Compito Scritto Meccanica Quantistica, 01/02/2017

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin 1, che si muove in uno spazio limitato da due superfici piane poste in $z = -a/2$ e $z = a/2$, per cui la sua coordinata z soddisfa la condizione $-a/2 \leq z \leq a/2$. L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \alpha(L_z + 2S_z)\,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{L}$ è il momento angolare. Vale la relazione $\hbar^2/(ma^2) \gg \hbar\omega \gg \hbar\alpha > 0$.

1. Si determinino gli autostati di H con energie $E < E_{\max}$, $E_{\max} = \pi^2\hbar^2/(2ma^2) + \frac{5}{2}\hbar\omega$. Si riportino i valori delle rispettive energie e le degenerazioni dei livelli;
2. Si determini lo stato più generale ψ tale che: (a) una misura dell'energia dà con certezza $E < E_{\max}$; (b) una misura di J_z ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$) dà con certezza $\hbar$; (c) la probabilità di misurare $S_z = \hbar$ è $\frac{1}{2}$; (d) vale la condizione $\langle\psi|\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}|\psi\rangle = 0$;
3. Se $\psi(t)$ è l'evoluto di temporale di ψ ($\psi(t=0) = \psi$), si calcoli $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$.

Funzioni d'onda per l'oscillatore armonico unidimensionale:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda^2 x^2/2}, \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda x \psi_0(x) \qquad \lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,.$$

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 nel sistema di riferimento del centro di massa. In tale riferimento l'Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - \gamma L_z\,,$$

con $0 < \gamma < \frac{1}{6}\omega$; $\mathbf{L}$ è il momento angolare orbitale totale del sistema.

1. Determinare gli autovalori E, con le rispettive degenerazioni, dell'Hamiltoniana che soddisfano a $E < 4\hbar\omega$.
2. Il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ tale che una misura dell'energia E può dare solo $E \leq 3\hbar\omega$; valgono $L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle$ e $J^2|\psi\rangle = 0$, con $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. Determinare $|\psi\rangle$.
3. Quali valori può dare una misura della componente z dello spin di una particella nello stato $|\psi\rangle$? Con quale probabilità?
4. Si supponga che il sistema sia nello stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$. Quali valori di J^2 e J_z possono essere ottenuti da una misura del momento angolare totale all'istante t generico e con quale probabilità?

Scritto 01/02/2017

Esercizio 1.

Indichiamo con $|n\ l_z\rangle_a$ gli autostati dell'oscillatore armonico bidimensionale:

$$|0\ 0\rangle_a \qquad E = \hbar\omega$$

$$\left.\begin{array}{l}|1\ -1\rangle_a\\ |1\ +1\rangle_a\end{array}\right\} \qquad E = 2\hbar\omega$$

$$\left.\begin{array}{l}|2\ -2\rangle_a\\ |2\ 0\rangle_a\\ |2\ 2\rangle_a\end{array}\right\} \qquad E = 3\hbar\omega$$

Indichiamo con $|m\rangle_b$ gli stati delle buca unidimensionale di larghezza a

$$|M\rangle_b \qquad E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}M^2$$

Indichiamo con $|S_z\rangle_s$ gli autostati di S_z. Gli autostati di H hanno la forma

$$|n\ l_z\rangle|M\rangle_b|S_z\rangle_s \qquad E = \hbar\omega(n+1) + \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}M^2 + \hbar\alpha(l_z+2S_z)$$

STATI RILEVANTI

$$n=0 \quad l_z=0 \quad M=1 \quad S_z=\begin{cases}-1\\ 0\\ +1\end{cases} \Longrightarrow E = \hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar S_z$$

(tutti non degeneri)

$$n=1 \quad l_z=-1 \quad M=1 \quad S_z=-1 \qquad E = E^* - 3\alpha\hbar$$

$$\begin{cases}n=1 \quad l_z=-1 \quad M=1 \quad S_z=0\\ n=1 \quad l_z=1 \quad M=1 \quad S_z=-1\end{cases} \qquad E = E^* - \alpha\hbar \quad (\text{deg. } 2)$$

$$\begin{cases}n=1 \quad l_z=-1 \quad M=1 \quad S_z=1\\ n=1 \quad l_z=1 \quad M=1 \quad S_z=0\end{cases} \qquad E = E^* + \alpha\hbar \quad (\text{deg. } 2)$$

$$n=1 \quad l_z=1 \quad M=1 \quad S_z=1 \qquad E = E^* + 3\alpha\hbar$$

dove $E^* = 2\hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$

Dom. 2

(a) implica che è una combinazione degli stati ~~sta~~ determinati alla domanda 1

(b) implica che $l_z + S_z = 1$. Esistono solo due stati con questa proprietà:

$$|0\,0\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_S \,, \quad |1\,1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_S$$

Quindi

$$\psi = a|0\,0\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_S + b|1\,1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_S$$

Posso scegliere $a \in \mathbb{R}$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \implies a^2 + |b|^2 = 1$

(c)

$P(S_z = \hbar) = a^2 \implies a = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies |b|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies b = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}$

Quindi

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\,0\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_S + e^{i\varphi}|1\,1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_S\right)$$

(d) $\bar{r}\cdot\bar{S} = x S_x + y S_y + z S_z$

$\langle\psi| z S_z |\psi\rangle = 0$

Infatti $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\,0\rangle_a |1\rangle_S + e^{i\varphi}|1\,1\rangle_a |0\rangle_S\right)|1\rangle_b$

$= |\phi\rangle |1\rangle_b$

$\langle\psi| z S_z |\psi\rangle = {}_b\langle 1|z|1\rangle_b \langle\phi| S_z |\phi\rangle$

Ma ${}_b\langle 1|z|1\rangle_b = \frac{2}{L}\int_{-a/2}^{a/2} dz\, z \cos^2\left(\frac{\pi z}{a}\right) = 0$ per antisimmetria

Ora

$$\langle\psi| x S_x + y S_y |\psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ {}_a\langle 00|\, {}_b\langle 1|\, {}_s\langle 1|\, x S_x + y S_y \,|00\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_s$$

$$+ {}_a\langle 00|\, {}_b\langle 1|\, {}_s\langle 1|\, x S_x + y S_y \,|1\,1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_s \, e^{i\varphi}$$

$$+ {}_a\langle 11|\, {}_b\langle 1|\, {}_s\langle 0|\, x S_x + y S_y \,|0\,0\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_s \, e^{-i\varphi}$$

$$+ {}_a\langle 11|\, {}_b\langle 1|\, {}_s\langle 0|\, x S_x + y S_y \,|1\,1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_s \Big\}$$

Dato che $\langle_s 1| S_{x,y} |1\rangle_s = {}_s\langle 0| S_{x,y} |0\rangle_s = 0$, il primo e l'ultimo termine sono nulli. Definiamo

$$A = {}_a\langle 00|\, {}_b\langle 1|\, {}_s\langle 1|\, x S_x + y S_y \,|1\,1\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_s$$

$$= {}_a\langle 00|\, {}_s\langle 1|\, x S_x + y S_y \,|1\,1\rangle_a |0\rangle_s$$

Allora

$$\langle\psi| x S_x + y S_y |\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(A e^{i\varphi} + A^* e^{-i\varphi} \right)$$

Per il calcolo di A, notiamo che ${}_s\langle 1| S_- |0\rangle_s = 0$ per cui possiamo sostituire

$$x S_x + y S_y = x \frac{1}{2}(S_+ + S_-) + y \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2}(x - iy) S_+$$

Quindi

$$A = {}_a\langle 00|\, {}_s\langle 1|\, \frac{1}{2}(x - iy) S_+ \,|1\,1\rangle_a |0\rangle_s =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, {}_a\langle 00| (x - iy) |1\,1\rangle_a$$

Il calcolo della fase RICHIEDE SEMPRE di specificare completamente le funzioni d'onda
Se $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore 1D

$$|00\rangle_a = \psi_0(x)\psi_0(y)$$
$$|11\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lambda(x+iy)\psi_0(x)\psi_0(y)$$
$$|1-1\rangle_a = \frac{1}{2}\lambda(x-iy)\psi_0(x)\psi_0(y)$$

$\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ sono le funzioni date nel testo.

$${}_a\langle 00|(x-iy)|11\rangle_a =$$
$$= \int dx\,dy\, \psi_0^*(x)\psi_0^*(y)(x-iy)\frac{\lambda}{2}(x+iy)\psi_0(x)\psi_0(y)$$
$$= \frac{\lambda}{2}\int dx\,dy\,(x^2+y^2)|\psi_0(x)|^2|\psi_0(y)|^2$$

Il calcolo dell'integrale è inutile. Basta osservare che l'integrale è reale positivo, per cui $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$
Quindi

$$\langle\psi|\bar{r}\cdot\bar{S}|\psi\rangle = \frac{A}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = A\cos\varphi$$

La condizione $\langle\psi|\bar{r}\cdot\bar{S}|\psi\rangle = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$
Quindi $e^{i\varphi} = \pm i$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_a|1\rangle_b|1\rangle_s \pm i|11\rangle_a|1\rangle_b|0\rangle_s\right)$$

3

$$\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\, e^{iHt/\hbar} H e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

$$= \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\alpha$$

Esercizio 2

In termini delle variabili relative, $\mu = \frac{m}{2}$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mu}p^2 + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2 - \gamma L_z$$

Indichiamo gli autostati dell'oscillatore 3D con

$$|n\,\ell\,\ell_z\rangle \qquad E = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

Dato che sotto parità $|n\,\ell\,\ell_z\rangle \longrightarrow (-1)^n |n\,\ell\,\ell_z\rangle$ abbiamo

$|0\,0\,0\rangle|0\,0\rangle_S \qquad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$|1\,1\,1\rangle|1\,S_z\rangle_S \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega - \hbar\gamma \qquad$ deg. in S_z (deg. 3)

$|1\,1\,0\rangle|1\,S_z\rangle_S \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad$ deg. in S_z (deg. 3)

$|1\,1\,-1\rangle|1\,S_z\rangle_S \qquad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \hbar\gamma \qquad$ deg. in S_z (deg. 3)

$|2\,2\,2\rangle|0\,0\rangle_S \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega - 2\hbar\gamma$

$|2\,2\,1\rangle|0\,0\rangle_S \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega - \hbar\gamma$

$\left\{\begin{array}{l}|2\,2\,0\rangle|0\,0\rangle_S \\ |2\,0\,0\rangle|0\,0\rangle_S\end{array}\right. \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega \qquad$ deg. 2

$|2\,2\,-1\rangle|0\,0\rangle_S \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega + \hbar\gamma$

$|2\,2\,-2\rangle|0\,0\rangle_S \qquad E = \frac{7}{2}\hbar\omega + 2\hbar\gamma$

$|S\,S_z\rangle$ sono le autofunzioni di S^2, S_z, $\vec{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$

Domanda 2

(a) $E \leq 3\hbar\omega$ implica che è combinazione lineare solo degli stati con $n=0$ e $n=1$

(b) $L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2$ esclude lo stato $n=0$ che ha $L^2=0$.

(c) $J^2|\psi\rangle = 0$ implica che lo stato ha $J_z = 0 = \ell_z + S_z = 0$

Dalla tabella dei Clebsch-Gordan ricaviamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle_S + |1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle_S - |1\,1\,0\rangle|1\,0\rangle_S\Big]$$

Dato che tutti i termini hanno $n=1$, $\ell=1$, $S=1$ possiamo semplificare la notazione senza ambiguità

$$|n\,\ell\,\ell_z\rangle|S\,S_z\rangle \longrightarrow |\ell_z\rangle_L|S_z\rangle_S$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[|1\rangle_L|-1\rangle_S + |-1\rangle_L|1\rangle_S - |0\rangle_L|0\rangle_S\Big]$$

Domanda 3. Se $|s_{1z}\,s_{2z}\rangle_{12}$ è la base in termini di $S_{1z}\,S_{2z}$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[|1\rangle_L\Big|-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\Big\rangle_{12} + |-1\rangle_L\Big|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\Big\rangle_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_L\Big(\Big|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\Big\rangle_{12} - \Big|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\Big\rangle_{12}\Big)\Big]$$

Quindi

$$P\left(S_{1z}=\frac{\hbar}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P\left(S_{1z}=-\frac{\hbar}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Domanda 4

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cancel{e^{-\frac{it}{\hbar}\left(\frac{5}{2}\hbar\omega\right)}}\left[e^{i\gamma t}|1\rangle_L|-1\rangle_S+e^{-i\gamma t}|-1\rangle_L|1\rangle_S-|0\rangle_L|0\rangle_S\right]$$

Cambiamo base: $|J\,J_z\rangle_J$

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{e^{i\gamma t}\left(\sqrt{\frac{1}{6}}|2\,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle\right)+e^{-i\gamma t}\left(\sqrt{\frac{1}{6}}|2\,0\rangle-\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle\right)-\sqrt{\frac{2}{3}}|2\,0\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|0\,0\rangle\right\}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(e^{i\gamma t}+e^{-i\gamma t}-2\right)|2\,0\rangle+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(e^{i\gamma t}-e^{-i\gamma t}\right)|1\,0\rangle+\frac{1}{3}\left(e^{i\gamma t}+e^{-i\gamma t}+1\right)|0\,0\rangle$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}(\cos\gamma t-1)|2\,0\rangle+\frac{2i}{\sqrt{6}}\sin\gamma t\,|1\,0\rangle+\frac{1}{3}(2\cos\gamma t+1)|0\,0\rangle$$

$P(J_z=0)=1$

$P(J^2=6\hbar^2)=\frac{2}{9}(\cos\gamma t-1)^2$ $\quad P(J^2=2\hbar^2)=\frac{2}{3}\sin^2\gamma t$

$P(J^2=0)=\frac{1}{9}(1+2\cos\gamma t)^2$

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 01/02/2017

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin 1, che si muove in uno spazio limitato da due superfici piane poste in $z = -a/2$ e $z = a/2$, per cui la sua coordinata z soddisfa la condizione $-a/2 \leq z \leq a/2$. L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + \alpha(L_z + 2S_z)\,,$$

dove $\mathbf{L}$ è il momento angolare. Vale la relazione $\hbar^2/(ma^2) \gg \hbar\omega \gg \hbar\alpha > 0$.

1. Si determinino gli autostati di H con energie $E < E_{\max}$, $E_{\max} = \pi^2\hbar^2/(2ma^2) + \frac{5}{2}\hbar\omega$. Si riportino i valori delle rispettive energie e le degenerazioni dei livelli;

2. Si determini lo stato più generale ψ tale che: (a) una misura dell'energia dà con certezza $E < E_{\max}$; (b) una misura di J_z ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$) dà con certezza $\hbar$; (c) la probabilità di misurare $S_z = \hbar$ è $\frac{1}{2}$; (d) vale la condizione $\langle\psi|\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}|\psi\rangle = 0$;

3. Se $\psi(t)$ è l'evoluto di temporale di ψ ($\psi(t = 0) = \psi$), si calcoli $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$.

Funzioni d'onda per l'oscillatore armonico unidimensionale:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda^2x^2/2}, \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda x\psi_0(x) \qquad \lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,.$$

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 nel sistema di riferimento del centro di massa. In tale riferimento l'Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - \gamma L_z\,,$$

con $0 < \gamma < \frac{1}{6}\omega$; $\mathbf{L}$ è il momento angolare orbitale totale del sistema.

1. Determinare gli autovalori E, con le rispettive degenerazioni, dell'Hamiltoniana che soddisfano a $E < 4\hbar\omega$.

2. Il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle$ tale che una misura dell'energia E può dare solo $E \leq 3\hbar\omega$; valgono $L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle$ e $J^2|\psi\rangle = 0$, con $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. Determinare $|\psi\rangle$.

3. Quali valori può dare una misura della componente z dello spin di una particella nello stato $|\psi\rangle$? Con quale probabilità?

4. Si supponga che il sistema sia nello stato $|\psi\rangle$ al tempo $t = 0$. Quali valori di J^2 e J_z possono essere ottenuti da una misura del momento angolare totale all'istante t generico e con quale probabilità?

Soluzione dell'esercizio 1. Riscriviamo l'hamiltoniana nella forma

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \left[\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,\left(x^2 + y^2\right)\right] + \alpha\,(L_z + 2S_z)\,,$$

in cui riconosciamo che il primo termine $p_z^2/(2m)$ descrive la dinamica di una particella nel segmento a pareti infinite in $\pm a/2$ e il termine in parentesi quadra descrive la dinamica di un oscillatore armonico bidimensionale sul piano x, y. Gli autovalori $E(k, n, \ell_z, s_z)$ del sistema sono dati pertanto dalla somma

$$E(n_z, n, \ell_z, s_z) = \frac{\hbar^2\pi^2 n_z^2}{2ma^2} + \hbar\omega\,(n+1) + \hbar\alpha\,(\ell_z + 2s_z)$$

e le autofunzioni sono date dal prodotto tensoriale $|\psi\rangle = |n_z\rangle|\psi_{n,\ell_z}\rangle|s, s_z\rangle$, dove i ket $|\psi_{n,\ell_z}\rangle$ denotano gli autostati simultanei dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico bidimensionale e dell'operatore L_z. Poiché per $n_z = 2, n = 0$ (da cui segue $\ell_z = 0$) e $s_z = -1$ si ha

$$\left(\frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2} + \hbar\omega - 2\hbar\alpha\right) - E_{\max} = \left(\frac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2} + \hbar\omega - 2\hbar\alpha\right) - \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{5}{2}\,\hbar\omega\right) =$$

$$= \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2} - \frac{3}{2}\,\hbar\omega - 2\hbar\alpha = \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} - \hbar\omega - \frac{4}{3}\,\hbar\alpha\right) > 0,$$

in quanto $\hbar^2/(ma^2) \gg \hbar\omega \gg \hbar\alpha > 0$, segue che gli autostati di H richiesti hanno numero quantico $n_z = 1$ relativamente all'hamiltoniana della particella nel segmento con pareti infinite.

1. In ordine di energie crescenti, gli autostati di H con energia $E < E_{\max}$ sono

$$|\Psi_0\rangle = |1\rangle|\psi_{0,0}\rangle|1,-1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega - 2\hbar\alpha \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_1\rangle = |1\rangle|\psi_{0,0}\rangle|1,0\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_2\rangle = |1\rangle|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega + 2\hbar\alpha \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_3\rangle = |1\rangle|\psi_{1,-1}\rangle|1,-1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_3 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega - 3\hbar\alpha \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_4^{(a)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,-1}\rangle|1,0\rangle, \qquad |\Psi_4^{(b)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,1}\rangle|1,-1\rangle,$$

$$\text{di energia} \quad E_4 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega - \hbar\alpha \quad \text{e con degenerazione 2;}$$

$$|\Psi_5^{(a)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,-1}\rangle|1,1\rangle, \qquad |\Psi_5^{(b)}\rangle = |1\rangle|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle,$$

$$\text{di energia} \quad E_5 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega + \hbar\alpha \quad \text{e con degenerazione 2;}$$

$$|\Psi_6\rangle = |1\rangle|\psi_{1,1}\rangle|1,1\rangle, \qquad \text{di energia} \quad E_6 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega + 3\hbar\alpha \quad \text{e non degenere.}$$

   Osserviamo infine che risulta $E_3 > E_2$ perché per la condizione $\hbar\omega \gg \hbar\alpha > 0$ vale la disuguaglianza

$$E_3 - E_2 = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega - 3\hbar\alpha\right) - \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega + 2\hbar\alpha\right) = \hbar\omega - 5\hbar\alpha > 0.$$

2. Lo stato più generale $|\psi\rangle$ che verifichi la condizione (a) è una combinazione lineare degli autostati di H di cui al punto precedente; dalla condizione (b) segue che lo stato $|\psi\rangle$ è combinazione lineare dei soli due autostati $|\Psi_2\rangle$ e $|\Psi_5^{(b)}\rangle$; dalla condizione (c) segue che lo stato $|\psi\rangle$ è dato da

$$|\psi\rangle = |1\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \, |\psi_{0,0}\rangle |1,1\rangle + \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \, |\psi_{1,1}\rangle |1,0\rangle \right]. \tag{1}$$

Per imporre la condizione (d) scriviamo gli autostati dell'hamiltoniana H_O dell'oscillatore armonico bidimensionale nella forma $|n_x, n_y\rangle$ e abbiamo l'uguaglianza $|\psi_{0,0} = |0,0\rangle$.

Poiché gli autostati $|\psi_{1,\pm1}\rangle$ simultanei degli operatori H_O, L_z sono combinazione lineare degli autostati $|1,0\rangle = Cxe^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)}$ e $|0,1\rangle = Cye^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)}$, calcoliamo

$$L_z|1,0\rangle = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) Cxe^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)} = i\hbar \left[Cye^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)} \right] = i\hbar|0,1\rangle,$$

$$L_z|0,1\rangle = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) Cye^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)} = -i\hbar \left[Cxe^{-m\omega(x^2+y^2)/(2\hbar)} \right] = -i\hbar|1,0\rangle,$$

da cui seguono la rappresentazione matriciale di L_z nella base $\{|1,0\rangle, |0,1\rangle\}$

$$L_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e i suoi autovettori $|\psi_{1,\pm1}\rangle = (i|1,0\rangle \mp |0,1\rangle)/\sqrt{2}$, relativi agli autovalori $\ell_z = \pm\hbar$.

Ricaviamo ora la fase α ipotizzando che

$$|\psi_{1,\pm1}\rangle = (i|1,0\rangle \mp |0,1\rangle)/\sqrt{2}$$

e che

$$|1,0\rangle = Cxe^{-\lambda(x^2+y^2)/2}, \quad |0,1\rangle = Cye^{-\lambda(x^2+y^2)/2},$$

con C costante reale. La fase che troveremo dipende strettamente da questa scelta.

Poiché risulta

$$\langle\psi_{0,0}|x|\psi_{1,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0,0| x \, (i|1,0\rangle - |0,1\rangle) = i\sqrt{\frac{\hbar}{4m\omega}} \; {}_x\langle 0|(a + a^\dagger)_x|1\rangle_x = i\sqrt{\frac{\hbar}{4m\omega}} \,,$$

$$\langle 1,1|S_x|1,0\rangle = \frac{1}{2} \langle 1,1| \, (S_+ + S_-) \, |1,0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \langle 1,1| \, (|1,1\rangle + |1,-1\rangle) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \,,$$

segue

$$\langle\psi|xS_x|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[\langle 1,1|\langle\psi_{0,0}| + e^{-i\alpha} \langle 1,0|\langle\psi_{1,1}| \right] xS_x \left[|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle + e^{i\alpha} \, |\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{i\alpha} \langle\psi_{0,0}|x|\psi_{1,1}\rangle \, \langle 1,1|S_x|1,0\rangle + e^{-i\alpha} \langle\psi_{1,1}|x|\psi_{0,0}\rangle \, \langle 1,0|S_x|1,1\rangle \right] = -\sqrt{\frac{\hbar^3}{8m\omega}} \, \sin\alpha$$

e dalle relazioni

$$\langle\psi|zS_z|\psi\rangle = A\langle 1|z|1\rangle = A \int_{-a/2}^{a/2} z \cos^2 kz \, dz = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle\psi|xS_x|\psi\rangle = \langle\psi|yS_y|\psi\rangle,$$

otteniamo infine $\langle\psi|(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S})|\psi\rangle = 0$ per $\alpha = 0, \pi$. Pertanto lo stato $|\psi\rangle$ assume le due forme possibili, indicate con $|\psi^{(\pm)}\rangle$, compatibili con le condizioni assegnate

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |1\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle\right].$$

Per comprendere come il risultato dipenda dalla scelte delle funzioni d'onda che appaioni nell equazione (**??**) supponiamo di definire

$$|\psi_{1,\pm 1}\rangle = C(x \pm iy)e^{-\lambda(x^2+y^2)/2},$$

con C costante reale. Le funzioni $|\psi_{1,\pm 1}\rangle$ ora definite differiscono per un fattore i dalle precedente per cui il risultato si scrive come

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |1\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{0,0}\rangle|1,1\rangle \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_{1,1}\rangle|1,0\rangle\right].$$

3. Poiché il valor medio dell'hamiltoniana su un qualsiasi stato risulta indipendente dal tempo, segue $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle$, da cui otteniamo (per entrambi gli stati $|\psi^{(\pm)}\rangle$)

$$\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \hbar\omega + 2\hbar\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + 2\hbar\omega + \hbar\alpha\right) =$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{3}{2}\,\hbar\omega + \frac{3}{2}\,\hbar\alpha.$$

Soluzione dell'esercizio 2. Nel sistema di riferimento del centro di massa delle due particelle, l'hamiltoniana del moto relativo delle due particelle assume la forma

$$\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2}{2}\,\boldsymbol{r}^2 - \gamma L_z\,,$$

avente autovalori

$$E(n, \ell_z) = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) - \hbar\gamma\ell_z\,,$$

in cui è stato trascurato il termine di hamiltoniana di particella libera relativo al baricentro. Poiché nel sistema di riferimento del centro di massa l'operatore di scambio delle due particelle coincide con l'operatore parità spaziale, segue che gli autostati del sistema sono dati dal prodotto delle autofunzioni dell'oscillatore armonico con numero quantico ℓ pari per il singoletto di spin, oppure dal prodotto delle autofunzioni dell'oscillatore armonico con numero quantico ℓ dispari per uno stato di tripletto di spin.

1. In ordine crescente di energia e indicando con $|\psi_{n,\ell,\ell_z}\rangle$ gli autostati dell'oscillatore armonico, gli autostati di $\mathcal{H}$ sono

$$|\Psi_0\rangle = |\psi_{0,0,0}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_0 = \frac{3}{2}\,\hbar\omega \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_1\rangle = |\psi_{1,1,1}\rangle\left|1, s_z; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_1 = \frac{5}{2}\,\hbar\omega - \hbar\gamma \quad \text{e con degenerazione 3;}$$

$$|\Psi_2\rangle = |\psi_{1,1,0}\rangle\left|1, s_z; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_2 = \frac{5}{2}\,\hbar\omega \quad \text{e con degenerazione 3;}$$

$$|\Psi_3\rangle = |\psi_{1,1,-1}\rangle\left|1, s_z; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_3 = \frac{5}{2}\,\hbar\omega + \hbar\gamma \quad \text{e con degenerazione 3;}$$

$$|\Psi_4\rangle = |\psi_{2,2,2}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_4 = \frac{7}{2}\,\hbar\omega - 2\hbar\gamma \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_5\rangle = |\psi_{2,2,1}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_5 = \frac{7}{2}\,\hbar\omega - \hbar\gamma \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_6^{(a)}\rangle = |\psi_{2,2,0}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \qquad |\Psi_6^{(b)}\rangle = |\psi_{2,0,0}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle,$$

$$\text{di energia} \quad E_6 = \frac{7}{2}\,\hbar\omega \quad \text{e con degenerazione 2;}$$

$$|\Psi_7\rangle = |\psi_{2,2,-1}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_7 = \frac{7}{2}\,\hbar\omega + \hbar\gamma \quad \text{e non degenere;}$$

$$|\Psi_8\rangle = |\psi_{2,2,-2}\rangle\left|0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad \text{di energia} \quad E_8 = \frac{7}{2}\,\hbar\omega + 2\hbar\gamma \quad \text{e non degenere.}$$

   Dalla condizione $0 < \gamma < \omega/6$ si ricavano le relazioni $E_1 > E_0$ e $E_4 > E_3$.

2. Per scrivere lo stato $|\psi\rangle$, utilizziamo la base $\{|n; j, j_z; \ell, s\rangle\}$ degli autostati simultanei degli operatori $\mathcal{H}, \boldsymbol{J}^2, J_z, \boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2$. In virtù della condizione $0 < \gamma < \omega/6$, uno stato di energia $E \leq 3\hbar\omega$ può essere combinazione lineare degli autostati dell'hamiltoniana aventi numero quantico $n = 0$ o $n = 1$. Poiché $\ell = 1$ e $j = 0$, segue $n = s = 1$ e $j_z = 0$ e quindi lo stato $|\psi\rangle$ è dato da $|\psi\rangle = |1; 0, 0; 1, 1\rangle$.

3. Nella base $\{|\psi_{n,\ell,\ell_z}\rangle|s,s_z\rangle\}$ degli autostati simultanei degli operatori $\mathcal{H}, \boldsymbol{L}^2, L_z, \boldsymbol{S}^2, S_z$, lo stato $|\psi\rangle$ assume la forma

$$|\psi\rangle = |1;0,0;1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,0}\rangle|1,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,-1}\rangle|1,1\rangle_S,$$

dove $|S,S_z\rangle_S$ sono gli autostati dello spin totale. Riscriviamo ora gli autostati dello spin totale in termini degli autostati simultanei di $\boldsymbol{S}_1^2, S_{1z}, \boldsymbol{S}_2^2, S_{2z}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,1}\rangle \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,-1}\rangle \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_2 \\ & - \frac{1}{\sqrt{6}}\,|\psi_{1,1,0}\rangle \left(\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_2 + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_2 \right),\end{aligned}$$

da cui ricaviamo che la misura della componente z dello spin di una qualsiasi delle due particelle fornisce i valori $\pm\hbar/2$ con probabilità $1/2$.

4. All'istante $t = 0$ lo stato $|\psi\rangle$ scritto nella forma

$$|\psi\rangle = |\psi,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,0}\rangle|1,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,-1}\rangle|1,1\rangle_S$$

è combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana $\mathcal{H}$, vedi punto 1 della soluzione:

$$\mathcal{H}|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S = \left(\frac{5}{2}\,\hbar\omega - \hbar\gamma\right)|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S$$

$$\mathcal{H}|\psi_{1,1,0}\rangle|1,0\rangle_S = \frac{5}{2}\,\hbar\omega\,|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S$$

$$\mathcal{H}|\psi_{1,1,-1}\rangle|1,1\rangle_S = \left(\frac{5}{2}\,\hbar\omega + \hbar\gamma\right)|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S\,.$$

Ricaviamo lo stato al generico istante di tempo $t > 0$ (avendo eliminato una fase comune):

$$|\psi,t\rangle = \frac{e^{i\gamma t}}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,1}\rangle|1,-1\rangle_S - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,0}\rangle|1,0\rangle_S + \frac{e^{-i\gamma t}}{\sqrt{3}}\,|\psi_{1,1,-1}\rangle|1,1\rangle_S$$

che nella base $\{|n;j,j_z;\ell,s\rangle\}$ assume la forma

$$|\psi,t\rangle = \left(\frac{2\cos\gamma t}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)|1;2,0;1,1\rangle + \frac{2i\sin\gamma t}{\sqrt{6}}\,|1;1,0;1,1\rangle + \left(\frac{2\cos\gamma t}{3} + \frac{1}{3}\right)|1;0,0;1,1\rangle.$$

Segue quindi che una misura di J_z può solo dare il valore $J_z = 0$ con probabilità 1 ad ogni istante t; mentre una misura di $\boldsymbol{J}^2$ può dare i valori $\boldsymbol{J}^2 = 6\hbar^2, 2\hbar^2, 0$ con probabilità

$$\mathcal{P}(6\hbar^2) = \left|\frac{2\cos\gamma t}{\sqrt{18}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right|^2 = \frac{2}{9}\,\cos^2\gamma t - \frac{4}{9}\,\cos\gamma t + \frac{2}{9}\,,$$

$$\mathcal{P}(2\hbar^2) = \left|\frac{2i\sin\gamma t}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}\,\sin^2\gamma t,$$

$$\mathcal{P}(0) = \left|\frac{2\cos\gamma t}{3} + \frac{1}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}\,\cos^2\gamma t + \frac{4}{9}\,\cos\gamma t + \frac{1}{9}\,.$$

Può essere istruttivo concludere con una "verifica di consistenza" che le probabilità ottenute dànno somma 1 e che all'istante $t = 0$ risulta effettivamente $\mathcal{P}(0) = 1$ con $\mathcal{P}(6\hbar^2) = \mathcal{P}(2\hbar^2) = 0$ perché lo stato iniziale $|\psi,0\rangle = |\psi\rangle = |1;0,0;1,1\rangle$ contiene il solo numero quantico $j = 0$.

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 20/02/2017

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche A e B di spin 1/2, vincolate a muoversi su una sfera di raggio R. L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = 2\alpha J^2 + \alpha L_A^2 + \alpha L_B^2,$$

con $\alpha > 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{L}_{\text{tot}} + \mathbf{S}_{\text{tot}}$, $\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B$ e $\mathbf{S}_{\text{tot}} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$.

1. Si determini lo stato fondamentale ψ_0 del sistema. Se ne calcoli l'energia e si esprima ψ_0 come combinazione lineare di $|\ell_A m_A\rangle|\ell_B m_B\rangle\chi_s^{s_z}$, dove $|\ell_A m_A\rangle$ sono le autofunzioni di L_A^2 ed L_{Az}, $|\ell_B m_B\rangle$ le analoghe autofunzioni per la particella B e $\chi_s^{s_z}$ sono gli spinori per lo spin totale $\mathbf{S}_{\text{tot}}$.
2. Si calcoli l'elemento di matrice $\langle\psi_0|A|\psi_0\rangle$ con $A = z_A^2 z_B^2 S_{Ax} S_{Bx}/R^4$.
3. Si determini il primo stato eccitato ψ_1 del sistema. Se ne calcoli l'energia e si esprima ψ_1 in termini delle stesse funzioni considerate al punto 1.
4. Viene effettuata una misura della componente x dello spin di una della due particelle sugli stati ψ_0 e ψ_1. Quali sono i possibili risultati della misura? Con quali probabilità?

Esercizio 2. In un sistema quantistico a tre stati sono dati i seguenti operatori:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \qquad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

L'Hamiltoniana del sistema è data da $\mathcal{H} = -\hbar\omega\hat{B}$. All'istante $t = 0$ il sistema si trova in un autostato dell'operatore $\hat{A}$ tale che $\hat{A}|\Psi_0\rangle = 0$.

1. Si determini Ψ_0 ed il suo evoluto temporale $\Psi(t)$.
2. Se si misura all'istante t generico l'osservabile $\hat{A}$, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità? Si calcoli inoltre $A(t) = \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle/\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle$.
3. Se si misura all' istante t generico l'osservabile $\hat{C}$, quali valori si possono ottenere e con quale probabilità? Si calcoli inoltre $C(t) = \langle\Psi(t)|\hat{C}|\Psi(t)\rangle/\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle$. Si spieghi l'origine della differente dipendenza temporale di $A(t)$ e $C(t)$.
4. Si aggiunge all'Hamiltoniana una perturbazione

$$\hat{V} = \varepsilon\,\hbar\omega\left(\hat{A} + \hat{C}\right) .$$

Si calcoli al primo ordine perturbativo in ε l'energia dello stato fondamentale ed il corrispondente autovettore.

Compito 20/02/17

(1.) $\psi_0 = |00\rangle_A |00\rangle_B \chi_0^0$

Domanda (2)

$$S_{Ax} S_{Bx} \chi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{Ax} S_{SB} \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_{Ax} |-\tfrac{1}{2}\rangle_{Bx} - |-\tfrac{1}{2}\rangle_{Ax} |\tfrac{1}{2}\rangle_{Bx} \right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}} \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_{Ax} |-\tfrac{1}{2}\rangle_{Bx} - |-\tfrac{1}{2}\rangle_{Ax} |\tfrac{1}{2}\rangle_{Bx} \right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{4} \chi_0^0$$

dove abbiamo usato $S_{tot,x} \chi_0^0 = S_{tot,y} \chi_0^0 = S_{tot,z} \chi_0^0 = 0$ dato che $S_{tot}^2 \chi_0^0 = 0$. Quindi χ_0^0 ha la stessa espressione qualsiasi sia l'asse considerato.

$$\langle \psi_0 | A | \psi_0 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4} \left[\int d\Omega \, |Y_0^0|^2 \cos^2\theta \right]^2$$
$$= -\frac{\hbar^2}{4} \left[\int \frac{d\phi \, d\cos\theta}{4\pi} \cos^2\theta \right]^2 = -\frac{\hbar^2}{36}$$

Domanda (3)

Se l'Hamiltoniana fosse solo $H_0 = \alpha (L_A^2 + L_B^2)$ il primo livello sarebbe dato da

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\,m\rangle_A |0\,0\rangle_B + |0\,0\rangle_A |1\,m\rangle_B \right) \chi_0^0$ — 3 stati, $L_{tot} = 1$, $S_{tot} = 0$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\,m\rangle_A |0\,0\rangle_B - |0\,0\rangle_A |1\,m\rangle_B \right) \chi_1^{S_z}$ — 9 stati, $L_{tot} = 1$, $S_{tot} = 1$

A partire da (a) si possono avere solo stati con $J=1$ ed energia

$$E = 2\alpha\, 2\hbar^2 + \alpha\, 2\hbar^2 = 6\alpha\hbar^2$$

A partire da (b) si possono avere stati con $J=0,1,2$
Lo stato ~~a~~ a energia più bassa ha $J=0$ ed $E=2\alpha\hbar^2$

Se

$$|1\, m\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\, m\rangle_A |0\, 0\rangle_B - |0\, 0\rangle_A |1\, m\rangle_B\right)$$

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1\, 1\rangle_t\, \chi_1^{-1} - \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1\, 0\rangle_t\, \chi_1^{0} + \sqrt{\frac{1}{3}}\, |1\, -1\rangle_t\, \chi_1^{1}$$

$$E_1 = 2\alpha\hbar^2$$

Domanda 4.

Per ψ_0:

$$\psi_0 = |0\, 0\rangle_A |0\, 0\rangle_B \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2}\, -\frac{1}{2}\right\rangle_{AB,x} - \left|-\frac{1}{2}\, \frac{1}{2}\right\rangle_{AB,x}\right)$$

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = +\frac{1}{2}$$

Per ψ_1

$$\chi_1^{-1} = \left|-\frac{1}{2}\, -\frac{1}{2}\right\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax} - \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\right)\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz}$$

$$\chi_1^{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{1}{2}\, \frac{1}{2}\right\rangle_z + \left|\frac{1}{2}\, -\frac{1}{2}\right\rangle_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz} - \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz} + \left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz} + \left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz}\right]$$

$$\chi_1^1 = \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_{Ax}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_{Bz}$$

$$P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

(1) autovalori ed autofunzioni di $\hat{A}$

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1+\lambda)(4-\lambda)$$

Autovalori: $0, -1, 4$

$$v_0 = \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \qquad v_{-1} = (0,1,0)$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iHt/\hbar}(1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iHt}(0,0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t}(1,0,0) - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}(0,0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\omega t}, 0, -e^{-i\omega t})$$

(2)

$$\psi(t) = \frac{\cos\omega t}{\sqrt{2}}(1,0,-1) + \frac{i\sin\omega t}{\sqrt{2}}(1,0,1) =$$

$$= \cos\omega t \, v_0 + i \sin\omega t \, v_4$$

$P(\hat{A}=0) = \cos^2\omega t \qquad P(\hat{A}=4) = \sin^2\omega t \qquad P(\hat{A}=-1) = 0$

$A(t) = 4\sin^2\omega t$

(3)

$P(\hat{C}=0) = \frac{1}{2} \qquad P(\hat{C}=-1) = \frac{1}{2}$

$C(t) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $C(t)$ non dipende da t, poichè $[C,H]=0$

④

$$V = \epsilon\hbar\omega \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $\epsilon = 0$ $\quad E_{FOND} = -\hbar\omega \qquad \psi_{FOND} = (1,0,0)$

Se $\epsilon \neq 0$ $\quad E_{FOND} = -\hbar\omega + \epsilon E_1$ (ad ordine ϵ)

$$\psi_{FOND} = (1,0,0) + \epsilon(a,b,c) = \psi_0 + \epsilon\psi_1$$

Non è restrittivo scegliere $a = 0$ [scelta di fase e normalizzazione]

$$E_1 = \hbar\omega\, (1,0,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\hbar\omega$$

Per calcolare ψ_1

$$(H + \epsilon V)(\psi_0 + \epsilon\psi_1) = (E_0 + \epsilon E_1)(\psi_0 + \epsilon\psi_1)$$

$$V\psi_0 + \epsilon H\psi_1 = \epsilon E_0\psi_1 + \epsilon E_1\psi_0$$

$$\epsilon\hbar\omega \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (+\hbar\omega\epsilon)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \epsilon(-\hbar\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2\epsilon\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -b \\ -c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\psi_{FOND} = (1,0,0) + \epsilon(0,0,-1) = (1,0,-\epsilon)$$

Alternativamente si può usare la formula (8.6) del Testa - Patrí e la successiva formula per $|E_1^{(k)}\rangle$ a p. 188. [edizione 2012].

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 17/05/2017

Esercizio 1. Due particelle di spin 1/2, distinguibili, si trovano inizialmente nello stato

$$|\psi_0\rangle = \left|\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle + 2\left|\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle$$

dove $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$ è l'autostato degli operatori di spin S_{1z} e S_{2z} delle due particelle.

1) All'istante $t = 0$ viene effettuata una misura di S_{1x} sul sistema trovando $\hbar/2$ ed al tempo $t_0 > 0$ viene effettuata una misura di S_{2z} trovando $-\hbar/2$. Si scriva la funzione d'onda normalizzata del sistema dopo la prima e la seconda misura, nella base $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$. Nell'intervallo di tempo $0 < t < t_0$ le due particelle non interagiscono.

2) Immediatamente dopo la misura al tempo t_0, viene accesa un'interazione tra le due particelle con Hamiltoniana
$$H = \alpha \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2.$$
Si scriva lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema al tempo $t > t_0$. Quali sono i valori misurabili di S_{2z} al tempo t e con quale probabilità?

3) Calcolare $\langle\psi(t)|S_{tot,x}|\psi(t)\rangle$ dove $\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$.

Esercizio 2. Un sistema a tre stati è descritto dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si considerino due osservabili

$$\mathcal{A} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\omega > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Trovare gli autostati (normalizzati) di $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Supponendo che all'istante $t = 0$ una misura di $\mathcal{A}$ abbia dato come risultato $-\alpha$, si scriva lo stato iniziale $|\psi_0\rangle$ del sistema.

1. Calcolare il valor medio di $\mathcal{A}$ in funzione del tempo, ossia $\langle\psi(t)|\mathcal{A}|\psi(t)\rangle$, dove $|\psi(t)\rangle$ è lo stato al tempo t e $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$;

2. Dire quali sono i possibili risultati di una misura di $\mathcal{B}$ sullo stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo t generico e le corrispondenti probabilità;

3. Calcolare lo spostamento in energia e la funzione d'onda dello stato fondamentale al primo ordine nella teoria delle perturbazioni (si assuma $\beta \ll 1$), se si aggiunge ad $\mathcal{H}$ una perturbazione $\mathcal{V} = \hbar\omega\mathcal{B}$.

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 05/07/2017

Esercizio 1. Due particelle identiche di spin 1/2 sono vincolate a muoversi su una sfera di raggio R. La loro funzione d'onda normalizzata è

$$\psi = \left(\frac{N x_1 x_2}{R^2} + \frac{1}{8\pi} \right) \phi_{S_1,S_2}$$

dove ϕ_{S_1,S_2} è la funzione d'onda normalizzata di spin ed i pedici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle.

a) Si esprima la ϕ_{S_1,S_2} nella base $|S_{1z} S_{2z}\rangle$.

b) Si calcoli la costante N in modo che ψ sia normalizzata.

c) Si effettua una misura di $(L_1 + L_2)^2$, dove $\mathbf{L}_1$ ed $\mathbf{L}_2$ sono i momenti angolari delle due particelle. Quali valori si ottengono e con quale probabilità?

Esercizio 2. Un sistema unidimensionale è composto da due particelle identiche di spin 0 e carica elettrica q. Il sistema è descritto dall'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_1^2 + p_2^2 \right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2 \right) - q\,\mathcal{E}\,(x_1 + x_2)\ ,$$

dove $\mathcal{E}$ è il campo elettrico nella direzione x.

a) Si determinino gli autovalori della Hamiltoniana e, per i tre livelli più bassi, se ne specifichi la degenerazione.

b) Si calcoli il valore medio dell'operatore $(x_1 - x_2)^2$ sullo stato fondamentale.

c) Si consideri l'Hamiltoniana $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + V$, dove

$$V = \lambda\, x_1\, x_2\,;$$

si calcoli l'energia dello stato fondamentale di $\mathcal{H}'$ al primo ordine in λ.

d) Si calcoli la funzione d'onda dello stato fondamentale di $\mathcal{H}'$ al primo ordine in λ; la si esprima come combinazione lineare degli autostati di $\mathcal{H}$.

Esercizio 1:

(a) Per il principio di Pauli le due particelle hanno Spin totale 0, quindi $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

(b) Dato che $\frac{x}{R} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,\frac{1}{2}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{1}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(|-1\rangle - |1\rangle\right)$

abbiamo

$$\frac{1}{R^2}x_1 x_2 = \frac{2\pi}{3}\left(|-1\,-1\rangle - |1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle + |1\,1\rangle\right)$$

dove i ket sono $|\ell_{1z}\,\ell_{2z}\rangle$

Quindi

$$\psi = \left[\frac{2\pi N}{3}\left(|-1\,-1\rangle - |1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle + |1\,1\rangle\right) + \frac{1}{2}|0\,0\rangle\right]\phi$$

Quindi $|N| = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{2\pi}$ $\quad N = \frac{\sqrt{3}}{4}\,e^{i\alpha}\left(\frac{3}{2\pi}\right)$, con α arbitraria

(c) passiamo alla base $|\ell_1\,\ell_2;\,\ell_{tot}\,\ell_{tot\,z}\rangle$. Otteniamo

$$\psi = \left[\frac{\sqrt{3}}{4}e^{i\alpha}\left(|-1\,-1\rangle - |1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle + |1\,1\rangle\right) + \frac{1}{2}|0\,0\rangle\right]\phi$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}e^{i\alpha}\left(|1\,1;2\,-2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\,1;2\,0\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}|1\,1;0\,0\rangle + |1\,1;2\,2\rangle\right) + \frac{1}{2}|0\,0;0\,0\rangle\right]\phi$$

Valori possibili: $6\hbar^2$ e 0

$$P(L_{tot}^2 = 6\hbar^2) = \frac{3}{16}\left(1 + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P(L_{tot}^2 = 0) = \frac{3}{16}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

(a) Studiamo preliminarmente il problema unidim. con

$$H_{1D} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - qEx$$

Dal punto di vista classico il sistema oscilla con pulsazione ω attorno al punto di equilibrio x_{eq} dato da $-m\omega^2 x_{eq} + qE = 0$ $\quad x_{eq} = \frac{qE}{m\omega^2}$

Scegliamo quindi un sistema di riferimento con origine nel punto di equilibrio

$$X = x - x_{eq} \qquad x = X + x_{eq}$$

$$H_{1D} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x_{eq}^2$$

Quindi $\quad E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} m\omega^2 x_{eq}^2$

Quindi gli autovalori di H sono

$$E = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) - m\omega^2 x_{eq}^2$$

Livelli

1) Stato fondamentale $\quad E = \hbar\omega - m\omega^2 x_{eq}^2$

$$|00\rangle = \psi = \psi_0(1)\psi_0(2) \qquad \text{deg. } 1$$

2) I eccitato $\quad E = 2\hbar\omega - m\omega^2 x_{eq}^2$

Sono ammessi solo stati pari (Pauli)

$$|10\rangle_S \; \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_1(2) + \psi_1(1)\psi_0(2)\right) \quad \text{deg } 1$$

3) II eccitato $\quad E = 3\hbar\omega - m\omega^2 x_{eq}^2$

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_0(1)\psi_2(2) + \psi_2(1)\psi_0(2)\right) = |20\rangle_S \\ \psi = \psi_1(1)\psi_1(2) = |1\,1\rangle \end{cases} \qquad \text{deg. } 2$$

b)

$$\langle 00|(x_1-x_2)^2|00\rangle = \langle 00|(X_1-X_2)^2|00\rangle$$

$$= \langle 00|X_1^2+X_2^2|00\rangle = 2\langle 00|X_1^2|00\rangle$$

dove abbiamo usato $\langle E|x|E\rangle = 0$ per ogni autostato E dell'oscillatore armonico

$$\langle 00|(x_1-x_2)^2|00\rangle = 2\left|\, X_1|00\rangle\right|^2$$

$$X_1|00\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_1+a_1^\dagger)|00\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}|10\rangle$$

Quindi $\langle 00|(x_1-x_2)^2|00\rangle = 2\cdot\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar}{m\omega}$

c)

$$E_f = \hbar\omega - m\omega^2 x_{eq}^2 + \lambda\Delta E \qquad \Delta E = \langle 00|x_1 x_2|00\rangle$$

$$\Delta E = \langle 00|(X_1+x_{eq})(X_2+x_{eq})|00\rangle = x_{eq}^2$$

d)

$$x_1x_2|00\rangle = (X_1+x_{eq})(X_2+x_{eq})|00\rangle =$$

$$= (X_1X_2 + x_{eq}(X_1+X_2) + x_{eq}^2)|00\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}|11\rangle + x_{eq}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(|10\rangle + |01\rangle) + x_{eq}^2|00\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}|11\rangle + x_{eq}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}|10\rangle_S + x_{eq}^2|00\rangle$$

Quindi

$$|\text{fond}\rangle = |00\rangle + \lambda a|11\rangle + \lambda b|10\rangle_S$$

I coefficienti a e b valgono

$$a = \frac{\langle 11|V|00\rangle}{E_{00}-E_{11}} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(-\frac{1}{2\hbar\omega}\right) = -\frac{1}{4m\omega^2}$$

$$b = s\frac{\langle 10|V|00\rangle}{E_{00}-E_{10}} = x_{eq}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(-\frac{1}{\hbar\omega}\right) = -\frac{x_{eq}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

NOTA BENE:

i calcoli effettuati utilizzano per l'oscillatore armonico la base

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \qquad a = \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x$$

Se viene utilizzata la base

$$|n\rangle' = \frac{(\eta^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \qquad \eta = \frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x$$

i risultati per a e b differiscono per una fase.

$$a = +\frac{1}{4m\omega^2}$$

$$b = i\,\frac{x_{eq}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

La differente fase segue da

$$X_1|00\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\eta^+-\eta)\,|00\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|10\rangle$$

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 26/07/2017

Esercizio 1. Si consideri un sistema a tre livelli. Sia $\mathcal{H}$ la Hamiltoniana e sia $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormale.

1) È noto che: (i) $\mathcal{H}$ ha autovalori 0, $2\hbar\omega$ e $4\hbar\omega$; (ii) una misura dell'energia su $|1\rangle$ dà con certezza $4\hbar\omega$; (iii) una misura dell'energia su $(|2\rangle - |3\rangle)/\sqrt{2}$ dà con certezza $2\hbar\omega$. Si trovi l'autostato di $\mathcal{H}$ con autovalore nullo.

2) Si consideri l'operatore $\mathcal{C}$. Nella base $\mathcal{B}$ è rappresentato dalla matrice

$$\mathcal{C} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} .$$

Si determinino tutti gli stati tali che una misura di $\mathcal{C}$ fornisce $-8\hbar\omega$ con probabilità 1/2 e 0 con probabilità 1/2.

3) Tra gli stati determinati al punto 2), si selezioni quello per cui è massima la probabilità di trovare 0 in una misura dell'energia. Lo si indichi con $|\psi\rangle$.

4) Si calcoli l'evoluto $|\psi(t)\rangle$ di $|\psi\rangle$ al tempo $t = \bar{t} = \pi/(2\omega)$ e l'elemento di matrice $\langle\psi(\bar{t})|\mathcal{C}|\psi(\bar{t})\rangle$.

Esercizio 2. Lo stato di un elettrone di un atomo di idrogeno con momento orbitale $l = 1$ e spin 1/2 è descritto dalla funzione d'onda normalizzata

$$\psi(r, \phi, \theta) = \frac{R_{2,1}(r)}{\sqrt{2}} \left[Y_{1,0}(\phi, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Y_{1,1}(\phi, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] ,$$

dove $R_{2,1}(r)$ è la funzione d'onda radiale per l'atomo d'idrogeno con $n = 2$ e $l = 1$ e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

corrispondono agli stati di spin $|1/2, \pm 1/2\rangle$.

a) Si determinino i possibili risultati di una misura di J^2 e J_z, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, e le relative probabilità.

b) Si calcoli l'elemento di matrice $\langle\psi|\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}|\psi\rangle$.

c) Si determinino i possibili risultati di una misura di L_x e le relative probabilità. Si spieghi perché, dopo una misura di L_x, lo stato rimane autostato di L^2 e se ne specifichi l'autovalore.

Esercizio 1

1) I dati (ii) e (iii) permettono di dire per gli autovettori

$$|4\hbar\omega\rangle_E = |1\rangle$$

$$|2\hbar\omega\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle)$$

Ora

$$|0\rangle_E = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle$$

L'ortogonalità implica

$${}_E\langle 4\hbar\omega|0\rangle_E = 0 \implies a = 0$$

$${}_E\langle 2\hbar\omega|0\rangle_E = 0 \implies b = c$$

Quindi $|0\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$

2) Gli autostati di C sono

$$|-8\hbar\omega\rangle_C = |3\rangle$$

$$|2\hbar\omega\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |1\rangle)$$

$$|0\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Quindi gli stati sono [ϕ arbitraria]

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} |3\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} |-8\hbar\omega\rangle_C + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_C$$

3)

$$\text{Prob}(E=0) = |{}_E\langle 0|\psi\rangle|^2 =$$

$${}_E\langle 0|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} = \frac{e^{i\phi}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Prob}(E=0) = \frac{1}{4}\left|e^{i\phi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\phi\right) \implies \phi = \pi$$

$$\psi = \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{2}|2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle$$

$$\psi = a|4\hbar\omega\rangle_E + b|2\hbar\omega\rangle_E + c|0\rangle_E$$ ②

$$a = {}_E\langle 4\hbar\omega|\psi\rangle = \frac{1}{2}$$

$$b = {}_E\langle 2\hbar\omega|\psi\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$c = {}_E\langle 0|\psi\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\psi(t) = a e^{-4i\omega t}|4\hbar\omega\rangle_E + b e^{-2i\omega t}|2\hbar\omega\rangle_E + c|0\rangle_E$$

$$\psi(\bar{t}) = a e^{-2\pi i}|4\hbar\omega\rangle_E + b e^{-\pi i}|2\hbar\omega\rangle_E + c|0\rangle_E$$

$$= a|4\hbar\omega\rangle_E - b|2\hbar\omega\rangle_E + c|0\rangle_E$$

$$= \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle$$

$$\langle\psi(\bar{t})|C|\psi(\bar{t})\rangle = \hbar\omega\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -\hbar\omega\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\hbar\omega\,\frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{2})$$

Esercizio 2

(a) Nella notazione $|l_z\, s_z\rangle$ abbiamo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}\left(|0\, \tfrac{1}{2}\rangle + |1\, -\tfrac{1}{2}\rangle \right)$$

Passando alla base $|J\, J_z\rangle_J$ abbiamo

$$\psi = R_{21}\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}} \left|\tfrac{3}{2}\, \tfrac{1}{2}\right\rangle_J + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} \left|\tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\right\rangle_J \right]$$

Quindi $J_z = \hbar/2$ con probabilità 1

$J^2 = \hbar^2 \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{15}{4}\hbar^2$ con prob. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$J^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2$ con prob. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

(b)

$L\cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) = \frac{1}{2}\left(J^2 - 2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right)$ Quindi

$$\langle\psi|L\cdot S|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}-2-\frac{3}{4}\right)\hbar^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-2-\frac{3}{4}\right)\hbar^2 = \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hbar^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(2\sqrt{2}-1)$$

(c) È necessario riesprimere gli stati $|l_z\rangle$ in termini di autostati di L_x. Dato che $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e $\langle m+1|L_+|m\rangle = \sqrt{2}$ e $\langle m-1|L_-|m\rangle = \sqrt{2}$ per stati con L^2 uguali a 1, abbiamo

$$L_x = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base $|l_z=1\rangle, |l_z=0\rangle, |l_z=-1\rangle$

$$|\ell_x = \pm 1\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle_z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z + \frac{1}{2}|-1\rangle$$

$$|\ell_x = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z$$

Quindi

$$|0\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}|\ell_x = 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\ell_x = -1\rangle$$

$$|1\rangle_z = \frac{1}{2}|\ell_x = 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\ell_x = 0\rangle + \frac{1}{2}|\ell_x = -1\rangle$$

Quindi

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\ell_x = 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\ell_x = -1\rangle\right)|S_z = \frac{1}{2}\rangle$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}\left(\frac{1}{2}|\ell_x = 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\ell_x = 0\rangle + \frac{1}{2}|\ell_x = -1\rangle\right)|S_z = -\frac{1}{2}\rangle$$

$$P(L_x = \hbar) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(L_x = -\hbar) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(L_x = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

~~No~~ Rimane autostato dato che $[L^2, L_x] = 0$

L'autovalore è $2\hbar^2$.

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 18/09/2017

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin $S = \hbar/2$. Nella base

$$|1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove $S_z|1/2, \pm 1/2\rangle = \pm\hbar/2$, la Hamiltoniana è descritta dalla matrice

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_0 & -i\mu\, B \\ i\mu\, B & \mathcal{H}_0 \end{pmatrix},$$

dove $\mathcal{H}_0$ è l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico tridimensionale

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2},$$

e $0 < \mu\, B \ll \hbar\omega$.

1. Si determinino gli autovalori dell'Hamiltoniana. In particolare, si calcolino le energie e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati.

2. Si scrivano le funzioni d'onda dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati in modo che siano combinazioni di autostati di J^2 e J_z, dove $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$; le si esprima come combinazioni lineari degli stati $|n, l, s = 1/2; j, j_z\rangle$.

3. Si calcoli lo spostamento in energia dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati se si aggiunge ad $\mathcal{H}$ una perturbazione

$$\mathcal{V} = 2\lambda\, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}.$$

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di massa m e spin 1 vincolate a muoversi in due dimensioni nel dominio $-L/2 \le x \le L/2$, $-L/2 \le y \le L/2$ e soggette alla hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \omega\left(\frac{2}{3\hbar}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - S_{1z} - S_{2z}\right),$$

con $0 < \omega \ll \hbar/(mL^2)$ (i pedici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle).

1) Si calcoli l'energia e la degenerazione dello stato fondamentale e dei primi due stati eccitati.

2) Si consideri $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \mathcal{V}$, con

$$\mathcal{V} = \frac{\beta}{L^2\hbar}(x_1 - x_2)^2 S_{1z} S_{2z},$$

dove il parametro β può essere sia positivo, sia negativo. Si calcoli l'energia dello stato fondamentale di $\mathcal{H}'$ al primo ordine in β.

Possono essere utili gli integrali

$$I_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^n x\, dx.$$

Abbiamo

$$I_1 = \frac{1}{4}(\pi^2 - 8),\ I_2 = \frac{\pi}{48}(\pi^2 - 6),\ I_3 = \frac{1}{54}(9\pi^2 - 80),\ I_4 = \frac{\pi}{128}(2\pi^2 - 15)$$

Esercizio 1

① L'esercizio poteva essere risolto facilmente notando che

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mu B \sigma_2 = H_0 + \frac{2\mu B}{\hbar} S_y$$

Tenuto conto che gli autovalori di S_y sono $\pm\frac{\hbar}{2}$ si ha

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right) \pm \mu B \qquad n = n_x + n_y + n_z$$

Alternativamente, cerchiamo autofunzioni della forma $\psi = \Psi_{n_x,n_y,n_z}(r)\,\chi_{spin}$. Abbiamo

$$\mathcal{H}\psi = \begin{pmatrix} \hbar\omega(n+\frac{3}{2}) & -i\mu B \\ i\mu B & \hbar\omega(n+\frac{3}{2}) \end{pmatrix} \psi = E\psi$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega(n+\frac{3}{2}) - E & -i\mu B \\ i\mu B & \hbar\omega(n+\frac{3}{2}) - E \end{pmatrix} \chi = 0$$

Quindi

$$\left[\hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right) - E\right]^2 - \mu^2 B^2 = 0$$

$$E_\pm = \hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right) \pm \mu B \qquad \text{come sopra}$$

$$E_{fond} = \frac{3}{2}\hbar\omega - \mu B \qquad \text{deg. } 1$$

$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega + \mu B \qquad \text{deg. } 1$$

$$E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega - \mu B \qquad \text{deg. } 3$$

② Le autofunzioni relative a $E_\pm$ sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{n_x n_y n_z}(r)\left[\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle \pm i\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

(a) stato fondamentale ψ_{000} ha $L = L_z = 0$. Quindi

$$\psi_{fond} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{000}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right> - i\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\,0\,\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right> - \frac{i}{\sqrt{2}}\left|0\,0\,\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>$$

(b) primo eccitato

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{000}\left(\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right> + i\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\,0\,\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right> + \frac{i}{\sqrt{2}}\left|0\,0\,\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>$$

(c) secondo eccitato

Vi sono tre stati degeneri corrispondenti a

$$\begin{cases} n_x=1 & n_y=0 & n_z=0 \\ n_x=0 & n_y=1 & n_z=0 \\ n_x=0 & n_y=0 & n_z=1 \end{cases}$$

In una base in cui L^2 e L_z sono diagonali possono essere espressi come combinazioni lineari di

$$|n = n_x+n_y+n_z = 1,\ l=1,\ l_z=m\rangle = |1,1,m\rangle_L \qquad m=-1,0,1$$

Quindi gli stati sono

(c1) $$\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1\,1\rangle_L\left(\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right> - i\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\overset{J}{\tfrac{3}{2}}\,\overset{J_z}{\tfrac{3}{2}}\right>_J - i\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\overset{J}{\tfrac{3}{2}}\,\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\right>_J + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\,\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\right>_J\right]\right\}$$

(c2) $$\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,1\,0\rangle_L\left(\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right> - i\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\right>_J - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right>_J\right.$$
$$\left. - i\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>_J + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1\,1\,\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right>_J\right]\right\}$$

c3 $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\ 1\ -1\rangle_L \left(|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle - i|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}|1\ 1\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 1\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle_J - i|1\ 1\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\rangle_J\right\}$$

Gli stati utilizzati sono $|n\ l\ s; J\ J_z\rangle_J$.

Domanda 3

Dato che $l=0$ sugli stati (a) e (b) [fondamentale e primo eccitato] $\langle |V| \rangle = 0$ e quindi $\Delta E = 0$

Per ~~lo~~ il secondo eccitato bisogna tenere in conto la degenerazione

$$V = 2\lambda\,\bar{L}\cdot\bar{S} = \lambda(J^2 - L^2 - S^2)$$
$$= \lambda\hbar^2\hat{J}^2 - \lambda 2\hbar^2 - \lambda\frac{3}{4}\hbar^2 \qquad \hat{J} = \frac{J}{\hbar}$$

Bisogna calcolare gli elementi di matrice di $\hat{J}^2$

$$\langle c1|\hat{J}^2|c1\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{15}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\langle c1|\hat{J}^2|c2\rangle = \left(\frac{i}{3}\,\frac{15}{4} - \frac{i}{3}\,\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\langle c1|\hat{J}^2|c3\rangle = 0$$

$$\langle c2|\hat{J}^2|c2\rangle = \frac{1}{3}\,\frac{15}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\,\frac{15}{4} + \frac{1}{6}\,\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\langle c2|\hat{J}^2|c3\rangle = \left(\frac{i}{3}\,\frac{15}{4} - \frac{i}{3}\,\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\langle c3|\hat{J}^2|c3\rangle = \frac{1}{6}\,\frac{15}{4} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{15}{4} = \frac{11}{4}$$

Quindi

$$\langle \quad | \hat{J}^2 | \quad \rangle = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{11}{4} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$

Quindi il livello si separa in tre stati con

$$\Delta E = \begin{cases} \hbar^2\lambda\left(\frac{7}{4} - 2 - \frac{3}{4}\right) = -\lambda\hbar^2 \\ \hbar^2\lambda\left(\frac{11}{4} - 2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \\ \hbar^2\lambda\left(\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4}\right) = +\lambda\hbar^2 \end{cases}$$

Il calcolo poteva essere semplificato prendendo come asse di quantizzazione l'asse y.

Se scegliamo come base

$$d1\rangle = |1\ 1\ l_y = 1\rangle |\tfrac{1}{2}\ S_y = -\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\ 1\ \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}\ J_y = \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\ 1\ \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\ J_y = \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$d2\rangle = |1\ 1\ l_y = 0\rangle |\tfrac{1}{2}\ S_y = -\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\ 1\ \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}\ J_y = -\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\ 1\ \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}\ J_y = -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$d3\rangle = |1\ 1\ l_y = -1\rangle |\tfrac{1}{2}\ S_y = -\tfrac{1}{2}\rangle = |1, 1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}\ J_y = -\tfrac{3}{2}\rangle$$

In questa base $\hat{J}^2$ è diagonale

$$\langle d1|\hat{J}^2|d1\rangle = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

$$\langle d2|\hat{J}^2|d2\rangle = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{4}$$

$$\langle d3|\hat{J}^2|d3\rangle = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{4}$$

Esercizio 2.

1) Le autofunzioni sono della forma $\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)$ funz spin dove $\psi_0(r)$ è l'autofunzione dello stato fondamentale della buca bidimensionale
Per il principio di Pauli la parte di spin deve essere simmetrica e quindi le autofunzioni possibili sono

$$\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\,|S_{tot}=0\quad S_{tot,z}=0\rangle$$
$$\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\,|S_{tot}=2\quad S_{tot,z}=-2,-1,0,1,2\rangle$$

Ora

$$H_{spin}=\omega\left(\frac{2}{3\hbar}\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2-S_{1z}-S_{2z}\right)$$
$$=\omega\left(\frac{1}{3\hbar}S_{tot}^2-\frac{1}{3\hbar}S_1^2-\frac{1}{3\hbar}S_2^2-S_{tot,z}\right)$$
$$=\omega\left(\frac{1}{3\hbar}S_{tot}^2-S_{tot,z}\right)-\frac{4}{3}\hbar\omega$$

Dato che

$$H_{buca}\,\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)=\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$
$$H_{spin}\,|S_{tot}=0,\ S_{tot,z}=0\rangle=-\frac{4}{3}\hbar\omega$$
$$H_{spin}\,|S_{tot}=2,\ S_{tot,z}\rangle=\frac{2}{3}\hbar\omega-\omega S_{tot,z}$$

fond $\quad E=\dfrac{2\pi\hbar^2}{mL^2}-\dfrac{4\hbar\omega}{3}\begin{cases}\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\,|0\ 0\rangle\\ \psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\,|2\ 2\rangle\end{cases}$ deg. 2

1 ecc $\quad E=\dfrac{2\pi\hbar^2}{mL^2}-\dfrac{\hbar\omega}{3}\quad(\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\,|2\ 1\rangle)$

2 ecc $\quad E=\dfrac{2\pi\hbar^2}{mL^2}+\dfrac{2\hbar\omega}{3}\quad(\psi_0(r_1)\psi_0(r_2)\,|2\ 0\rangle)$

Dato che lo stato fondamentale è degenere, (6)
dobbiamo calcolare la matrice della perturbazione
I due stati ~~hanno~~ hanno la forma $\psi_0(r_1)\psi_0(r)\chi_{spin}$,
Quindi

$$\langle \text{stato}_i | V | \text{stato}_j \rangle = \frac{\beta}{L^2\hbar} \langle \psi_0\psi_0 | (x_1-x_2)^2 | \psi_0\psi_0 \rangle$$

$$\langle \chi_{spin\, i} | S_{1z} S_{2z} | \chi_{spin\, j} \rangle$$

Ora

$$I = \langle \psi_0\psi_0 | (x_1-x_2)^2 | \psi_0\psi_0 \rangle = \langle \psi_0\psi_0 | x_1^2 | \psi_0\psi_0 \rangle$$

$$+ \langle \psi_0\psi_0 | x_2^2 | \psi_0\psi_0 \rangle - 2 \underbrace{\langle \psi_0\psi_0 | x_1 x_2 | \psi_0\psi_0 \rangle}_{=0 \text{ per parità}}$$

$$= 2 \langle \psi_0\psi_0 | x_1^2 | \psi_0\psi_0 \rangle =$$

$$= 2 \int dr_1\, x_1^2 |\psi_0(r_1)|^2 \int dr_2\, |\psi_0(r_2)|^2 =$$

$$= 2 \int dr_1\, x_1^2 |\psi_0(r_1)|^2$$

Ora $\psi_0(r_1) = \phi(x_1)\phi(y_1)$ $\qquad \phi = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Quindi

$$I = 2 \int dx_1 dy_1\, x_1^2 |\phi(x_1)|^2 |\phi(y_1)|^2 =$$

$$= 2 \int dx_1\, x_1^2 |\phi(x_1)|^2 =$$

$$= 2 \int_{-L/2}^{L/2} dx\, x^2\, \frac{2}{L} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad \text{se} \quad y = \frac{\pi x}{L}$$

$$= \frac{4L^2}{\pi^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\, y^2 \cos^2 y = \frac{4L^2}{\pi^3} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{48}(\pi^2 - 6) = \frac{L^2}{6\pi^2}(\pi^2-6)$$

Quindi

$$\langle \text{stato}_i | V | \text{stato}_j \rangle = \frac{\beta}{6\pi^2\hbar}(\pi^2-6)\langle \chi_{spin_i} | S_{1z} S_{2z} | \chi_{spin_j} \rangle$$

Ora

$$|2\,2\rangle = |S_{1z}=1, S_{2z}=1\rangle$$

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|S_{1z}=1, S_{2z}=-1\rangle + |-1\,1\rangle - |0\,0\rangle\right)$$

Quindi

$$\langle 0\,0 | S_{1z} S_{2z} | 0\,0\rangle = -\frac{2}{3}\hbar^2$$

$$\langle 2\,2 | S_{1z} S_{2z} | 2\,2\rangle = \hbar^2$$

$$\langle 0\,0 | S_{1z} S_{2z} | 2\,2\rangle = 0$$

Quindi la matrice è

$$\langle \; | V | \; \rangle = \frac{\beta}{6\pi^2\hbar}(\pi^2-6)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\hbar^2 & 0 \\ 0 & \hbar^2 \end{pmatrix}$$

Quindi lo stato fondamentale si separa in

$$E = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2} - \frac{4}{3}\hbar\omega - \frac{\hbar\beta}{9\pi^2}(\pi^2-6)$$

$$E = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2} - \frac{4}{3}\hbar\omega + \frac{\hbar\beta}{6\pi^2}(\pi^2-6)$$

Quale delle due energie corrisponda allo stato fondamentale dipende dal segno di β.

Compito Scritto Meccanica Quantistica, 20/11/2017

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi su una sfera di raggio unitario. Si considerino gli stati

$$|A\rangle = a \begin{pmatrix} Y_1^0 \\ \sqrt{2} Y_1^1 \end{pmatrix} \qquad |B\rangle = b \begin{pmatrix} Y_1^0 \\ -\sqrt{2} Y_1^1 \end{pmatrix}$$

dove a e b sono costanti di normalizzazione, $Y_l^m(\theta, \phi)$ indica un'armonica spherica e

$$\begin{pmatrix} s_+ \\ s_- \end{pmatrix}$$

è uno spinore di spin 1/2 riferito all'asse z. Definiamo inoltre l'operatore

$$M = \frac{1}{\hbar^2}(J^2 - L^2) - \frac{2}{\hbar}(L_z + 2S_z)$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare e $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$.

1) Si considerino i quattro operatori M, J^2, L^2 e J_z. Si dica di quali operatori gli stati $|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono autostati e, nel caso in cui lo siano, se ne calcoli il rispettivo autovalore.

2) Si calcolino le costanti a e b in modo che gli stati siano normalizzati.

3) Se l'Hamiltoniana del sistema è $H = \omega J^2/\hbar - \omega J_z$, si calcolino gli stati $|A(t)\rangle$ e $|B(t)\rangle$ al tempo t ed il modulo $|R|$ dell'elemento di matrice $R = \langle A(t)|B(t)\rangle$.

Esercizio 2. Un sistema è composto da due particelle identiche di spin 1 vincolate a muoversi in una dimensione. Il sistema è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{(p_1^2 + p_2^2)}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$

a) Si determinino gli autovalori corrispondenti ai primi tre livelli di energia e se ne discuta la degenerazione.

b) Si determini una base di autovettori corrispondenti ai tre livelli di cui al punto a) tali che siano simultaneamente autostati dell'Hamiltoniana e autostati degli operatori S^2 ed S_z, con $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$.

c) Si considerino gli stati calcolati al punto b) che corrispondono al livello fondamentale e al primo livello eccitato; per ciascuno di essi si calcoli il valore medio dell'operatore $O = x_1 x_2$.

d) Se si aggiunge all'Hamiltoniana il termine

$$V = \lambda\, x_1^2 x_2^2\, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2\,,$$

calcolare quali sono le correzioni in energia al primo ordine in λ degli stati corrispondenti all'energia più bassa.

Esercizio 1

DOMANDA 1

$$|A\rangle = a|0\,\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} + a\sqrt{2}\,|1\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$
$$= a\left[2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J\right]$$

dove $|\ell_z\, s_z\rangle$ è la base $(L^2 L_z S^2 S_z)$ e $|j\, j_z\rangle_J$ è la base $(L^2 S^2 J^2 J_z)$.

$L^2|A\rangle = 2\hbar^2|A\rangle$ autovettore di L^2

$J_z|A\rangle = \frac{\hbar}{2}|A\rangle$ autovettore di J_z

$J^2|A\rangle = a\hbar^2\left[\frac{15}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle_J + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle_J\right]$ non è autovettore di J^2

Ora $M = J^2/\hbar^2 - L^2/\hbar^2 - \frac{2}{\hbar}(2J_z - L_z)$
$$= \left(J^2/\hbar^2 + \frac{2L_z}{\hbar}\right) - \frac{L^2}{\hbar^2} - \frac{4}{\hbar}J_z$$

$$L_z|A\rangle = a\hbar\sqrt{2}\,|1\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} = a\hbar\sqrt{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J\right)$$
$$= a\hbar\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle + 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J\right)$$

$$\left(\frac{J^2}{\hbar^2} + \frac{2L_z}{\hbar}\right)|A\rangle = a\left[\frac{15}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J\right]$$
$$+ a\left[2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J + 4\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J\right]$$
$$= \frac{19}{4}a\left[2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J\right] = \frac{19}{4}|A\rangle$$

Quindi

$$M|A\rangle = \left(\frac{J^2}{\hbar^2} + \frac{2L_z}{\hbar}\right)|A\rangle - \frac{L^2}{\hbar^2}|A\rangle - \frac{4\hbar}{2\hbar}|A\rangle =$$
$$= \frac{19}{4}|A\rangle - 2|A\rangle - 2|A\rangle = \frac{3}{4}|A\rangle$$

$|A\rangle$ è autovettore di M con autovalore $\frac{3}{4}$

$$|B\rangle = b\,|0\,\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - b\,|1\,-\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} = -b\sqrt{3}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_{J}$$

$$J^2|B\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|B\rangle$$
$$L^2|B\rangle = 2\hbar^2|B\rangle$$
$$J_z|B\rangle = \frac{\hbar}{2}|B\rangle$$

Dato che $M = \left(\frac{J^2}{\hbar^2} - \frac{L^2}{\hbar^2} - \frac{4}{\hbar}J_z\right) + \frac{2L_z}{\hbar}$, $|B\rangle$ è autovettore di M se e solo se è autovettore di L_z. È evidente che non lo è.

DOMANDA 2: $a = b = 1/\sqrt{3}$

DOMANDA 3:

Scartando una fase
$$|B(t)\rangle = |B\rangle$$
$$|A(t)\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,e^{-3i\omega t}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J + \frac{1}{3}|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J$$

$$R = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2

$E = \hbar\omega(n_1+n_2+1)$

fondamentale

$$\left.\begin{array}{l}\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\,|S_{tot}=2 \quad S_z\rangle \\ \psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\,|S_{tot}=0 \quad S_z=0\rangle\end{array}\right\} \text{deg. } 5+1=6$$

$\psi_n(x) \equiv$ autofunzione dell'oscillatore armonico con $E=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

1° eccitato

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)+\psi_1(x_1)\psi_0(x_2))\,|S_{tot}=2 \quad S_z\rangle$$
$$(\qquad\qquad)\,|S_{tot}=0 \quad S_z=0\rangle \qquad \text{deg.}\left\{\begin{array}{c}5\\1\\3\end{array}\right\} \text{TOT } 9$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x_1)\psi_1(x_2)-\psi_1(x_1)\psi_0(x_2))\,|S_{tot}=1 \quad S_z\rangle$$

2° eccitato

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x_1)\psi_2(x_2)+\psi_2(x_1)\psi_0(x_2))\,|S_{tot}=2 \quad S_z\rangle \qquad \text{deg. } 5$$
$$(\qquad\qquad)\,|S_{tot}=0 \quad S_z=0\rangle \qquad \text{deg. } 1$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x_1)\psi_2(x_2)-\psi_2(x_1)\psi_0(x_2))\,|S_{tot}=1 \quad S_z\rangle \qquad \text{deg. } 3$$
$$\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\,|S_{tot}=2 \quad S_z\rangle \qquad \text{deg. } 5$$
$$\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\,|S_{tot}=0 \quad S_z=0\rangle \qquad \text{deg. } 1$$

TOT 15

DOMANDA 3

Per l'oscillatore armonico in 1D

$$\langle 0|x|0\rangle = 0$$
$$|\langle 0|x|1\rangle| = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Quindi a) Stato fondamentale $\Psi = |\overset{\text{1part}}{0}\ \overset{\text{2part}}{0}\rangle|S_{tot}\ S_z\rangle$

$$\langle\Psi|x_1x_2|\Psi\rangle = \langle S_{tot}\ S_z|\langle 00|x_1x_2|00\rangle|S_{tot}\ S_z\rangle =$$
$$= \langle 00|x_1x_2|00\rangle = \langle 0|x_1|0\rangle\langle 0|x_2|0\rangle = 0$$

b) 1° eccitato

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0 1\rangle \pm |1 0\rangle\right)|S_{tot}\, S_{tot,z}\rangle$$

$$\langle\psi|x_1 x_2|\psi\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\langle S_{tot}\, S_{tot,z}|\left(\langle 0 1| \pm \langle 1 0|\right) x_1 x_2 \left(|0 1\rangle \pm |1 0\rangle\right)|S_{tot}\, S_{tot,z}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle 0 1| \pm \langle 1 0|\right)(x_1 x_2)\left(|0 1\rangle \pm |1 0\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\langle 0 1|x_1 x_2|0 1\rangle \pm \langle 1 0|x_1 x_2|0 1\rangle$$
$$\pm \langle 0 1|x_1 x_2|1 0\rangle + \langle 1 0|x_1 x_2|1 0\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\langle 0|x_1|0\rangle}_{=0}\langle 1|x_2|1\rangle \pm \langle 1|x|0\rangle\langle 0|x|1\rangle$$
$$\pm \langle 0|x|1\rangle\langle 1|x|0\rangle + \langle 1|x|1\rangle\underbrace{\langle 0|x|0\rangle}_{=0}\Big]$$

$$= \pm |\langle 0|x|1\rangle|^2 = \pm \frac{\hbar}{2m\omega}$$

DOMANDA 4 :

$$V = \frac{\lambda}{2} x_1^2 x_2^2 \left(S_{tot}^2 - 4\hbar^2\right)$$

Per l'oscillatore 1D $\langle 0|x^2|0\rangle = |x|0\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$

Quindi

$$\langle 0 0|x_1^2 x_2^2|0 0\rangle = \langle 0|x_1^2|0\rangle\langle 0|x_2^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$$

$$\langle S_{tot}=2\; S_{tot,z}|\langle 0 0|V|0 0\rangle|S_{tot}=2, S_{tot,z}\rangle =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(6-4)\hbar^2 = \frac{\lambda}{4}\frac{\hbar^4}{m^2\omega^2}$$

$$\langle S_{tot}=0\; S_{tot,z}|\langle 0 0|V|0 0\rangle|S_{tot}=0, S_{tot,z}\rangle =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}(0-4)\hbar^2 = -\frac{\lambda}{2}\frac{\hbar^4}{m^2\omega^2}$$