

ANALISI MATEMATICA a.a 2017-2018

Esercitazione del 20-12-2017

1) Sia

$$f(x) = \sqrt{|x|} \left| 1 + \frac{1}{\log|x|} \right|$$

studiare:

i) dominio e limiti agli estremi

ii) derivabilità, monotonia, estremi relativi ed assoluti

iv) il grafico e l'immagine

v) il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ al variare del numero reale

a.

2) Siano $a_n = \frac{1/n - \sin(1/n)}{\exp(1/n^3) - 1}$ e $b_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$.

Calcolare il limite per $n \rightarrow +\infty$ delle due successioni. Studiare il comporta-

mento delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Per quali α reali converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^\alpha}$?

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{tg} x$$

4) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{y(x - \sin x)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) f è continua in $(0,0)$?

b) f è derivabile parzialmente in $(0,0)$?

c) f è differenziabile in $(0,0)$?

d) trovare la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

5) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D 3y dx dy \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 2x \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$