ANALISI VETTORIALE
LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 13 - 20260108

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Determinare la soluzione* $w(t)$ *del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(t) = |t|w(t) \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

i. esaminare se si tratta di funzione w *monotona,*
ii. esaminare se la soluzione sia o meno di classe $C^2(\mathbb{R})$*,*
iii. scrivere l'equazione integrale equivalente al problema di Cauchy assegnato.

ESERCIZIO 2. *Assegnata la funzione*

$$a(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & t \in [-1,1] \\ 0 & t \notin [-1,1] \end{cases}$$

si determinino le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(0) = y_0 \in \{\pm 2, \pm 1, 0\} \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. *Si consideri il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \left[4 + w^2(x)\right] w'(x) = w(x) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

i. si spieghi perché il problema possiede un'unica soluzione locale,
ii. si discuta l'esistenza globale della soluzione,
iii. si risolva il problema di Cauchy con $w_0 = 1$*.*

ESERCIZIO 4. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $y_n(t)$ *la soluzione del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = n\left[y(t) - y^2(t)\right] \\ \qquad y(0) = 1/2 \end{cases}$$

i. si spieghi perché y_n *esiste ed è unica,*
ii. si spieghi perché y_n *è definita su tutta la semiretta* $S = [0, +\infty)$*,*
iii. si calcoli il $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$*, per* $t \in S$*, e si dica in quali sottointervalli della semiretta tale convergenza è uniforme.*

ESERCIZIO 5. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = tu(t)\,(u(t) - 1) \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$$

si discutano (esattamente nell'ordine proposto) le seguenti affermazioni
i. il problema possiede un'unica soluzione locale,

ii. il problema possiede un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$,
iii. la soluzione ammette limite per $t \longrightarrow -\infty$,
iv. la soluzione è monotona,
infine si calcoli l'espressione esplicita della soluzione.

ESERCIZIO 6. *Si consideri il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)\left(1 + u^2(t)\right) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

e si risponda alle seguenti affermazioni i. Dire se il problema possiede un'unica soluzione in un intorno dell'origine.
ii. Dire se la soluzione è monotona nell'intervallo in cui è definita.
iii. Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 0$ *e calcolare l'intervallo massimale di definizione.*
iv. Determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(0) = 1$ *e calcolare l'intervallo massimale di definizione.*

ESERCIZIO 7. *Assegnata l'equazione differenziale autonoma*

$$w'(t) = \frac{1}{1 + w(t)}$$

i. si verifichino le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità al variare dei dati iniziali (t_0, w_0),
ii. si determinino almeno tre sue soluzioni,
iii. si determini la soluzione del problema di Cauchy $w(0) = 0$,
iv. si provi che le soluzioni $w(t)$ *dell'equazione sono tutte funzioni monotone.*

ESERCIZIO 8. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = (1 + t)e^{-u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

si discutano le seguenti affermazioni esattamente nell'ordine proposto
i. il problema possiede un'unica soluzione locale u,
ii. u *è definita su una semiretta del tipo* $(-\delta, +\infty)$,
iii. la soluzione è crescente e non ha punti stazionari,
iv. u *è concava.*
Infine si calcoli esplicitamente la soluzione.

ESERCIZIO 9. *Data l'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti*

$$u''(t) + \frac{1}{4t^2}u(t) = 0$$

i. si verifichi che $z(t) = \sqrt{t}$ *è soluzione,*
ii. si provi l'esistenza di una seconda soluzione linearmente indipendente della forma $w(t) = c(t)z(t)$,
iii. si trovi la soluzione dell'equazione con dati iniziali $u(1) = 1$ *e* $u'(1) = 0$.

ESERCIZIO 10. *Risolvere i seguenti sistemi differenziali nelle incognite* u *e* v

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) + 2v(x) \\ v'(x) = u(x) - \cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) + v(x) + x = 0 \\ v'(x) - v(x) + 2u(x) = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 11. *Determinare la soluzione dei seguenti problemi:*

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(1) = 0 \quad y'(1) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 12. *Dati* $a, b \in \mathbb{R}$*, si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = ax(t) - 2by(t) \end{cases}$$

e si individui per quali tra le seguenti scelte dei parametri

$$(a,b) = (-1,0) \qquad (a,b) = (0,2) \qquad (a,b) = (1,2)$$

l'origine $(0,0)$ *è un punto di sella per il sistema. Per tale coppia, si calcolino autovalori ed autovettori poi si disegni qualitativamente le traiettorie nel piano delle fasi.*

Esercizio 13. *Assegnato il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w''(s) - k^2 w(s) = f(s) \\ w(0) = w_0 \quad w'(0) = w_1 \end{cases} \qquad \text{con } k > 0$$

si ottenga una formula risolutiva generale.

Esercizio 14. *È ben noto che il Quidditch è uno sport magico che si pratica a cavallo di manici di scopa volanti con quattro palle e presenta elementi in comune con vari sport del mondo dei babbani. Il Quidditch è lo sport più popolare del mondo magico ed esistono numerose squadre professionistiche di questo sport e la scuola di magia e stregoneria di Hogwarts ha una squadra per ognuna delle case (Grifondoro, Serpeverde, Corvonero e Tassorosso)...*
Il boccino d'oro è una palla incantata dorata dal diametro di una noce dotata di ali. Ogni squadra mette in campo un proprio giocatore, il cercatore, il cui compito è darle la caccia e cercare di prenderla. è molto piccola e molto veloce, al punto che a stento la si vede, e per questo motivo i cercatori sono solitamente i giocatori più piccoli ed agili. La cattura del boccino segna la fine della partita, ed alla squadra del cercatore che è riuscito a catturarlo vengono assegnati 150 *punti.*
Supponiamo che, all'istante $t = 0$*, il boccino parta dal punto di coordinate* $P_0(x_0, 0)$*, con* $x_0 > 0$*, e proceda con velocità costante pari a* 1 *in linea retta con direzione* e_2*, quindi seguendo la traiettoria descritta dalla parametrizzazione* $b(t) = (x_0, t)$*. Contemporaneamente un cercatore parte dal punto* $O(0,0)$ *e deve scegliere la sua traiettoria di inseguimento* $(x(t), y(t))$ *sapendo che si muove con velocità costante (in modulo) pari a* $v \geq 1$*. Si cerchi di aiutare il cercatore!*
