SOLUZIONI DEL FOGLIO 13

1)

$$f(x) = \log \left| \frac{2x^2 - 5x - 3}{(x-1)(x-3)} \right| = \log \left| \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-1)(x-3)} \right|$$

Domínio $(-\infty, -1/2) \cup (-1/2, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \log 2 \quad \lim_{x \rightarrow -1/2} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

$\log(7/2)$

$x = 3$ è un punto di discontinuità eliminabile $y = 2$ asintoto orizzontale
 $x = -1/2$ e $x = 1$ asintoti verticali.

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2(x-1) - 2x+1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)(2x-1)}$$

$f'(x) > 0$ $-1/2 < x < 1$ f cresce in $(-1/2, 1)$ e decresce in $(-\infty, -1/2)$ e in $(1, +\infty)$. Non esistono estremi nè relativi nè assoluti,

$$f''(x) = 3 \frac{(2x+1) + 2(x-1)}{(x-1)^2(2x-1)^2} = \frac{4x-1}{(x-1)^2(2x-1)^2}$$

$f''(x) = 0$ $x = 1/4$ punto di flesso $f(1/4) = \log 2$. f è concava in $(-\infty, -1/2)$ e in $(-1/2, 1/4)$; è convessa in $(1/4, 1)$ e in $(1, +\infty)$.

L'immagine è $\mathbf{R}$.

L'equazione $f(x) = a$ ha 2 soluzioni per $a < \log 2$ $\log 2 < a < \log 7/2$ ed $a > \log 7/2$. 1 soluzione per $a = \log 2$ e $a = \log 7/2$

2) Usando l'asintoticità di $(e^x - 1)$ e di $(1 - \cos x)$ si ha ordine di infinitesimo di $f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(\sqrt{1 - \cos x}) - 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2/2)^{1/2}}{x^\alpha} = 1/\sqrt{2} \quad \text{se } \alpha = 1$$

Usando l'asintoticità di $\log(1+x)$ e di $\tan x$ si ha ordine di infinitesimo di $g(x) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan x^3)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^3}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^\alpha} = 1 \quad \text{se } \alpha = 3$$

Usando l'asintoticità di $\tan x$ e di $\sin x$ si ha ordine di infinitesimo di $h(x) = 11/5$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)^{1/5} \sin^2 x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/5} x^2}{x^\alpha} = 1 \quad \text{se } \alpha = 11/5$$

In questo caso non è sufficiente utilizzare l'asintoticità delle funzioni che compaiono ma bisogna usare lo sviluppo di Taylor di e^{-x} e di $\log(1+x)$

$$e^{-x} = 1 - x + (-x)^2/2 + (-x)^3/6 + o(x^4) \quad \log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + \log(x+1)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^4) - 1 + x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^4)}{x^\alpha} = 1/6 \quad \text{se } \alpha = 3$$

Concludendo $f(x)$ è l'infinitesimo di ordine più basso poi abbiamo $h(x)$ mentre $g(x)$ e $k(x)$ sono dello stesso ordine e sono i due infinitesimi di ordine più alto.

3) Poniamo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbf{R}$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} x^2 + 2xyi - y^2 - x^2 - y^2 + 2y^2 - 2i &= 0 & xy &= 1 \\ \text{da cui } y &= 1/x & \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} & z = x + i/x \end{aligned}$$

4)

$$\begin{cases} y' - 4y + 8xy^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Bernoulli. L'equazione ha la soluzione $y \equiv 0$ che non risolve il problema di Cauchy, possiamo perciò dividere per y^2 e considerare l'equazione lineare non omogenea che si ottiene per $z(x) = 1/y(x)$

$$z'(x) + 4z(x) = 8x$$

$$\begin{aligned} e^{4x} z'(x) + 4e^{4x} z(x) &= 8e^{4x} x \\ \frac{d}{dx}(e^{4x} z(x)) &= 8e^{4x} x \\ z(x) &= e^{-4x} 2 \int 4e^{4x} x dx = 2e^{-4x} \left[e^{4x} x - \int e^{4x} dx \right] \\ z(x) &= 2x - 1/2 + ce^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2x - 1/2 + ce^{-4x}} = \frac{2e^{4x}}{(4x - 1)e^{4x} + c} \\ y(0) &= 2/(-1 + c) = 1 \quad c = 3 \end{aligned}$$

La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \frac{2e^{4x}}{(4x-1)e^{4x}+3}$

5) $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{3x^2+y^2}} dx dy$ D è un dominio y -semplice definito dalle limitazioni

$0 \leq x \leq 1/\sqrt{3}$ $\sqrt{1-3x^2} \leq y \leq 1$. Usando le formule di riduzione si ha

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy}{\sqrt{3x^2+y^2}} dx dy &= \int_0^{1/\sqrt{3}} x dx \int_{\sqrt{1-3x^2}}^1 \frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} dy = \int_0^{1/\sqrt{3}} x dx \left[\sqrt{3x^2+y^2} \right]_{\sqrt{1-3x^2}}^1 = \\ \int_0^{1/\sqrt{3}} (x\sqrt{3x^2+1} - x) dx &= \frac{1}{9} \left[(3x^2+1)^{3/2} \right]_0^{1/\sqrt{3}} - [x^2/2]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{1}{9}(2\sqrt{2}-1) - \frac{1}{6} \end{aligned}$$