u'(t) > 0$ [$u'(t) < 0$] in I_δ cioè la soluzione è monotona crescente [decrescente].
iii. $u(t) \equiv 0$ è, per verifica diretta, soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale nullo ed è definita in tutto $\mathbb{R}$.
iv. Integro l'equazione differenziale per separazione di variabile

$$\int \frac{du}{u(1+u^2)} = \int dt \qquad \text{da cui} \qquad \int \frac{du}{u} - \int \frac{u\,du}{1+u^2} = \int dt$$

dall'ultima relazione ricavata otteniamo che

$$\ln\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) = t + c \qquad \text{cioè} \qquad u^2 = \frac{Ce^{2t}}{1 - Ce^{2t}}$$

Imponendo la condizione iniziale $u(0) = 1$ troviamo $C = 1/2$. Quindi, ricordando che $u(t) > 0$,

$$u(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2 - e^{2t}}}$$

Un altro modo per determinare la soluzione del problema è quello di considerare l'equazione differenziale di tipo Bernoulli con parametro $\alpha = 3$. Con la sostituzione $z = u^{1-\alpha} = u^{-2}$ ci si riconduce al problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) + 2z(t) + 2 = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine, la cui soluzione (non riportiamo i calcoli) è $z(t) = 2e^{-2t} - 1$. Da qui si trova (sempre considerando che $u(t) > 0$)

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{z(t)}} = \frac{e^t}{\sqrt{2 - e^{2t}}}$$

Per determinare l'intervallo massimale in cui la soluzione è definita determiniamo il più grande intervallo in cui è definita u

$$2 - e^{2t} > 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad t < \ln(\sqrt{2})$$

quindi l'intervallo massimale è la semiretta $(-\infty, \ln(\sqrt{2}))$. ■

Esercizio 7. *Assegnata l'equazione differenziale autonoma*

$$w'(t) = \frac{1}{1 + w(t)}$$

i. si verifichino le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità al variare dei dati iniziali (t_0, w_0),
ii. si determinino almeno tre sue soluzioni,
iii. si determini la soluzione del problema di Cauchy $w(0) = 0$,
iv. si provi che le soluzioni $w(t)$ *dell'equazione sono tutte funzioni monotone.*

Discussione. i. Per applicare il teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy dobbiamo mostrare che la funzione che descrive il campo vettoriale tangente alle traiettorie delle soluzioni sia definita, continua e lipschitziana (solo nella seconda variabile) almeno in un intorno del dato iniziale. Nel nostro caso abbiamo che

$$f(t, s) = \frac{1}{1 + s} \qquad \left\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s + 1 \neq 0\right\}$$

affinché le prime ipotesi siano soddisfatte dobbiamo assumere che $w_0 \neq -1$. A questo punto dobbiamo fare alcune maggiorazioni per verificare la locale lipschitzianità nella seconda variabile, quindi possiamo scrivere che

$$\left|\frac{1}{1 + w} - \frac{1}{1 + u}\right| = \left|-\frac{1}{(1 + \xi)^2}\right| |w - u| \leq L|w - u|$$

se $u, w \in [w_0 - \varepsilon, w_0 + \varepsilon]$ con $|\varepsilon| < d(w_0, -1) = |w_0 + 1|$, dove $L = \max|\partial_2 f(t, s)|$ nella striscia in questione.
ii. L'equazione differenziale è un'equazione a variabili separabili, quindi possiamo procedere calcolando alcune primitive

$$\int (1 + w(t))w'(t)dt = \int dt \qquad \text{da cui} \qquad w(t) + \frac{1}{2}w^2(t) = t + c$$

come dovrebbe essere noto l'inversione di una funzione quadratica pone sempre dei problemi, visto che tali funzioni non sono globalmente iniettive, infatti troviamo che

$$w(t) = \frac{1}{2}\left[-1 \pm (1 + 4(t + c))^{1/2}\right]$$

l'"indecisione" sul segno viene meno conoscendo il dato iniziale, infatti le soluzioni non possono assumere (quindi tanto meno attraversare) il valore -1, quindi vale

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[-1 - (1 + 4(t + c))^{1/2}\right] & \text{se } w_0 < -1 \\ \frac{1}{2}\left[-1 + (1 + 4(t + c))^{1/2}\right] & \text{se } w_0 > -1 \end{cases}$$

A questo punto possiamo scrivere tre soluzioni relativamente ai dati iniziali $w(0) = -2, 0, +2$ in modo da risolvere anche il punto iii.

$$w_{-2}(t) = \frac{1}{2}\left[-1 - (1 + 4(t + 2))^{1/2}\right]$$

$$w_0(t) = \frac{1}{2}\left[-1 + (1 + 4t)^{1/2}\right]$$

$$w_{+2}(t) = \frac{1}{2}\left[-1 + (1 + 4(t + 6))^{1/2}\right]$$

iv. Le soluzioni sono tutte monotone (nel loro dominio di esistenza) perché soluzioni di un'equazione differenziale autonoma del primo ordine. Infatti, come abbiamo già osservato, i valori prodotti da una soluzione vivono in un intervallo delimitato da due zeri della funzione a secondo membro (in questo caso c'è solo lo spartiacque dato da $\{w = -1\}$) quindi la funzione produce output che generano sempre lo stesso segno attraverso la composizione con la funzione a secondo membro, il che significa che la derivata ha segno costante, cioè la funzione è monotona! ■

ESERCIZIO 8. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = (1+t)e^{-u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

si discutano le seguenti affermazioni esattamente nell'ordine proposto
i. il problema possiede un'unica soluzione locale u,
ii. u *è definita su una semiretta del tipo* $(-\delta, +\infty)$,
iii. la soluzione è crescente e non ha punti stazionari,
iv. u *è concava.*
Infine si calcoli esplicitamente la soluzione.

DISCUSSIONE. i. L'equazione differenziale è un'equazione avente la forma $u'(t) = f(t, u(t))$ con $f(t,p) = (1+t)e^{p}$. La funzione f è di classe $C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, quindi localmente lipschitziana, il che garantisce la validità del teorema di Cauchy, cioè l'esistenza e l'unicità della soluzione per ogni punto del piano, in particolare per il punto $\mathbf{O} = (0,0)$ che riguarda il nostro problema.
ii. Consideriamo l'aperto $A = (-\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$ (con $\delta \in (0,1)$), in A la funzione f è globalmente lipschitziana nella seconda variabile, infatti per il teorema di Lagrange vale

$$\begin{aligned} |f(t,p) - f(t,q)| &= |1+t| \left| e^{-p} - e^{-q} \right| \\ &\leq |1+t| \left| -e^{-\xi} \right| |p-q| \leq |1+t| \, |p-q| \end{aligned}$$

e, scegliendo $q = 0$ e usando la disuguaglianza triangolare, troviamo

$$|f(t,p)| = |1+t||p| + |f(t,0)| = |1+t| + |1+t||p|$$

a causa della lipschitzianità (con costante di Lipschtiz $L = 1$) della funzione $x \mapsto e^{-x}$, quindi il teorema di prolungabilità delle soluzioni del problema di Cauchy garantisce l'esistenza della soluzione su tutta la semiretta in oggetto!
iii*. L'equazione differenziale "contiene" la descrizione della derivata prima della soluzione u. Siccome una funzione (di classe C^1) è crescente se e solo se la sua derivata è non negativa, l'affermazione risulta vera se vale che

$$u'(t) = (1+t)e^{-u(t)} \geq 0$$

a causa delle proprietà dell'esponenziale la derivata è positiva per $t > -1$, è negativa per $t < -1$ (dove, quindi, la soluzione risulta decrescente) e nulla per $t = 0$, punto in cui la funzione deve avere un minimo globale.
iv* Osserviamo che la disuguaglianza

$$\begin{aligned} u''(t) &= \left[(1+t)e^{-u(t)}\right]' = e^{-u(t)} + (1+t)[-u'(t)e^{-u(t)}] \\ &= e^{-u(t)} - (1+t)^2 e^{-2u(t)} = \left[1 - (1+t)^2 e^{-u(t)}\right] e^{-u(t)} < 0 \end{aligned}$$

è soddisfatta solo se $e^{u(t)} < (1+t)^2$, cioè se $u(t) < \ln\left((1+t)^2\right)$. Però, ricorrendo all'espansione di Taylor per $t \simeq 0$, troviamo che

$$\ln\left((1+t)^2\right) = 2t + 3t^2 + o(t^2) \qquad \text{e} \qquad u(t) = t + o(t^2)$$

quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} u(t) &> \ln\left((1+t)^2\right) & t \in (-\delta, 0) \\ u(t) &< \ln\left((1+t)^2\right) & t \in (0, \delta) \end{aligned}$$

il che significa che intorno al punto $t_0 = 0$ la funzione cambia di concavità e che l'affermazione iv è falsa. In fin dei conti una funzione concava non potrebbe avere un minimo locale, la cui esistenza abbiamo provato in iii.
Infine calcoliamo esplicitamente la soluzione, procedendo per separazione di variabili

$$\frac{1}{2}t^2 + t + c \int (1+t)dt = \int e^{u(t)}u'(t)dt = e^{u(t)}$$

invertendo la funzione esponenziale otteniamo

$$u(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)$$

dove abbiamo anche sfruttato la condizione iniziale per calcolare la costante di integrazione. ■

ESERCIZIO 9. *Data l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti*

$$u''(t) + \frac{1}{4t^2}u(t) = 0$$

i. si verifichi che $z(t) = \sqrt{t}$ *è soluzione,*
ii. si provi l'esistenza di una seconda soluzione linearmente indipendente della forma $w(t) = c(t)z(t)$,
iii. si trovi la soluzione dell'equazione con dati iniziali $u(1) = 1$ *e* $u'(1) = 0$.

DISCUSSIONE. i. La verifica non presenta particolari difficoltà, infatti

$$z(t) = \sqrt{t} = t^{1/2} \qquad z'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2} \qquad z''(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$$

e sostituendo nell'equazione abbiamo

$$-\frac{1}{4}t^{-3/2} + \frac{1}{4t^2}t^{1/2} = 0$$

ii. Per trovare una seconda soluzione della forma $w(t) = c(t)z(t) = c(t)t^{1/2}$ dobbiamo calcolare alcune derivate e sostituire nell'equazione per ottenere un problema per la funzione incognita c, dunque

$$\begin{aligned} w'(t) &= c'(t)t^{1/2} + \frac{1}{2}c(t)t^{-1/2} \\ w''(t) &= c''(t)t^{1/2} + c'(t)t^{-1/2} - \frac{1}{4}c(t)t^{-3/2} \end{aligned}$$

e dall'equazione differenziale otteniamo

$$c''(t)t^{1/2} + c'(t)t^{-1/2} - \frac{1}{4}c(t)t^{-3/2} + \frac{1}{4t^2}c(t)t^{1/2} = c''(t)t^{1/2} + c'(t)t^{-1/2} = 0$$

che possiamo considerare come un'equazione lineare del primo ordine nella variabile $y(t) = c'(t)$

$$y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 0 \qquad \text{che ha soluzione} \qquad y(t) = \frac{1}{t}$$

La soluzione trovata ci permette di ottenere $c(t) = \ln(t)$. Quindi abbiamo le due soluzioni $z(t) = t^{1/2}$ e $w(t) = t^{1/2}\ln(t)$ e siccome è facile verificare che non esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 z(t) + \lambda_2 w(t) \equiv 0$, abbiamo provato l'esistenza di due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale. Essendo l'equazione differenziale lineare e del secondo ordine possiamo concludere che

$$V = \left\{u(t) = At^{1/2} + Bt^{1/2}\ln(t) : A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

è lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione.
iii. La soluzione del problema di Cauchy è un elemento dello spazio lineare V quindi è sufficiente imporre che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali per $t = 1$

$$\begin{cases} u(t) = At^{1/2} + Bt^{1/2}\ln(t) \\ u'(t) = \dfrac{A}{2}t^{-1/2} + Bt^{-1/2}\left[1 + \dfrac{1}{2}\ln(t)\right] \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ \dfrac{A}{2} + B = 0 \end{cases}$$

Risolto il sistema abbiamo la soluzione cercata

$$u(t) = t^{1/2}\left[1 - \frac{1}{2}\ln(t)\right]$$

il che conclude l'esercizio. ■

Esercizio 10. *Risolvere i seguenti sistemi differenziali nelle incognite* u *e* v

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + 2v(x) \\ v'(x) = u(x) - \cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) + v(x) + x = 0 \\ v'(x) - v(x) + 2u(x) = 1 \end{cases}$$

Discussione. Iniziamo dal primo sistema, il quale, scritto in forma vettoriale, diventa

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$$

Come abbiamo visto in altri esercizi, il sistema può essere affrontato calcolando una matrice fondamentale del sistema grazie all'esponenziale di matrici, però tale strategia richiede una notevole fatica, in realtà è spesso più facile procedere nel segente modo: derivando la prima equazione otteniamo

$$u''(x) = u'(x) + 2v'(x) = u'(x) + 2\,(u(x) - \cos(x))$$

sostituendo la seconda equazione, in questo modo abbiamo ottenuto la seguente equazione di secondo grado lineare a coefficienti costanti

$$u''(x) - u'(x) - 2u(x) = -2\cos(x)$$

il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$. Da cui ricaviamo che l'equazione omogenea associata ha come nucleo il seguente spazio vettoriale

$$V = \left\{u_0(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} : A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

Inoltre possiamo trovare una soluzione particolare ricorrendo al metodo della somiglianza

$$u_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \qquad u_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x) \qquad u_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$$

e sostituendo nell'equazione otteniamo i valori dei parametri e, di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione

$$u(x) = \frac{3}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x) + Ae^{2x} + Be^{-x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

La prima equazione ci permette di ottenere anche l'altra incognita, infatti

$$v(x) = \frac{1}{2}\left(u(x) - u'(x)\right) = \frac{3}{10}\sin(x) - \frac{1}{10}\cos(x) - Ae^{2x} + \frac{B}{2}e^{-x}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.
Affrontiamo il secondo sistema nella stessa maniera, derivando la seconda equazione abbiamo

$$v''(x) = -2u'(x) + v'(x) = -2\,(-v(x) - x) + v'(x)$$

ottenendo la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$v''(x) - v'(x) - 2v(x) = 2x$$

Come sopra l'equazione omogenea possiede le soluzioni

$$V = \left\{v_0(x) = Ae^{2x} + Be^{-x} : A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

mentre possiamo cercare una soluzione particolare della forma

$$v_p(x) = ax + b \qquad v_p'(x) = a \qquad v_p''(x) = 0$$

e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$v_p(x) = -x + \frac{1}{2}$$

quindi

$$v(x) = -x + \frac{1}{2} + Ae^{2x} + Be^{-x} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Infine notiamo che la seconda equazione può essere letta

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(v(x) - v'(x) + 1\right)$$

il che permette di ricavare anche l'altra incognita.

Esercizio 11. *Determinare la soluzione dei seguenti problemi:*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(1) = 0 \quad y'(1) = 2 \end{cases}$$

Discussione. Affrontiamo questi problemi di Cauchy, impiegando una strategia rapida che ci permette di aggirare la costruzione della matrice esponenziale. Prendiamo in esame il primo sistema e calcoliamo le radici del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \lambda = \frac{1}{2}[-2 \pm 4i]$$

quindi l'equazione omogenea ha il seguente spazio vettoriale come insieme delle soluzioni

$$V = \left\{ y_o(x) = e^{-x}[A\cos(2x) + B\sin(2x)] : A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

La soluzione del problema di Cauchy appartiene allo spazio V, visto che la forzante è nulla (o, per meglio dire, l'equazione completa è omogenea), inoltre vale

$$y_o'(x) = e^{-x}[-A\cos(2x) - B\sin(2x) - 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)]$$

con $A, B \in \mathbb{R}$, quindi imponendo i dati iniziali otteniamo per i parametri il sistema

$$\begin{cases} A = 1 \\ -A + 2B = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo l'espressione esplicita della soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = e^{-x}\left[\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]$$

La seconda equazione ha polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \text{che ha radici} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[3 \pm 1] = 1, 2$$

in questo caso abbiamo che

$$V = \left\{ y_o(x) = Ae^{2x} + Be^{x} : A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

e siccome vale che $y_o'(x) = 2Ae^2x + Be^x$ abbiamo, per i parametri il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 2 \end{cases}$$

il che significa che

$$y(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} \qquad \square$$

Esercizio 12. *Dati* $a, b \in \mathbb{R}$*, si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = ax(t) - 2by(t) \end{cases}$$

e si individui per quali tra le seguenti scelte dei parametri

$$(a, b) = (-1, 0) \qquad (a, b) = (0, 2) \qquad (a, b) = (1, 2)$$

l'origine $(0, 0)$ *è un punto di sella per il sistema. Per tale coppia, si calcolino autovalori ed autovettori poi si disegni qualitativamente le traiettorie nel piano delle fasi.*

Discussione. Il sistema da studiare è un sistema di due equazioni differenziali lineari il cui campo vettoriale è definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & -2b \end{pmatrix}$$

Per tali sistemi l'origine $O(0, 0)$ è sempre un punto di equilibrio, un putno critico, una soluzione stazionaria, per capirne la natura dobbiamo studiare gli autovalori della matrice. In realtà O è una sella se e solo se gli autovalori sono non nulli e discordi (quindi anche reali), e il loro prodotto è svelato dal determinante di A, per cui dobbiamo cercare per quali coppie vale

$$\det(A) = a < 0$$

quindi l'unica coppia da considerare è $(a, b) = (-1, 0)$. Per calcolare effettivamente gli autovalori dobbiamo trovare gli zeri del polinomio caratteristico, e ricordando che $(a, b) = (-1, 0)$ otteniamo

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda(\lambda + 2b) + a = \lambda^2 + 2b\lambda + a = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Per il calcolo degli autovettori w_1 e w_2 procediamo come al solito iniziando da $\ker(A - I_2)$, quindi dal sistema

$$(A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$x + y = 0 \qquad \text{cioè} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

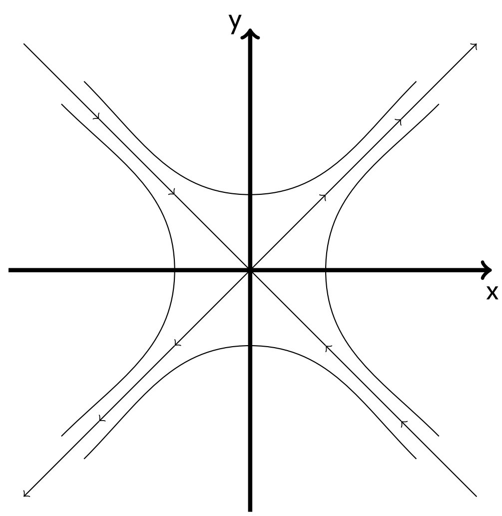
dopo di che passiamo allo studio di $\ker(A + I_2)$

$$(A + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e ricaviamo che

$$x - y = 0 \qquad \text{cioè} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infine tracciamo un disegno qualitativo delle traiettorie del sistema risultante ricordando che il sistema è contrattivo lungo l'autospazio $V_1 = \langle w_1 \rangle$ ed espansivo lungo $V_2 = \langle w_2 \rangle$



Si noti che le traiettorie sono dei rami di iperbole i cui asintoti sono le due rette passanti per l'origine aventi (rispettivamente) gli autovettori di A come giacitura. ∎

Esercizio 13. *Assegnato il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w''(s) - k^2 w(s) = f(s) \\ w(0) = w_0 \quad w'(0) = w_1 \end{cases} \qquad \text{\textit{con} } k > 0$$

si ottenga una formula risolutiva generale.

Discussione. Abbiamo a che fare con un'equazione del secondo ordine con termine forzante generico, il problema consiste nel trovare una soluzione particolare dell'equazione completa in quanto l'espressione delle soluzioni dell'equazione omogenea non costituisce un problema, infatti il polinomio caratteristico associato è

$$\lambda^2 - k^2 = (\lambda - k)(\lambda + k) = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \lambda_{1,2} = \pm k$$

il che ci permette di descrivere lo spazio vettoriale bidimensionale delle soluzioni dell'equazione omogenea nel seguente modo

$$W = \left\{ w_0(s) = Ae^{-ks} + Be^{ks} : A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Ricorrendo alla strategia della variazione dei parametri, imponiamo la seguente forma

$$w_p(s) = A(s)e^{-ks} + B(s)e^{ks}$$

Eseguendo le derivate, imponendo (come al solito) che

$$A'(s)e^{-ks} + B'(s)e^{ks} = 0$$

e sostituendo nell'equazione completa si ottiene

$$-A'(s)e^{-ks} + B'(s)e^{ks} = \frac{1}{k} f(s)$$

insieme le due relazioni sono un sistema di equazioni lineari non omogeneo del primo ordine, sommando e sottraendo otteniamo

$$A(s) = -\frac{1}{2k} \int_0^s f(t)e^{kt} dt \qquad B(s) = \frac{1}{2k} \int_0^s f(t)e^{-kt} dt$$

sostituendo le funzioni ottenute nell'espressione di $w_p(s)$ troviamo la seguente espressione

$$w_p(s) = \frac{1}{2k} \left[\int_0^s f(t)e^{kt} dt \right] e^{-ks} + \frac{1}{2k} \left[\int_0^s f(t)e^{-kt} dt \right] e^{ks}$$

ricordando la definizione delle funzioni trigonometriche ipoerboliche sinh(s) e cosh(s) possiamo riscrivere l'espressione della soluzione ottenendo la seguente espressione generale

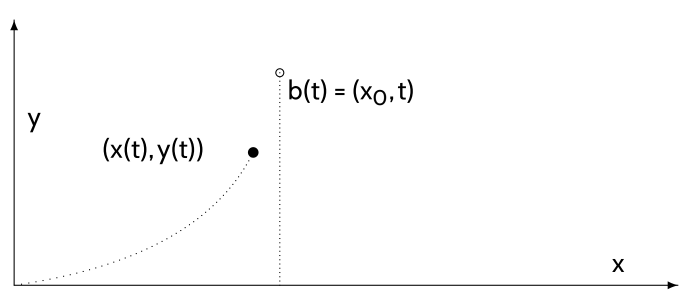
$$w(s) = w_0(s) + w_p(s) = \tilde{A} \cosh(ks) + \tilde{B} \sinh(ks) + \frac{1}{k} \left[\int_0^s f(t) \sinh(k(t-s)) dt \right] \quad \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}$$

Infine, dai dati iniziali, otteniamo l'espressione desiderata dell'unica soluzione

$$w(s) = w_0 \cosh(ks) + \frac{w_1}{k} \sinh(ks) + \frac{1}{k} \left[\int_0^s f(t) \sinh(k(t-s)) dt \right] \qquad \square$$

ESERCIZIO 14. *È ben noto che il Quidditch è uno sport magico che si pratica a cavallo di manici di scopa volanti con quattro palle e presenta elementi in comune con vari sport del mondo dei babbani. Il Quidditch è lo sport più popolare del mondo magico ed esistono numerose squadre professionistiche di questo sport e la scuola di magia e stregoneria di Hogwarts ha una squadra per ognuna delle case (Grifondoro, Serpeverde, Corvonero e Tassorosso)...*
Il boccino d'oro è una palla incantata dorata dal diametro di una noce dotata di ali. Ogni squadra mette in campo un proprio giocatore, il cercatore, il cui compito è darle la caccia e cercare di prenderla. è molto piccola e molto veloce, al punto che a stento la si vede, e per questo motivo i cercatori sono solitamente i giocatori più piccoli ed agili. La cattura del boccino segna la fine della partita, ed alla squadra del cercatore che è riuscito a catturarlo vengono assegnati 150 *punti.*
Supponiamo che, all'istante $t = 0$*, il boccino parta dal punto di coordinate* $P_0(x_0, 0)$*, con* $x_0 > 0$*, e proceda con velocità costante pari a* 1 *in linea retta con direzione* e_2*, quindi seguendo la traiettoria descritta dalla parametrizzazione* $b(t) = (x_0, t)$*. Contemporaneamente un cercatore parte dal punto* $O(0, 0)$ *e deve scegliere la sua traiettoria di inseguimento* $(x(t), y(t))$ *sapendo che si muove con velocità costante (in modulo) pari a* $v \geq 1$*. Si cerchi di aiutare il cercatore!*

DISCUSSIONE. Riassumiamo le informazioni salienti del problema nel seguente disegno



La prima osservazione che possiamo fare è che il cercatore si muove con velocità (in modulo) costante, quindi per raggiungere il boccino è conveniente supporre che la sua traiettoria sia il grafico di una funzione $y = y(x)$ e il cercatore deve indirizzare la sua traiettoria verso il boccino, cioè il suo vettore velocità deve puntare verso $b(t)$

$$(2) \qquad y'(x) = \frac{t - y(x)}{x_0 - x} = \frac{y(x) - t}{x - x_0} \qquad \text{da cui ricaviamo} \qquad t = y(x) - y'(x)(x - x_0)$$

inoltre, ricordando la relazione che intercorre tra spazio e tempo nei moti a velocità costante, deve anche valere

$$t = \frac{1}{v}\int_0^x \sqrt{1 + |y'(s)|^2}\,ds$$

e uguagliando le relazioni ottenute otteniamo

$$y(x) - y'(x)(x - x_0) = \frac{1}{v}\int_0^x \sqrt{1 + |y'(s)|^2}\,ds$$

Ponendo $y'(x) = p(x)$ e derivando rispetto ad x trasformiamo la precedente equazione integro-differenziale nella seguente

$$k\sqrt{1 + p^2(x)} = -p'(x)(x - x_0)$$

dove $k = 1/v \in (0,1)$ è un parametro che esprime il rapporto tra le velocità del boccino e del cercatore. Dalla precedente uguaglianza (di fatto l'equazione è a variabili separabili) troviamo

$$\frac{p'(x)}{\sqrt{1 + p^2(x)}} = -\frac{k}{(x - x_0)}$$

e passando alle corrispondenti primitive possiamo scrivere che

$$\ln\left(p(x) + \sqrt{1 + p^2(x)}\right) = -\ln\left((x_0 - x)^k\right) + C$$

dove abbiamo anche sfruttato il fatto che deve valere $x < x_0$ lungo la traiettoria percorsa dal cercatore. Osserviamo che il calcolo della primitiva a sinistra può risultare più impegnativo, si effettua nel seguente modo

$$\begin{aligned}\int \frac{p'(x)}{\sqrt{1 + p^2(x)}}dx &= \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = -\int \frac{2s}{1 + s^2}\,\frac{1 + s^2}{2s^2}ds = -\int \frac{ds}{s} = -\ln(|s|) + c \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2} - p}\right) + c = \ln\left(\sqrt{1 + p^2} + p\right) + c\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la sostituzione

$$1 + p^2 = (p + s)^2 \qquad \left(\text{da cui} \qquad p = \frac{1 - s^2}{2s} \qquad \text{e anche} \qquad dp = -\frac{1 + s^2}{2s^2}ds\right)$$

e razionalizzato la frazione finale nell'argomento del logaritmo.
Sappiamo che la traiettoria del cercatore ha origine in $O(0,0)$, il che significa che quando $x = 0$ vale anche $t = 0$ e, di conseguenza $y = 0$, cio è $y(0) = 0$ per cui da (2) otteniamo che $p(0) = y'(0) = 0$ e nella precedente relazione possiamo calcolare C ottenendo

$$\ln\left(p(x) + \sqrt{1 + p^2(x)}\right) = -\ln\left((x_0 - x)^k\right) + \ln\left(x_0^k\right) = -\ln\left(\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k\right)$$

e svolgendo alcuni semplici conti abbiamo

$$\ln\left(\left[p(x) + \sqrt{1 + p^2(x)}\right]\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k\right) = 0$$

$$\left[p(x) + \sqrt{1 + p^2(x)}\right]\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^k = 1$$

$$p(x) + \sqrt{1 + p^2(x)} = \frac{1}{(1 - x/x_0)^k}$$

La precedente relazione è del tipo

$$p + \sqrt{1 + p^2} = Q \qquad \text{da cui segue} \qquad \sqrt{1 + p^2} = Q - p$$

a questo punto possiamo elevare al quadrato ed esplicitare l'incognita p

$$1 + p^2 = Q^2 - 2pQ + p^2 \qquad \text{ovvero} \qquad p = \frac{Q^2 - 1}{2Q} = \frac{1}{2}\left[Q - \frac{1}{Q}\right]$$

e giungere così all'espressione

$$y'(x) = p(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{x_O}\right)^{-k} - \left(1 - \frac{x}{x_O}\right)^{k}\right]$$

integrando la relazione trovata otteniamo l'espressione esplicita della funzione y(x)

$$y(x) = \frac{k}{1 - k^2}x_O + \frac{1}{2}(x_O - x)\left[\frac{(1 - x/x_O)^k}{1 + k} - \frac{(1 - x/x_O)^{-k}}{1 - k}\right]$$

Possiamo concludere che il cercatore intercetta il boccino quando $x = x_O$ per cui risulta $y(x_O) = k/(1 - k^2)x_O$.

■
