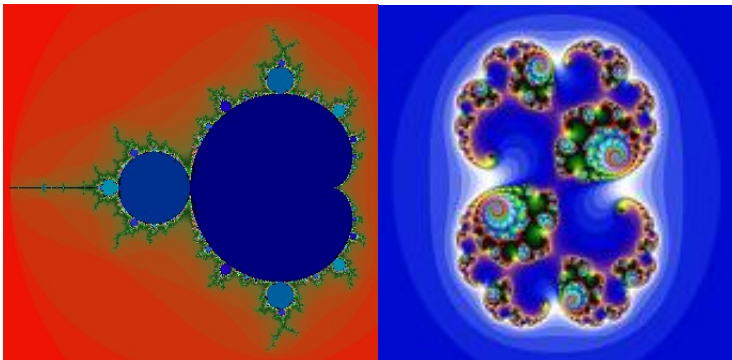


FRATTALI



Le soluzioni della mappa logistica studiata da R.May

$$N(t + 1) = rN(t)[1 - N(t)] \quad (0 \leq r \leq 4)$$

hanno, al variare di r , andamenti asintotici che non si presentano nella versione continua di questo modello:

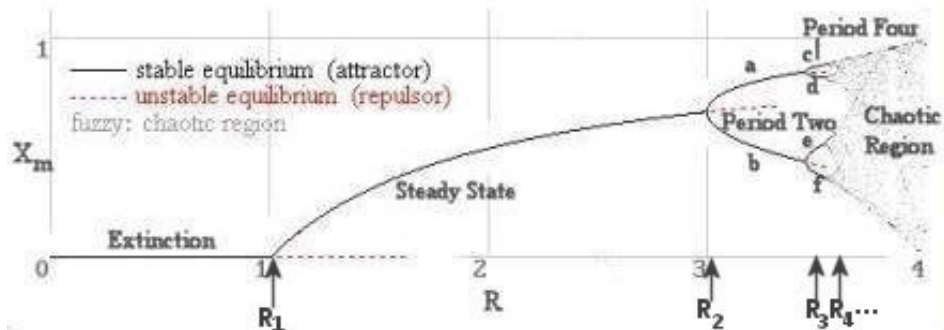
in particolare se $r \leq 1$, si ha $N(t) \rightarrow 0$ (si ha estinzione) e la soluzione di equilibrio $N = 0$ attrae tutte le soluzioni,

Se $1 < r \leq 3$ la soluzione di equilibrio non banale $(r - 1)/r$ e' attrattiva mentre la soluzione di equilibrio banale é repulsiva

Se $3 < r \leq 3.45$, oltre alle precedenti soluzioni di equilibrio, nascono soluzioni periodiche di periodo 2 che sono attrattive, mentre la soluzione $(r - 1)/r$ diventa repulsiva (il cambiamento di attrattività si chiama "biforcazione").

Se $3.45 < r \leq 3.57$ si hanno nuove soluzioni periodiche di periodo 4, 8,..., che ereditano l'attrattività (nuove biforcazioni).

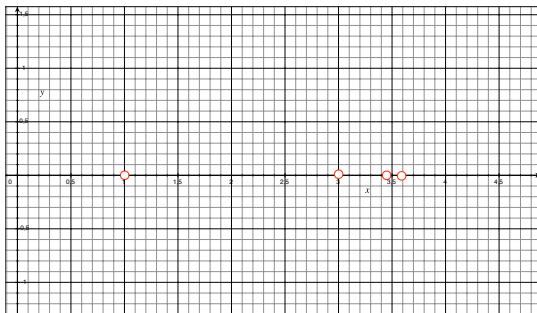
Per $r > 3.6$ non si riconosce piú nessun andamento ordinato: nasce il caos
 Questi comportamenti si riassumono nel grafico



I valori di r hanno, inoltre, una interessante proprietà:

detti $r_1 = 1$ $r_2 = 3$ $r_3 = 3.4409$ $r_4 = 3.54409$ i valori di r per i quali si realizzano le prime biforcazioni, si ha

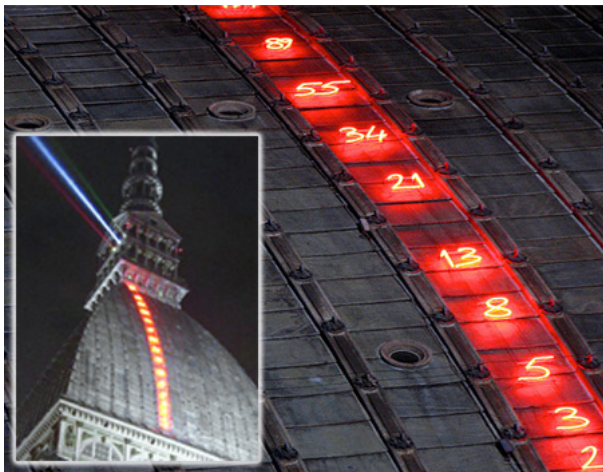
$$\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = \frac{r_3 - r_2}{r_4 - r_3} = \dots \approx 4.4$$



A scale sempre più piccole, i rapporti tra le lunghezze dei segmenti sono, almeno approssimativamente, simili.

Questa proprietà si chiama **autosimilarità**'.

L'autosimilarità è una proprietà della **successione di Fibonacci**



La successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci e' una successione di numeri interi naturali definita dalla legge di iterazione

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \quad n > 1$$

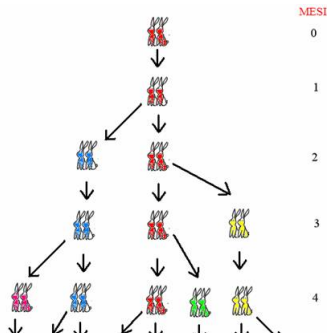
$$F_0 := 0, F_1 := 1$$

I primi 20 numeri di Fibonacci sono:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (=F_{10}) \\ 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 (=F_{20})$$

La sequenza prende il nome dal matematico pisano del XIII secolo Leonardo Fibonacci che, racconta una leggenda, l'ha introdotta per descrivere la crescita di una popolazione di conigli.

La prima coppia diventa fertile al compimento del primo mese e da' alla luce una nuova coppia al compimento del **secondo mese** ($2+1=3$ coppie) alla fine del terzo mese le nuove coppie nate sono fertili e la coppia di partenza da' alla luce una coppia di figli ($3+2=5$ coppie), alla fine del quarto mese nasce una coppia da quella di partenza e 2 coppie da ogni coppia ($5+3=8$ coppie) ecc.



La proprietà principale della successione di Fibonacci è quella per cui i rapporti

$$F_n/F_{n-1}$$

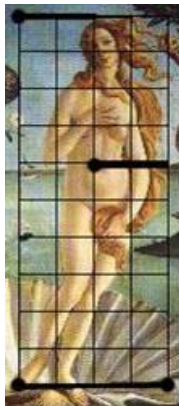
al tendere di n all'infinito, tendono al numero algebrico irrazionale chiamato **sezione aurea** (o numero di Fidia)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

(il rapporto tra due termini successivi della sequenza si avvicina sempre più al valore ϕ).

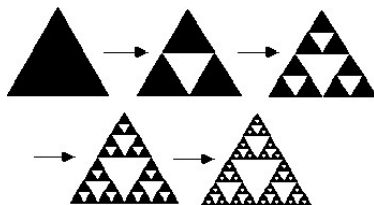
I rapporti tra le dimensioni di molte opere d'arte hanno il valore ϕ .



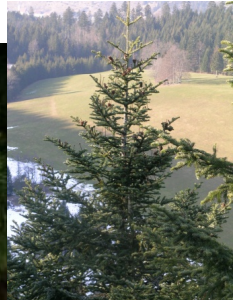
Frattali

Molti oggetti geometrici, detti **frattali**, hanno la proprietà di autosimilarità..

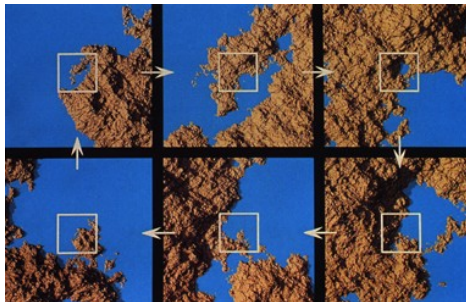
Un frattale e' un oggetto geometrico che, nella sua struttura, si ripete allo stesso modo su **scale diverse**, cioe' non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento.



La natura produce molti esempi di forme "frattali".
Negli alberi (soprattutto abeti) ogni ramo e' approssimativamente simile all'intero albero e ogni rametto e' a sua volta simile al proprio ramo, e cosi' via



Fenomeni di auto-similarita' si osservano nella forma di una costa con immagini riprese da satellite



Anche in altre specie vegetali o nel sistema circolatorio si osserva autosimilarita'



Come dice B. Mandelbrot, che nel 1975 introdusse il termine "frattale", le relazioni fra frattali e natura sono piu' profonde di quanto si creda

"Si ritiene che in qualche modo i frattali abbiano delle corrispondenze con la struttura della mente umana, e' per questo che la gente li trova cosi' familiari. Questa familiarita' e' ancora un mistero e piu' si approfondisce l'argomento piu' il mistero aumenta"

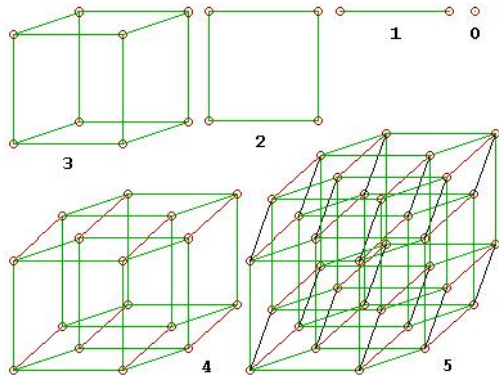
(Benoit Mandelbrot)

Il termine frattale, così come il termine frazione, deriva dal latino *fractus* (rotto, spezzato)

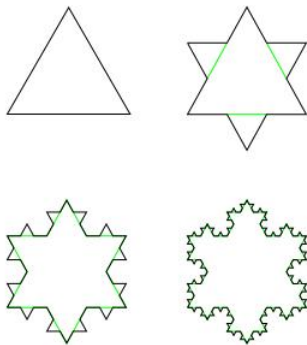
Nei frattali di origine matematica quello che è "rotto" è **la dimensione, che è frazionaria.**

CHE COSA È LA DIMENSIONE?

In matematica la dimensione e' un concetto intrinseco, indipendente dallo spazio in cui un oggetto si trova



Fiocco di neve (H. von Koch-1904)



- 1) Si divide ogni lato in 3 parti e su ogni lato si costruisce un triangolo equilatero
- 2) Si itera l'operazione molte volte (notare l'autosimilarita')

Come calcolare la dimensione del fiocco di neve?

Usando la seguente definizione di dimensione

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

(dimensione di Hausdorff) N = numero delle suddivisioni, r = lunghezza di ogni segmento e dato che per il fiocco di neve ogni volta il lato viene diviso in $N = 4$ parti, e la lunghezza del nuovo lato e' sempre $1/3$ di quella di partenza si ha

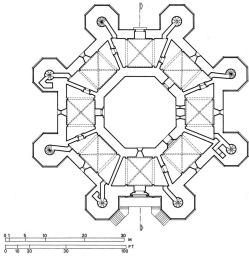
$$\Rightarrow D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(1/r)} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26$$

NON E' UN NUMERO INTERO!!

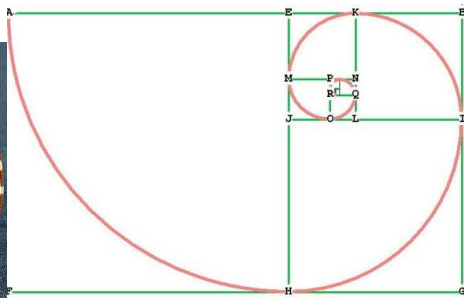
La dimensione frattale (non intera) e l'autosimilarita' appaiono anche in forme familiari e naturali



Castel del Monte: plan



La spirale logaritmica



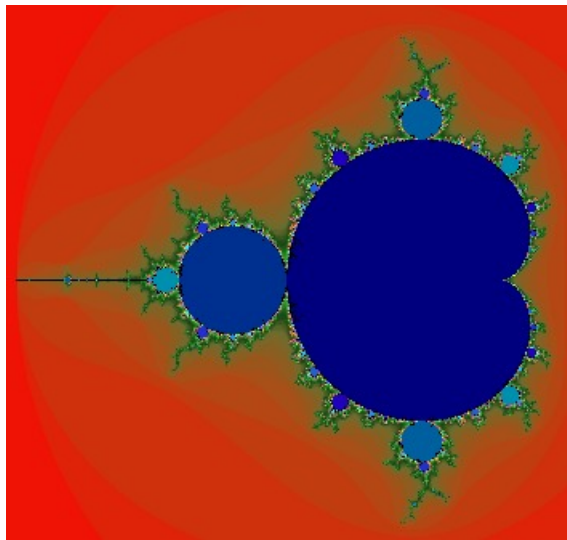
La spirale e' autosimilare, inoltre se si gira lungo la curva di angoli uguali, la distanza dal polo aumenta proporzionalmente

$$AB = FG = 1 \quad \frac{FG}{FH} = \phi = \frac{FH}{GH} \quad \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

L'autosimilarità compare nello studio dei sistemi dinamici non lineari (teoria del caos) descritti in modo ricorsivo da equazioni molto semplici, Se la legge di ricorsività riguarda numeri complessi (la trasformazione indotta dal sistema dinamico si svolge nel piano) si possono ottenere insiemi frattali.

Autosimilarità, frattali e comportamento caotico sono aspetti diversi di uno stesso modello matematico

Insieme di Mandelbrot



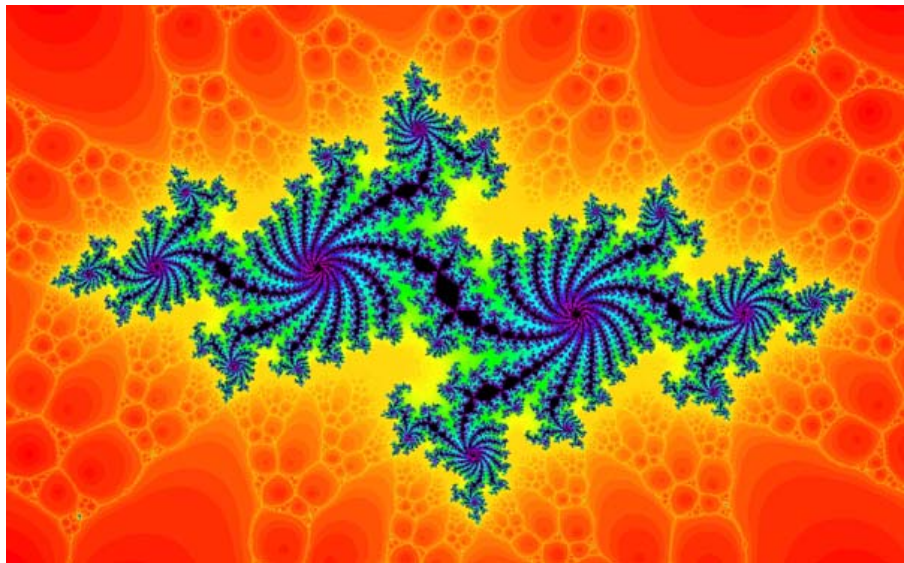
L'iterazione che descrive l'insieme di Mandelbrot e' la seguente:

$$a_{n+1} = a_n^2 + P_0$$

dove a_n e P_0 sono numeri complessi (hanno la forma $a + ib$).

La legge di ricorrenza deve essere NON LINEARE

Insieme di G. Julia



La legge che permette di costruire l'insieme di Julia è

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^3 + 1}{3a_n^2}$$

Per generare questa immagine si fa corrispondere un punto di un piano ad un pixel (punto di uno schermo). I punti generati dall'iterazione formano una tabella di numeri che codifica l'immagine digitale

SISTEMI COMPLESSI

ovvero

"l'intero e' maggiore della somma delle parti"

Nella ricerca scientifica degli ultimi 40/50 anni il concetto di "**sistema**" e' emerso come concetto centrale.

In tutti i campi sono apparse nuove professioni e si sono sviluppate competenze e tecnologie per studiare i sistemi (analisti dei sistemi, progettisti di sistemi, ingegneri dei sistemi ecc).

L'idea di sistema e' stata applicata alla storia, alla politica, alla psicologia, alla sociologia

Anche in biologia, alla luce dei risultati della biologia molecolare, della genetica, della fisiologia e della teoria dell'evoluzione, e' sembrato che il concetto di sistema potesse spiegare non solo gli aspetti molecolari o chimico-fisici del vivente, ma, soprattutto, i livelli piu' elevati dell'organizzazione degli organismi viventi

CHE COSA E' UN SISTEMA?

Un sistema e' un'insieme di parti "in interazione"

dove l'interazione e' "forte"

cioe' gioca un ruolo non trascurabile
nell'evoluzione del sistema stesso

In molti sistemi, conseguenze caratteristiche dell'interazione sono le cosiddette "**proprieta' emergenti**" (che si manifestano all'improvviso)

Esempi

La creatività umana, ad esempio, è una complicata proprietà biologica che sembra essere evoluta in modo "discontinuo".

Questa conclusione si può trarre, in particolare, dal fatto che, sebbene umani e scimpanze condividano più del 90 per cento del patrimonio genetico, la diversità di capacità creativa tra le due specie è enorme. Probabilmente un piccolo cambiamento in qualche sequenza del DNA avvenuto molto tempo fa ha prodotto questa differenza molto grande nei tratti creativi

Sebbene le "condizioni iniziali" fossero non troppo diverse, l'evoluzione, asintoticamente ha fortemente diversificato il risultato finale.

Questo comportamento e' previsto teoricamente dalla leggi di iterazione non lineari.

D'altra parte sembra ragionevole descrivere il funzionamento del cervello con un modello di sistema non lineare, visto che molti milioni di cellule interagiscono comunicando tra loro ed il risultato di queste interazioni supera certamente quello dell'azione compiuta da ogni singola cellula.

Un altro esempio di manifestazione improvvisa non spiegato dalla teoria dell'evoluzione darwiniana e' quello della sparizione o della formazione di nuove specie. Darwin dice che "*la natura non fa salti*"; tuttavia ammette che

"... molte specie, una volta formate, non sperimentano mai alcun cambiamento... e i periodi durante i quali certe specie hanno subito modificazioni, pur essendo lunghi se misurati in anni, sono stati brevi in confronto a periodi durante i quali hanno conservato la stessa forma"

Nel 1972 N. Eldredge e S.J. Gould presentano la teoria degli "equilibri punteggiati" secondo cui

(a) una nuova specie nasce quasi sempre per ramificazione e non come lenta trasformazione di una singola linea

(b) la velocità con cui avviene questa ramificazione è molto maggiore di quella delle trasformazioni usuali che avvengono per mutazione o deriva

L'uso dei modelli non lineari permette di affrontare questo problema come un problema di "biforcazione"

Le "biforcazioni", rappresentano teoricamente una separazione di comportamenti possibili:

se un sistema dinamico dipende da parametri esterni, ad esempio l'ambiente che determina la capacita' riproduttiva, al variare dei parametri in modo graduale, anche il sistema variera' gradualmente. Ma quando i parametri raggiungono un valore **critico** allora il mutamento puo' essere piu' rapido e anche drammatico (si realizza una biforcazione)

Le biforcazioni si verificano quando cambia lo stato del sistema (una soluzione di equilibrio passa da attrattiva a repulsiva): il sistema ricerca un nuovo livello su cui attestarsi per vivere.

Per rispondere alle domande poste dalla teoria dell'evoluzione e' stato necessario tentare di risolvere matematicamente problemi nuovi. La teoria dei sistemi adattativi complessi o, in breve, **teoria della complessita'** tenta di affrontare in modo adeguato questi problemi. I teorici della complessita' cercano di immaginare sistemi di individui diversificati (non omogeneizzati o medi) e tentano descriverne l'evoluzione. Uno dei modi per iniziare a descrivere evoluzione in questo modo e' quello di immaginare una

"vita artificiale"

In quest'ottica di sistema, di interazione, gli automi cellulari (il gioco "Game of life" oppure "Tierra" di Tom Ray - "life.ou.edu/tierra/") tentano di spiegare come mai quando molte parti di una singola individualita' (cellule, parti di un organo, individui di una popolazione...) si organizzano in un "network adattativo", possono emergere nuove proprieta' collettive, non possedute da ognuna delle parti. Il risultato evolutivo puo' essere sorprendentemente imprevisto (come la nascita di una nuova specie o estinzione di una esistente).

Ma anche altri approcci teorici tentano di spiegare e rappresentare alcuni aspetti dei fenomeni viventi in una gerarchia di complessita' sempre maggiore. Tra questi approcci ricordiamo

- *la teoria classica dei sistemi*, ha applicato le tecniche del calcolo differenziale (derivate, equazioni differenziali...) per stabilire principi generali da applicare ai sistemi o a sottoclassi particolari dei sistemi
- *la simulazione di metodi utilizzati dai computer*, ha ispirato una matematica "nuova", ad esempio per la genetica o la fisiologia, in cui un modello di diagrammi di blocchi di flusso puo' descrivere i meccanismi che regolano il funzionamento di organi complessi (come il cervello, il sistema circolatorio...)

- *la teoria dell'informazione* (informatica), introdotta da Shannon negli anni 50 del novecento, che si basa sul concetto che l'informazione (entropia) possa essere una misura del livello di organizzazione di un sistema, ha ispirato metodologie usate in biologia molecolare e teoria dell'evoluzione
- *la teoria dei giochi*, introdotta da von Neumann negli anni 50 del novecento e utilizzata in teoria dell'evoluzione da Maynard Smith, si è interessata al comportamento di "giocatori" (un sistema di elementi antagonisti) che, comportandosi razionalmente, hanno come scopo quello di ottenere il risultato ottimale nei confronti dell'antagonista o della natura, con il minimo delle "perdite".

Le esplorazioni sono solo all'inizio e richiedono fantasia, conoscenze interdisciplinari e passione per i fenomeni naturali