Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

→ Formula di rappresentazione mediante funzione di Green.

TEOREMA Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato regolare.

Siano $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$.

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sia soluzione di

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora $u(x)$ è data da

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega f(y)\, G(x,y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, d\sigma(y)}$$

dove $G(x,y)$ è la funzione di Green relativa ad Ω,

cioè $$G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi^x(y)$$

e $\varphi^x(y)$ è sol^{ne} del problema (P_x)

$$(P_x) = \begin{cases} \Delta_y \varphi^x(y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi^x(y) = \Phi(x-y) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Due casi in cui si può scrivere esplicitamente la funzione di Green:

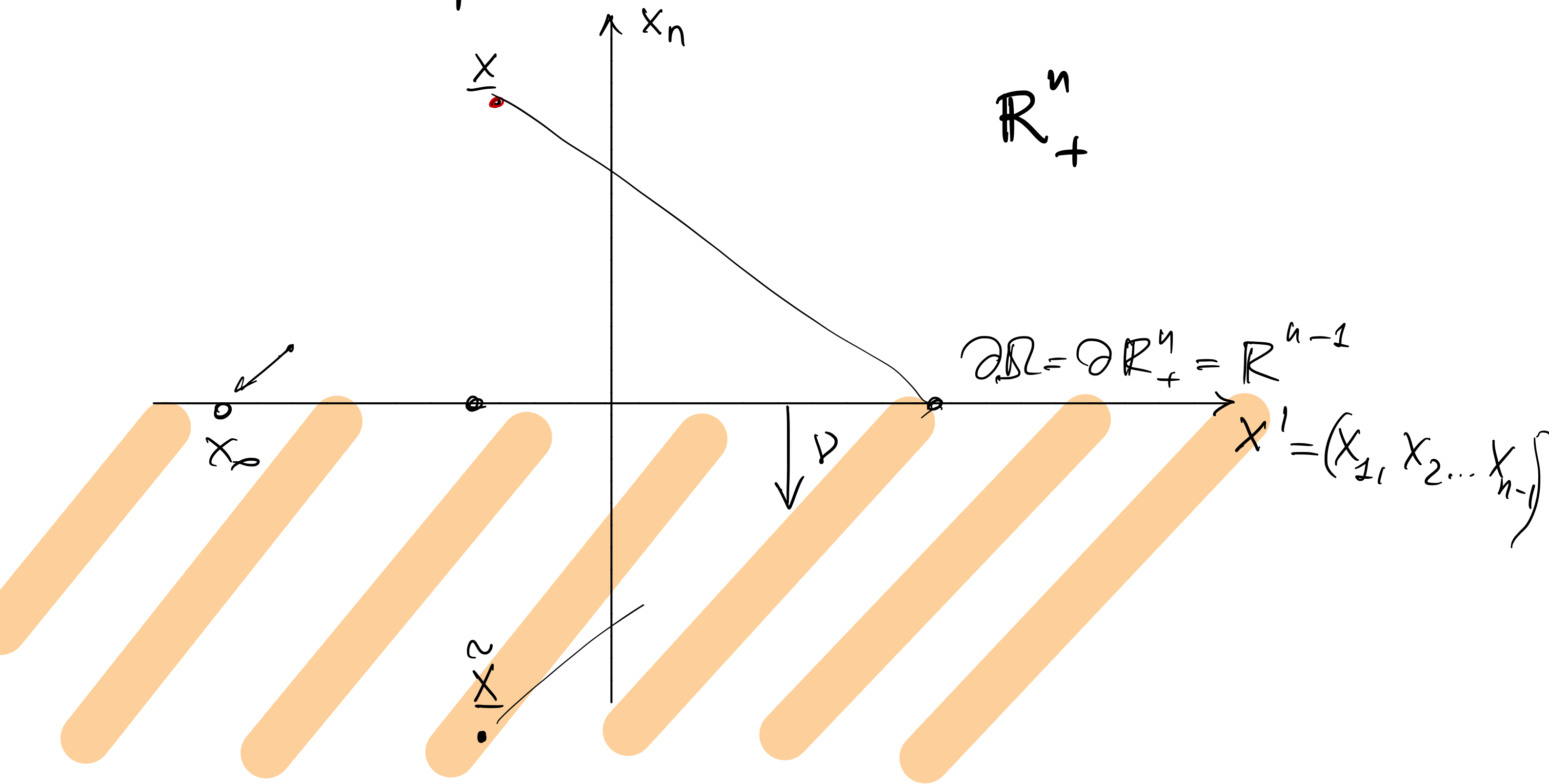
- Il semispazio
- Una palla

Funzione di Green per un semi-spazio

OSS Non rientra nella teoria precedente perché

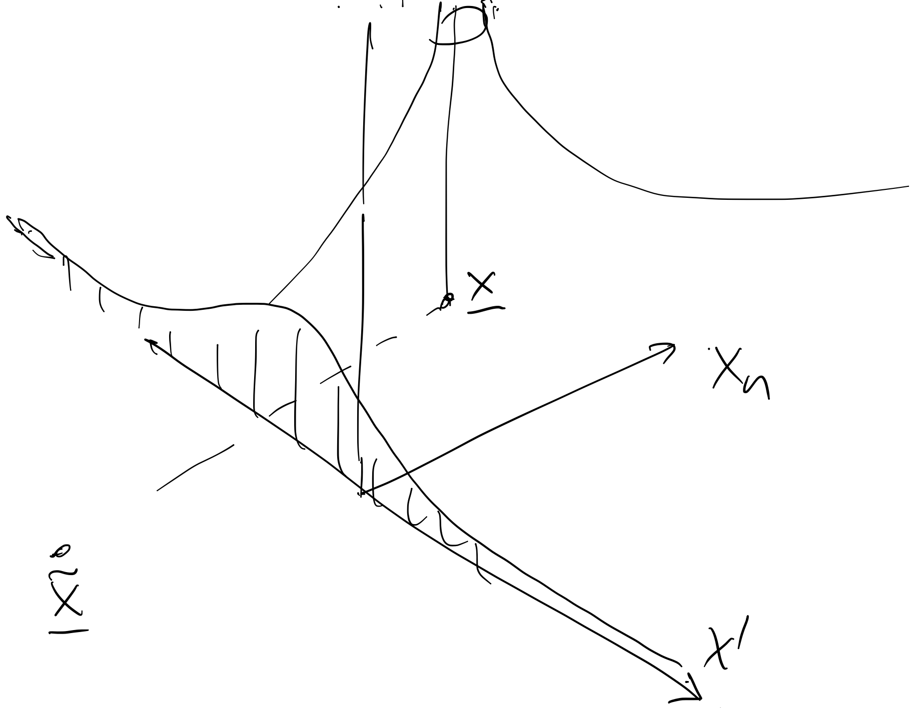
$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{ \underline{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0 \}$$

non è un aperto limitato.



Voglio risolvere il pb. (per x fissato in $\mathbb{R}^n_+$)

$$(P_x) : \begin{cases} +\Delta_y \varphi^x(y) = 0 & \mathbb{R}^n_+ \\ \varphi^x(y) = \Phi(x-y) & \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$



$x_n > 0.$

Idea: Dato $\underline{x} = (x_1, \dots x_{n-1}, x_n)$, definisco

$$\underline{\tilde{x}} = (x_1, \dots x_{n-1}, -x_n).$$

Considero $\varphi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$. Allora è chiaro che

$\varphi^x(y)$ è soluzione di (P_x)

Definiamo la funzione di Green di $\mathbb{R}^n_+$ come

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

Vogliamo risolvere il problema:

per semplicità (potrei prendere $f(x)$)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{su } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Supponiamo che valga la stessa formula di prima.

$$u(x) = -\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y)\, \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\, d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y)\, \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)\, d\sigma(y).$$

Calcoliamo $\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)$.

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}).$$

$$\Phi(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|y| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|y|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \Phi(y-x) = -\frac{1}{n\,\omega_n} \frac{1}{|y-x|^{n-1}} \frac{\partial\left(|y-x|\right)}{\partial y_n} =$$

anche per $n=2$

$$\frac{\partial\left(|y-x|\right)}{\partial y_n} = \frac{\partial}{\partial y_n}\left[\sum_{i=1}^n (y_i-x_i)^2\right]^{1/2} = \frac{\cancel{2}(y_n-x_n)}{\cancel{2}\left[\sum_{i=1}^n (y_i-x_i)^2\right]^{1/2}} = \frac{y_n-x_n}{|y-x|}$$

$$= -\frac{1}{n\,\omega_n} \frac{1}{|y-x|^{n-1}} \frac{y_n-x_n}{|y-x|} =$$

$$= -\frac{1}{n\,\omega_n} \frac{y_n-x_n}{|y-x|^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \Phi(y-x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y_n - x_n}{|\underline{y}-\underline{x}|^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \Phi(y-\tilde{x}) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y_n - \tilde{x}_n}{|\underline{y}-\underline{\tilde{x}}|^n} = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y_n + x_n}{|y-\underline{\tilde{x}}|^n} =$$

$$=$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = -\frac{1}{n\omega_n} \left(\frac{\cancel{y_n} - x_n}{|\underline{y}-\underline{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\underline{y}-\underline{\tilde{x}}|^n} \right) =$$

" OSS.

su $\partial \mathbb{R}^n_+$

$|\underline{y}-\underline{\tilde{x}}| = |\underline{y}-\underline{x}|$

$$= -\frac{1}{n\omega_n} \frac{-2x_n}{|\underline{y}-\underline{x}|^n} = \frac{2}{n\omega_n} \frac{x_n}{|\underline{y}-\underline{x}|^n}$$

La formula diventa

$$u(x) = \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{2x_n}{n\omega_n |\underline{y}-\underline{x}|^n} g(y)\, d\sigma(y) =$$

$$= \frac{2x_n}{n\omega_n} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|\underline{y}-\underline{x}|^n}\, d\sigma(y)$$

(Formula di Poisson).

$K(x,y) = \dfrac{2x_n}{n\omega_n} \dfrac{1}{|x-\underline{y}|^n}$ si dice nucleo di Poisson.

(Poisson's kernel).

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|y-x|^n} \, d\sigma(y) \qquad (*)$$

TEOREMA Sia $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap \underbrace{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}$ $\hookrightarrow$ limitata in $\mathbb{R}^{n-1}$

Sia $u(x)$ definita da $(*)$.

(OSS L'integrale converge perché all'infinito $|y-x|^n \sim |y|^n$ e $n > n-1$ [l'integrale è in $\mathbb{R}^{n-1}$]).

Allora $u(x)$ verifica

1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$

2) $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n_+$

3) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0) \qquad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$

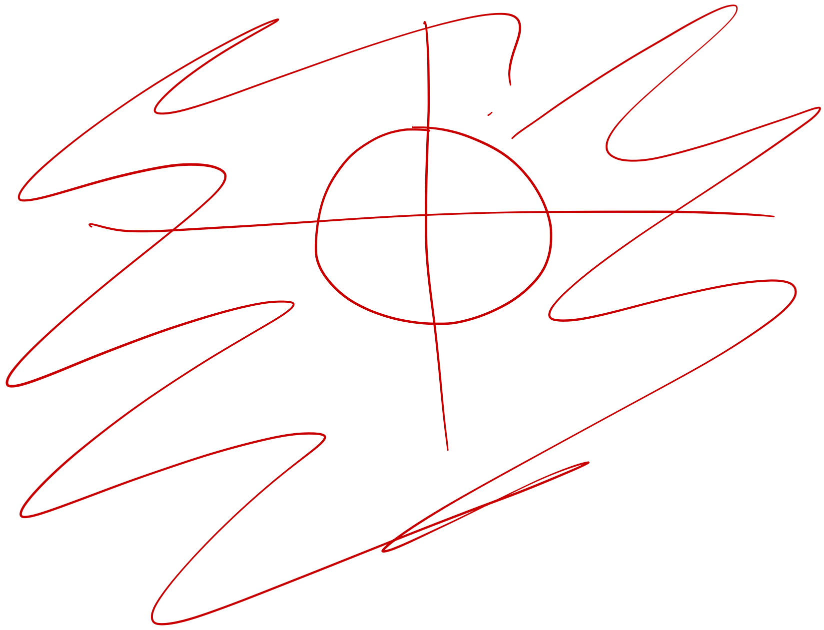
e quindi u è una sol^{ne} del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{su } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

(La dim. la vedremo la prossima volta).

OSS

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{1}{|y|^\alpha}\, dy$$

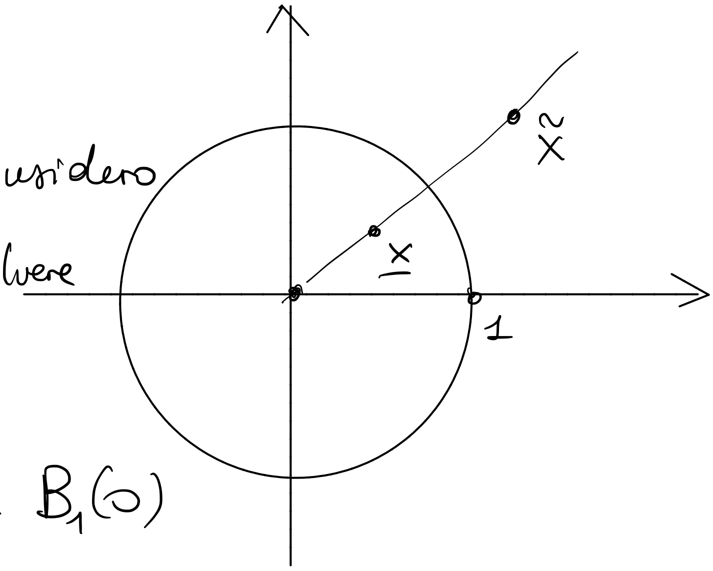


converge per $\underline{\alpha > n}$

Funzione di Green per una palla

$\Omega = B_1(0)$

Fissato $\underline{x} \in B_1(0)$, considero $\phi(\underline{x}-\underline{y})$ e voglio risolvere il problema



$$(P_x) \quad \begin{cases} \Delta \varphi^x(y) = 0 & \text{su } B_1(0) \\ \varphi^x(y) = \phi(y-x) & \text{su } \partial B_1(0) \end{cases}$$

Anche in questo caso facciamo una sorta di "riflessione" rispetto a $\partial\Omega$.

Per $\underline{x} \in B_1(0)$, con $\underline{x} \neq \underline{0}$ definiamo $\tilde{x} = \dfrac{x}{|x|^2}$ (inversione sferica).

Definiamo $\quad \varphi^x(y) = \Phi\left(|x|(y-\tilde{x})\right)$

E' chiaro che $\varphi^x(y)$ è armonica in y. (dentro $B_1(0)$)

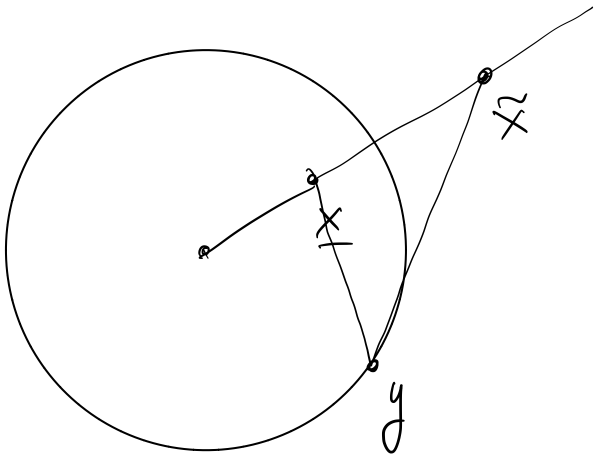
Non è chiaro che su $\partial B_1(0)$

$$\varphi^x(y) = \phi(y-x).$$

Mi chiedo se, $\forall y \in \partial B_1(0)$

$$\phi(y-x) = \phi\left(|x|(y-\tilde{x})\right)$$

$$\iff \quad |y-x| = |x|\,|y-\tilde{x}| \qquad \begin{matrix} \forall x \in B_1(0) \\ \forall y \in \partial B_1(0) \end{matrix}$$



$$|y-x| \stackrel{?}{=} |x|\,|y-\tilde{x}| \qquad \forall\, x \in B_1(0)$$
$$\forall\, y \in \partial B_1(0)$$

$$|y-x|^2 \stackrel{?}{=} |x|^2\,|y-\tilde{x}|^2$$

$$|x|^2\,|y-\tilde{x}|^2 = |x|^2\,(y-\tilde{x},\, y-\tilde{x}) =$$

$$= |x|^2\Big(\underbrace{(y,y)}_{=|y|^2=1} + \underbrace{(\tilde{x},\tilde{x})}_{=|\tilde{x}|^2} - 2(y,\tilde{x})\Big) =$$

$$= |x|^2\left(1 + |\tilde{x}|^2 - 2(y,\tilde{x})\right) = \qquad \text{oss } \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$= |x|^2\left(1 + \frac{|x|^2}{|x|^4} - 2\,\frac{(y,x)}{|x|^2}\right) =$$

$$= |x|^2 + \overset{=|y|^2}{1} - 2(x,y) =$$

$$= (x-y,\, x-y) = |x-y|^2$$

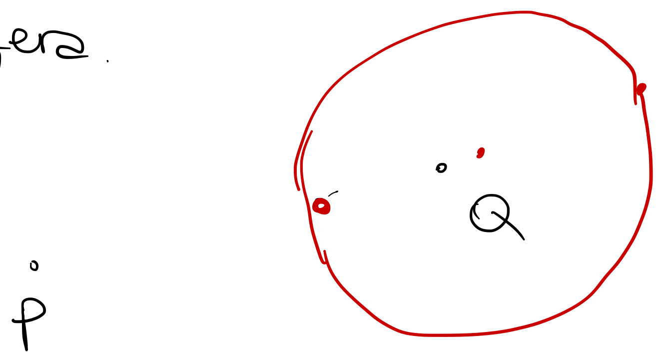
<u>OSS</u> Questo corrisponde alla seguente proprietà notevole, valida in ogni dimensione

Se fissiamo due punti P e Q in $\mathbb{R}^n$, l'insieme

$$E_\lambda = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x,P) = \lambda\, d(x,Q) \}$$

$$\lambda > 0, \ \lambda \neq 1$$

è una sfera.



Definiamo

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})) \qquad \tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

La formula di rappresentazione per il pb.

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u = g & \text{su } \partial B_1(0) \end{cases}$$

per semplicità

ci fornisce

$$u(x) = -\int_{\partial B_1(0)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)\, d\sigma(y).$$

Voglio calcolare $\frac{\partial G}{\partial \nu}(y-x)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y) = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{1}{|y|^{n-1}}\frac{y_i}{|y|} = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{y_i}{|y|^n}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{y_i-x_i}{|y-x|^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(|x|(y-\tilde{x})) = -\frac{1}{n\omega_n}\frac{|x|}{|x|^{n-1}|y-\tilde{x}|^{n-1}}\frac{y_i-\tilde{x}_i}{|y-\tilde{x}|} =$$

$$= -\frac{1}{n\omega_n}\frac{\overbrace{|x|^2(y_i-\tilde{x}_i)}^{=|x|^2 y_i - x_i}}{\underbrace{|x|^n|y-\tilde{x}|^n}_{|y-x|^n}}$$

$$= -\frac{1}{n\omega_n}\frac{|x|^2 y_i - x_i}{|y-x|^n}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = -\frac{1}{n\omega_n |y-x|^n}\left[y_i - \cancel{x_i} - |x|^2 y_i + \cancel{x_i}\right] =$$

$$= -\frac{y_i(1-|x|^2)}{n\omega_n|y-x|^n} \qquad \forall y\in\partial B$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \sum_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y)\underset{y_i}{\underset{\shortparallel}{\nu_i}} = -\frac{(1-|x|^2)}{n\omega_n|y-x|^n}\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{|y|^2} =$$

$$= -\frac{1-|x|^2}{n\omega_n|y-x|^n}$$

La formula diventa

$$u(x) = -\int_{\partial B_1(0)} \left(-\frac{1-|x|^2}{n\,\omega_n}\right) \frac{g(y)}{|y-x|^n}\, d\sigma(y) =$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\,\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{g(y)}{|y-x|^n}\, d\sigma(y)} \qquad (*)$$

Formula di Poisson per la sfera B_1

Se invece ho la sfera di raggio r?

$\Omega = B_r(0)$

$$(P_r) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r(0) \\ u = g & \text{su } \partial B_r(0) \end{cases}$$

Pongo $\tilde{u}(x') = u(r x')$ $\qquad x' \in B_1(0)$

u verifica $(P_r) \iff \tilde{u}$ verifica

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & B_1(0) \\ \tilde{u}(x') = u(r x') = g(r x') =: \tilde{g}(x') & x' \in \partial B_1(0) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ u(rx') \\ \| \\ u(x)}}{\tilde{u}(x')} = \frac{1-|x'|^2}{n\,\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\tilde{g}(y')}{|y'-x'|^n}\, d\sigma(y') =$$

$rx' = x$ $\qquad |x'|^2 = \frac{|x|^2}{r^2}$

$y' = \frac{y}{r}$

$d\sigma(y') = \frac{d\sigma(y)}{r^{n-1}}$

$$= \frac{1 - \frac{|x|^2}{r^2}}{n\,\omega_n} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{\left|\frac{y}{r} - \frac{x}{r}\right|^n} \frac{d\sigma(y)}{r^{n-1}}$$

$$= \frac{r^2 - |x|^2}{n\,\omega_n\, r^{\cancel{2}}}\, \cancel{r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma(y)$$

Formula di Poisson in $B_r(0)$

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\,\omega_n\, r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|y-x|^n}\, d\sigma(y) \qquad x \in B_r(0) \qquad (*)$$

TEOREMA Supponiamo $g \in C(\partial B_r(0))$. Allora, se $u(x)$ è data da $(*)$, essa è una soluzione di (P_r) nel senso che:

(1) $u \in C^\infty(B_r(0))$

(2) $\Delta u = 0$ in $B_r(0)$

(3) $\forall\, x_0 \in \partial B_r(0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B_r(0)}} u(x) = g(x_0)$$

"Metodi di energia".

che fanno apparire la "energia" $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$

1) Unicità tramite i metodi di energia.

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω dominio regolare connesso

La soluzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ di (P) è unica.

<u>oss</u> L'abbiamo già dimostrato con il principio di max

Ora faremo una dimostrazione di tipo "integrale"

Siano $u, \tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ sol^{ni} di (P)

Poniamo $w = u - \tilde{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta w = f - f = 0 & \text{in } \Omega \\ w = g - g = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Moltiplico l'eq^{ne} per w e integro su Ω

$$0 = \int_\Omega (-\Delta w)\, w \, dx = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w \, dx - \cancel{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{w}} \, d\sigma}$$

$$= \int_\Omega |\nabla w|^2 dx$$

$$\Rightarrow |\nabla w|^2 \equiv 0 \Rightarrow \nabla w \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\Rightarrow w \equiv c \underset{w=0 \text{ su } \partial\Omega}{\Longrightarrow} w \equiv 0.$$