ANALISI VETTORIALE
LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 08 - 20251120

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Si spieghi perché i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ *sono misurabili secondo Lebesgue*

$$A = \bigcup_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right) \quad B = \bigcap_{k\geq 0}\left(-\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2^k+1}{2^k}\right) \quad C = [0,1] \setminus \left[\bigcup_{k\geq 0}\left(\frac{1}{3^{2k+1}}, \frac{1}{3^{2k}}\right)\right] \quad D = \bigcup_{k\geq 1}\left[0, \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}\right]$$

e se ne calcoli la misura.

ESERCIZIO 2. *Dopo aver consultato i seguenti url*

`https://it.wikipedia.org/wiki/Curva_di_Koch`
`https://it.wikipedia.org/wiki/Tappeto_di_Sierpinski`

si provi che il tappeto di Sierpinski e il fiocco di neve di Koch, come insiemi di $\mathbb{R}^2$*, sono misurabili secondo Lebesgue e se ne calcoli area e perimetro.*

ESERCIZIO 3. *Si provi che i seguenti insiemi dello spazio* $\mathbb{R}^3$

$$H = \{x_1 = 0\} \qquad \mathbb{S}^2 = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \qquad D = \left\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\right\} \qquad C = \left\{x_1^2 + x_2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1\right\}$$

sono misurabili e se ne calcoli la misura.

ESERCIZIO 4. *Dato l'insieme* $H = \left\{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 = x_3^2\right\}$ *contenuto nello spazio ambiente* $\mathbb{R}^3$*, si dica se* H *è chiuso, limitato e misurabile. Poi si individuino i punti* $p \in H$ *di distanza minima da* O*.*

ESERCIZIO 5. *Dato* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *diremo che* D *è normale se esistono un intervallo* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *e due funzioni* $f, g \in C^0[a,b]$ *tali che è possibile descrivere l'insieme in uno dei due seguenti modi:*

$$D = \{x = (x_1,x_2) : a \leq x_1 \leq b, f(x_1) \leq x_2 \leq g(x_1)\} \qquad o \qquad D = \{x = (x_1,x_2) : a \leq x_2 \leq b, f(x_2) \leq x_1 \leq g(x_2)\}$$

Si scrivano i seguenti insiemi del piano come domini normali in due modi differenti

$$D = \{x_1, x_2 \geq 0, 0 \leq x_1^2 - x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$E = \{x_1^2 + x_2^2 \geq 1, 0 \leq x_2, x_1 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$F = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq x_1^2 + x_2^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Si spieghi perché i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono misurabili secondo Lebesgue*

$$A = \bigcup_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right) \quad B = \bigcap_{k\geq 0}\left(-\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2^k+1}{2^k}\right) \quad C = [0,1] \setminus \left[\bigcup_{k\geq 0}\left(\frac{1}{3^{2k+1}}, \frac{1}{3^{2k}}\right)\right] \quad D = \bigcup_{k\geq 1}\left[0, \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}\right]$$

e se ne calcoli la misura.

DISCUSSIONE. Andiamo per ordine e cominciamo studiando l'insieme A. Notiamo subito che A è l'unione di una quantità numerabile di intervalli: poiché un intervallo è misurabile secondo Lebesgue e ricordiamo che la misura di un intervallo coincide con il nostro concetto primitivo di lunghezza, per cui è sufficiente considerare la differenza degli estremi in valore assoluto. Per il teorema di additività della misura di Lebesgue possiamo affermare che $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Siccome gli intervalli che compongono A sono disgiunti a due a due, segue che

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k\geq 0}\left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right] = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k} = 1$$

Gli intervalli la cui intersezione genera l'insieme B sono degli intervalli incapsulati, visto che

$$-\frac{1}{2^{k+1}} < -\frac{1}{2^{k+2}} < 1 + \frac{1}{2^{k+1}} < 1 + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k+1}{2^k}$$

quindi l'intersezione è misurabile (secondo Lebesgue) e vale che

$$m(B) = \lim_{k \longleftarrow +\infty} m\left(\left(-\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2^k+1}{2^k}\right)\right) = \lim_{k \longleftarrow +\infty}\left[1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\right] = 1$$

Per lo studio dell'insieme C iniziamo osservando che

$$C = [0,1] \setminus \left[\bigcup_{k\geq 0}\left(\frac{1}{3^{2k+1}}, \frac{1}{3^{2k}}\right)\right] = \bigcup_{k\geq 0}\left[\frac{1}{3^{2k+2}}, \frac{1}{3^{2k+1}}\right]$$

quindi C è l'unione di infiniti (numerabilmente) intervalli chiusi, che sono misurabili, disgiunti a due a due, quindi C è misurabile e la sua misura può essere ricavato usando il teorema di additività numerabile, da cui

$$\begin{aligned} m(C) &= m\left(\bigcup_{k\geq 0}\left[\frac{1}{3^{2k+2}}, \frac{1}{3^{2k+1}}\right]\right) = \sum_{k\geq 0} m\left(\left[\frac{1}{3^{2k+2}}, \frac{1}{3^{2k+1}}\right]\right) = \sum_{k\geq 0}\left[\frac{1}{3^{2k+1}} - \frac{1}{3^{2k+2}}\right] \\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{2}{3^{2k+2}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{9^k} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Infine analizziamo D. Notiamo che abbiamo a che fare con una unione crescente di intervalli, in quanto l'estremo sinistro degli intervalli è fisso, mentre gli estremi di destra costituiscono una successione crescente, poiché somme parziali di una serie a termini positivi. Per i teoremi di subadditività misurabile segue che D è misurabile e la sua misura vale

$$m(D) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} m\left(\left[0, \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2}\right]\right) = \lim_{k \longrightarrow +\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} \qquad \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$$

Concludiamo osservando che il valore esatto della serie non è noto dalle conoscenze in nostro possesso, ma è stato riportato per amore di completezza. ■

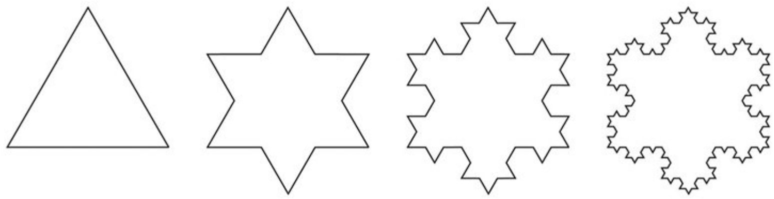
ESERCIZIO 2. *Dopo aver consultato i seguenti url*

`https://it.wikipedia.org/wiki/Curva_di_Koch`

`https://it.wikipedia.org/wiki/Tappeto_di_Sierpinski`

si provi che il tappeto di Sierpinski e il fiocco di neve di Koch, come insiemi di $\mathbb{R}^2$, sono misurabili secondo Lebesgue e se ne calcoli area e perimetro.

DISCUSSIONE. Entrambi gli oggetti rientrano nella categoria dei frattali autosimilari, e possono essere pensati com limite di una quantità numerabile di unioni e/o intersezioni di chiusi, quindi rientrano a buon titolo nella classe degli insiemi del piano misurabili secondo Lebesgue, a causa delle ottime proprietà di additività della misura rispetto alle unioni e alle intersezioni.
Riguardo al fiocco di neve di Koch osserviamo subito che l'insieme di partenza è un triangolo equilatero T_0, che possiamo supporre abbia area 1, a cui uniamo altri triangoli equilateri di lato ridotto di un fattore 1/3, come suggerito dalla seguente figura che mostra l'effetto delle prime iterazioni



Relativamente all'area sappiamo che $A(T_0) = m_2(T_0) = 1$, e che la prima iterazione T_1 è ottenuta incollando nel mezzo di ogni segmento che delimita la figura un triangolo più piccolo, una copia di T_0, avente lato $\ell/3$, dove ℓ è la lunghezza del lato di T_0. Le iterazioni successive si ottengono ripetendo l'operazione descritta su ogni segmento del perimetro della figura ottenuta, incollando al passo k triangoli di lato $\ell/3^k$.
Per capire come muta l'area della figura dobbiamo capire quanti triangoli, di volta in volta, aggiungiamo alla figura piana. Ricordiamo che $m_2(T_0) = \sqrt{3}\ell^2/4$ e che ognuno dei triangoli t_j^k più piccoli che vengono incollati alla k-sima iterazione è simile a T_0, quindi segue che $m_2(t_j^k) = m_2(T_0)/3^{2k}$ perché il lato ha un fattore di proporzionalità pari a $1/3^k$.
Il numero dei triangoli t_j^{k+1} che si aggiungono alla regione piana T_k è uguale al numero di lati della figura, tale numero di lati è 3 per T_0 e ad ogni iterazione ogni lato viene "modificato" in 4 lati di lunghezza 1/3 della precedente, quindi abbiamo che il numero di lati di T_{k+1} è 4 volte il numero di lati di T_k, il che ci permette di dedurre che, nel passaggio da T_k a T_{k+1} aggiungiamo alla regione piana esattamente $3 \cdot 4^k$ triangoli t_j^{k+1}.
Infine osserviamo che la numerabile additività della misura di Lebsgue ci permette di scrivere che

$$T_1 = T_0 \cup \left(\cup_{j=1}^{3} t_j^1\right) \qquad \text{quindi} \qquad m_2(T_1) = m_2(T_0) + 3m_2(t_j^1) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\left[1 + \frac{3}{9}\right]$$

$$T_2 = T_1 \cup \left(\cup_{j=1}^{12} t_j^2\right) \qquad \text{quindi} \qquad m_2(T_2) = m_2(T_0) + 3m_2(t_j^1) + 12m_2(t_j^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{12}{81}\right]$$

$$T_3 = T_2 \cup \left(\cup_{j=1}^{48} t_j^3\right) \qquad \text{e} \qquad m_2(T_3) = m_2(T_2) + 48m_2(t_j^3) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243}\right]$$

più in generale segue che

$$m_2(T_k) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\left[1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}\cdot\frac{4^k}{9^k}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\left[1 + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k}\left[\frac{4}{9}\right]^j\right] \longrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{5}\ell^2 = m_2(T_\infty)$$

dove il simbolo T_∞ indica il fiocco di neve, cioè la figura limite che si ottiene reiterando il processo un'infinità (numerabile) di volte.
Per il perimetro di T_k possiamo ragionare nel seguente modo, poiché $\ell = 2[3]^{-1/4}$ abbiamo che $p(T_0) = 2\sqrt[4]{3^3}$, e T_1 ha un perimetro pari a 4/3 di T_0, in quanto ogni lato viene frammentato in tre parti uguali e il segmento centrale rimpiazzato con due di eguale lunghezza. Siccome il procedimento viene ripetuto uguale ad ogni passaggio otteniamo che

$$p(T_K) = p(T_0)\cdot\left[\frac{4}{3}\right]^k \longrightarrow +\infty$$

dunque il fiocco di neve è un insieme misurabile del piano che ha misura (o meglio area) finita e perimetro infinto!
Il ragionamento relativo al tappeto di Sierpinski è simile, anche se la misurabilità secondo Lebesgue è una conseguenza del fatto che l'insieme è definito come un quadrato a cui si "sottraggono" dei quadrati più piccoli contenuti al suo interno, producendo così una successione di insiemi inscatolati. La prima sottrazione (insiemistica) è di un quadrato di lato 1/3, cioè di area 1/9. Il secondo passo consiste nel togliere 8 quadrati di lato

1/9, cioè di area 1/81 e, ragionando per induzione, si conclude che al passo k-simo la costruzione prevede la rimozione di 8^{k-1} quadrati di area $1/9^k$.

In riferimento alla figura precedente abbiamo che

$$m_2(Q_0) = 1 \qquad m_2(Q_1) = 1 - \frac{1}{9} \qquad m_2(Q_2) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{81} \qquad m_2(Q_3) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{81} - \frac{64}{729}$$

e in generale otteniamo che

$$m_2(Q_{k+1}) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{81} - \ldots - \frac{8^k}{9^{k+1}} = 1 - \frac{1}{9}\left[1 + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{8^k}{9^k}\right] = 1 - \frac{1}{9}\sum_{j=0}^{k}\left[\frac{8}{9}\right]^j \longrightarrow 0 = m_2(Q_\infty)$$

Ragionando analogamente a prima si può calcolare il perimetro del tappeto, in particolare possiamo scrivere che

$$p(Q_k) = 4\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3^2} + \ldots + \frac{8^{k-1}}{3^k}\right] = 4\left[1 + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{8}{3}\right)^j\right] \longrightarrow +\infty$$

Il risultato ottenuto è un po' controintuitivo, visto che Q_∞ è un insieme limitato del piano (perché sottoinsieme del quadrato Q_0) per il quale abbiamo provato che il suo perimetro ha lunghezza infinita, mentre la sua area vale 0. ■

ESERCIZIO 3. *Si provi che i seguenti insiemi dello spazio* $\mathbb{R}^3$

$$H = \{x_1 = 0\} \qquad \mathbb{S}^2 = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \qquad D = \left\{x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_3 = 0\right\} \qquad C = \left\{x_1^2 + x_2 = 1, 0 \le x_3 \le 1\right\}$$

sono misurabili e se ne calcoli la misura.

DISCUSSIONE. Tutti gli insiemi da analizzare presentano qualche spunto di riflessione, per esempio H è un insieme non limitato, quindi dobbiamo verificare la misurabilità della sua intersezione con un insieme misurabile e limitato di "taglia" R e studiare il limite della misura per R che tende all'infinito. Consideriamo $B_R = \overline{B(O;R)}$ e osserviamo che $H \cap B_R$ è un insieme chiuso (perché intersezione di due chiusi), in più ha misura nulla per ogni R. Infatti $H \cap B_R \subseteq \{x_1^2 + x_2^2 \le R\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ e dalla monotonia della misura di Lebesgue segue che

$$m_3(H \cap B_R) \le m_3\left(\{x_1^2 + x_2^2 \le R\} \times [-\varepsilon, \varepsilon]\right) = 2\pi R^2 \varepsilon$$

e l'affermazione è conseguenza dell'arbitrarietà di ε. Siccome $m_3(H \cap B_R) = 0$ per ogni $R \ge 0$ possiamo affermare che l'iperpiano H (e quindi ogni altro iperpiano dello spazio) è un insieme misurabile e trascurabile, cioè un insieme non limitato di misura nulla!
$\mathbb{S}^2$ è un insieme chiuso quindi misurabile, per stimarne la misura possiamo procedere come segue: poichè vale che $\mathbb{S}^2 \subseteq B(O, 1+\varepsilon) \setminus B(O; 1-\varepsilon)$ abbiamo che

$$m_3(\mathbb{S}^2) \le m_3\left(B(O, 1+\varepsilon) \setminus B(O; 1-\varepsilon)\right) = \frac{4}{3}\pi\left[(1+\varepsilon)^3 - (1-\varepsilon)^3\right] = \frac{8}{3}\pi\varepsilon[3 + \varepsilon^2] \longrightarrow 0$$

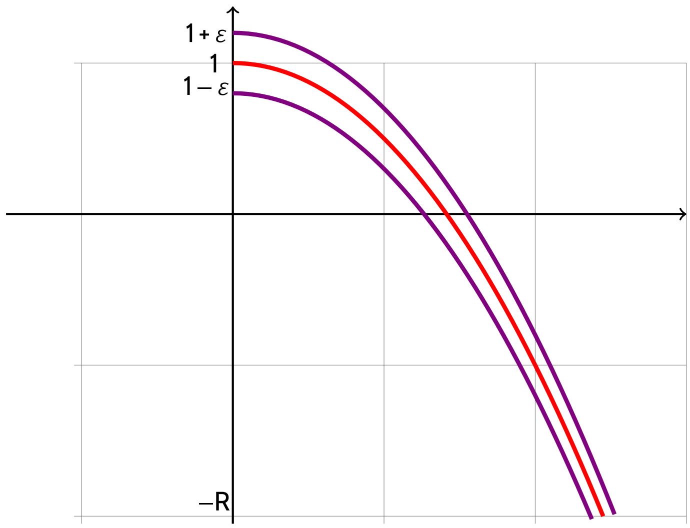
per $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.
L'insieme $D = \left\{x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_3 = 0\right\}$ è un insieme chiuso e limitato, quindi compatto, contenuto nel cilindro $\{x_1^2 + x_2^2 \le 1\} \times [0, \varepsilon]$ che ha misura $\pi\varepsilon$, dall'arbitrarietà del parametro segue che è un insieme di misura nulla.
L'ultimo insieme da prendere in esame è non limitato, quindi procederemo come abbiamo fatto per H ed osserviamo subito che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale

$$C = \left\{x : x_2 + x_1^2 - 1 = 0, 0 \le x_3 \le 1\right\} \subseteq C_\varepsilon := \left\{(x_1, x_2) : -\varepsilon \le x_2 + x_1^2 - 1 \le \varepsilon\right\} \times [0, 1]$$

inoltre possiamo "facilmente" calcolare $m_3(C_\varepsilon \cap Q_R)$, dove $Q_R = [-R, R]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ sostituisce B_R nel limite tramite il quale otterremo la misura di C. Cominciamo osservando che, almeno per $R \geq 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} m_3(C_\varepsilon \cap Q_R) &= m_2\left(\left\{(x_1, x_2) : -\varepsilon \leq x_2 + x_1^2 - 1 \leq \varepsilon\right\} \cap [-R, R]^2\right) \cdot m_1([0, 1]) \\ &= m_2\left(\left\{(x_1, x_2) : -\varepsilon \leq x_2 + x_1^2 - 1 \leq \varepsilon\right\} \cap [-R, R]^2\right) \end{aligned}$$

Facendo riferimento alla seguente figura



abbiamo che

$$\begin{aligned} m_2\left(\left\{(x_1, x_2) : -\varepsilon \leq x_2 + x_1^2 - 1 \leq \varepsilon\right\} \cap [-R, R]^2\right) &= 2\left[\int_0^{\sqrt{R+1+\varepsilon}} \left[(1+\varepsilon) - x_1^2\right] dx_1 - \int_0^{\sqrt{R+1-\varepsilon}} \left[(1-\varepsilon) - x_1^2\right] dx_1\right] \\ &= 2\left[(1+\varepsilon)(R+1+\varepsilon)^{1/2} - \frac{1}{3}(R+1+\varepsilon)^{3/2} - (1-\varepsilon)(R+1-\varepsilon)^{1/2} + \frac{1}{3}(R+1-\varepsilon)^{3/2}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[[R+1+\varepsilon]^{1/2}[2-R+2\varepsilon] - [R+1-\varepsilon]^{1/2}[2-R-2\varepsilon]\right] \simeq k[R+1]^{1/2}\varepsilon \end{aligned}$$

da cui possiamo dedurre che $m_3(C_\varepsilon \cap Q_R) = 0$ per ogni $R \geq 1$ fissato, a causa dell'arbitrarietà di ε. Come prima possiamo concludere che $m_3(C) = 0$. ■

ESERCIZIO 4. *Dato l'insieme* $H = \left\{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 = x_3^2\right\}$ *contenuto nello spazio ambiente* $\mathbb{R}^3$*, si dica se* H *è chiuso, limitato e misurabile. Poi si individuino i punti* $p \in H$ *di distanza minima da* O*.*

DISCUSSIONE. Il problema può essere riformulato nel seguente modo: trovare i punti di minimo assoluto (se esistono) della funzione distanza appartenenti ad $H = \left\{g(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Notiamo che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^0(\mathbb{R}^3)$ e poiché $H = g^{-1}(\{0\})$ possiamo subito dire che il vincolo è chiuso e quindi misurabile, inoltre è facile osservare che H non è limitato, visto che $(0, t, t) \in H$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\|(0, t, t)\|_2 = \sqrt{2}|t|$. In generale il fatto che H non sia limitato rende impossibile usare il teorema di Weierstrass per poter concludere l'esistenza dei punti di massimo e minimo assoluto e infatti l'immagine della funzione distanza (ristretta su H) è superiormente illimitata come è facile verificare utilizzando il punto $(0, t, t)$, però la funzione distanza è coercitiva e questo rende possibile l'esistenza del minimo assoluto, visto che $H \cap \overline{B(O, R)}$ è compatto e non vuoto per R sufficientemente grande. Per trovare i punti di minimo assoluto ricorriamo al teorema dei moltiplicatori di Lagrange: la funzione obiettivo è $D(x) = \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, visto che la distanza al quadrato possiede gli stessi punti critici della distanza. Ricordando che nei punti critici i vettori $\nabla D(x)$ e $\nabla g(x)$ devono essere paralleli possiamo ricondurci a risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 - 1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix} = 1 \\ g(x) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3(-2x_1 + 1) = 0 \\ -2x_2x_3 = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases}$$

che possiede soltanto le soluzioni $O(0,0,0)$ e $A(2,0,0)$, è facile convincersi del fatto che O è il punto di minimo assoluto, mentre A è un punto critico di natura differente. ■

ESERCIZIO 5. *Dato* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *diremo che* D *è normale se esistono un intervallo* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *e due funzioni* $f, g \in C^0[a,b]$ *tali che è possibile descrivere l'insieme in uno dei due seguenti modi:*

$$D = \{x = (x_1, x_2) : a \le x_1 \le b, f(x_1) \le x_2 \le g(x_1)\} \qquad o \qquad D = \{x = (x_1, x_2) : a \le x_2 \le b, f(x_2) \le x_1 \le g(x_2)\}$$

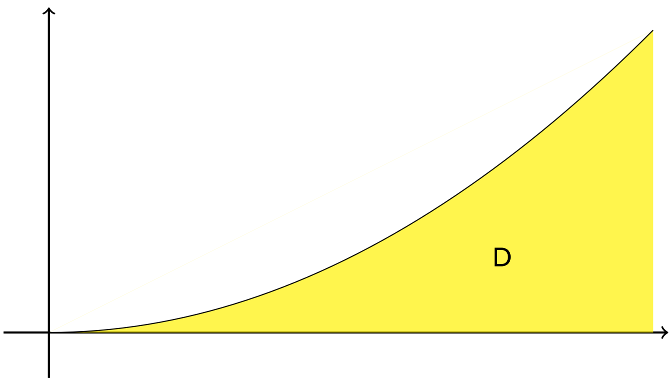
Si scrivano i seguenti insiemi del piano come domini normali in due modi differenti

$$D = \{x_1, x_2 \ge 0, 0 \le x_1^2 - x_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$E = \{x_1^2 + x_2^2 \ge 1, 0 \le x_2, x_1 \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$F = \{0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le x_1^2 + x_2^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

DISCUSSIONE. Procediamo rapidamente senza perderci in fronzoli o commenti. Il punto chiave dell'esercizio risiede nell'abilità scrivere espressioni di funzioni e delle loro inverse, in modo da scambiare il ruolo di input ed output e di capire come condensare le relazioni che delimitano le regioni del piano. Cominciamo con il dominio $D = \{x_1, x_2 \ge 0, 0 \le x_1^2 - x_2\}$ che è il sottoinsieme del primo quadrante rappresentato nel disegno a lato. Infatti la diseguaglianza $x_1^2 - x_2 \ge 0$ identifica i punti che si trovano sul grafico della parabola (a causa del segno di =) e quelli al di sotto, che verificano la diseguaglianza stretta. Tale regione deve però essere ulteriormente ristretta, visto che le richieste $x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$ la rendono un sottoinsieme del primo quadrante. Possiamo riscrivere la regione nel seguente modo $D = \left\{x_1 \ge 0, 0 \le x_2 \le x_1^2\right\}$, rispondendo alla prima richiesta del testo, oppure anche come $D = \left\{x_2 \ge 0, 0 \le x_1 \le \sqrt{x_2}\right\}$ invertendo il ruolo delle due variabili.



Per le altre due regioni possiamo procedere in maniera analoga, per esempio $E = \left\{0 \le x_1 \le 1, \sqrt{1 - x_1^2} \le x_2 \le 1\right\}$ o anche $E = \left\{0 \le x_2 \le 1, \sqrt{1 - x_2^2} \le x_1 \le 1\right\}$, questo perché le relazioni identificano la parte del quadrato $[0,1]^2$ esterna al cerchio unitario centrato in O, che è un insieme simmetrico rispetto alla retta $\{x_1 = x_2\}$, e questo significa che il ruolo delle due variabili è interscambiabile, quindi le due descrizioni sono simmetriche.
Per quanto riguarda F la descrizione fornita dal testo ci suggerisce che abbiamo a che fare con la regione del primo ottante (tutte le variabili sono non negative) contenuta nel parallelepipedo infinito $[0,1]^2 \times [0, +\infty)$ e sottostante il grafio della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Per descrivere differentemente il dominio possiamo scrivere $F = \{0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_3 \le 2, \sqrt{\max\{0, x_3 - x_1^2\}} \le x_2 \le 1\}$ procedendo (più o meno) come fatto per E, si noti che il dominio è simmetrico rispetto al piano $\{x_1 = x_2\}$, quindi l'ultima rappresentazione può essere variata scambiando x_1 e x_2. ■
