

10/11/2025

TEOR.
DINI

$F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $\bar{x} \in A$ Tale che

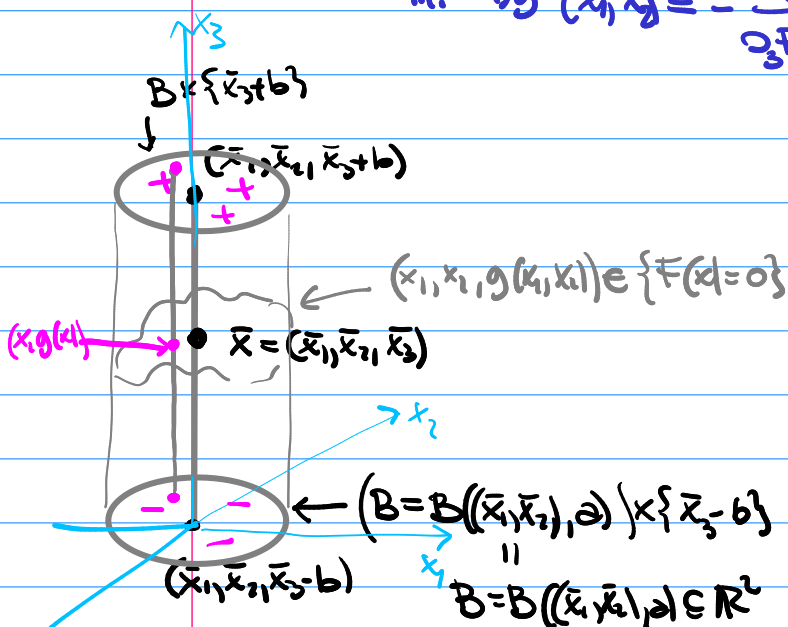
$$F(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla F(\bar{x}) \neq 0 \quad (\partial_3 F(\bar{x}) \neq 0)$$

allora $\exists a, b > 0$ e $g: B((\bar{x}_1, \bar{x}_2), a) \rightarrow (\bar{x}_3 - b, \bar{x}_3 + b)$ di classe C^1

Tale che i. $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0 \quad \forall x \in B \subset \mathbb{R}^2$

$$\text{ii. } g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_3$$

$$\text{iii. } \nabla g(x_1, x_2) = - \frac{1}{\partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))} (\partial_1 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)), \partial_2 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))) \quad \forall x \in B$$



$$F(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_3 F(\bar{x}) > 0$$

per il Teorema della permanenza

del segno $\exists r > 0$ Tale che

$$\partial_3 F(x) > 0 \quad \forall x \in B(\bar{x}) \cap \mathbb{R}^3$$

$\exists b > 0$ Tale che

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 - b) < 0 = F(\bar{x}) < F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 + b)$$

per la permanenza del segno:

$$\exists \delta > 0: F(x, \bar{x}_3 - b) < 0 \quad \forall x \in B((\bar{x}_1, \bar{x}_2), \delta)$$

$$\exists \delta > 0: F(x, \bar{x}_3 + b) > 0$$

$\forall x \in B((\bar{x}_1, \bar{x}_2), \delta)$ considero $\phi(t) = (x_1, x_2, t)$, $t \in [\bar{x}_3 - b, \bar{x}_3 + b]$

osservo che $F(\phi(\bar{x}_3 - b)) < 0$, $F(\phi(\bar{x}_3 + b)) > 0$ e F è strettamente monotona

$$\Rightarrow \exists! \bar{t} \text{ Tale che } F(\phi(\bar{t})) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{t} := g(x_1, x_2) \Rightarrow (g, B) \text{ funzione}$$

considero $x_1, y \in B = B((\bar{x}_1, \bar{x}_2), a)$ $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$

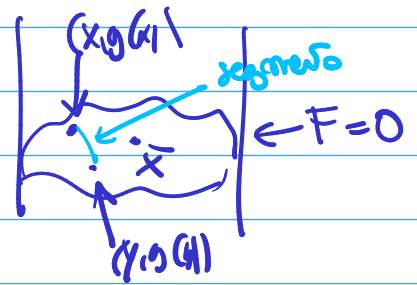
$$C = B((\bar{x}_1, \bar{x}_1), a) \times (\bar{x}_3 - b, \bar{x}_3 + b)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \in (y_1, y_2, g(y_1, y_2)) \in \{x \in C \subseteq \mathbb{R}^3 : F(x) = 0\}$$

$$F(x, g(x)) - F(y, g(y)) = 0$$

$$\nabla F(p) \cdot (x, g(x)) - (y, g(y))$$

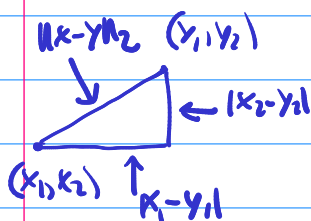
$p = (p_1, p_2, p_3) \in$ segmento di estremi $(x, g(x))$ e $(y, g(y))$



$$\Rightarrow 0 = \partial_1 F(p)(x_1 - y_1) + \partial_2 F(p)(x_2 - y_2) + \partial_3 F(p) \cdot (g(x) - g(y))$$

$$g(x_1, x_2) - g(y_1, y_2) = - \frac{\partial_1 F(p)(x_1 - y_1) + \partial_2 F(p)(x_2 - y_2)}{\partial_3 F(p)} \leftarrow \text{N.B. } \partial_3 F > 0 \text{ in } C$$

$$|g(x_1, x_2) - g(y_1, y_2)| \leq \frac{|\partial_1 F(p)| \cdot |x_1 - y_1| + |\partial_2 F(p)| \cdot |x_2 - y_2|}{\partial_3 F(p)}$$



$$\leq \left[\frac{\max (|\partial_1 F| + |\partial_2 F|)}{\min (\partial_3 F)} \right] (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) \leq 2M \|x - y\|_2$$

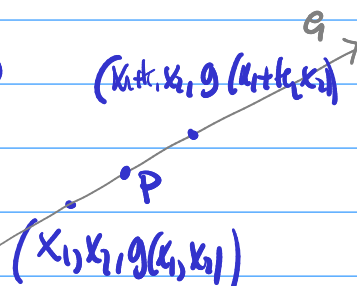
$$\Rightarrow g \text{ è Lipschitz} \Rightarrow g \in C^0(B, (\bar{x}_3 - b, \bar{x}_3 + b)) !$$

considero $(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \in (x_1 + t, x_2, g(x_1 + t, x_2))$

$$F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) - F(x_1 + t, x_2, g(x_1 + t, x_2)) = 0$$

$$\nabla F(p) \cdot (t, 0, g(x_1 + t, x_2) - g(x_1, x_2))$$

$$p = (x_1 + \xi_1, x_2, \eta g(x_1, x_2) + (1 - \eta) g(x_1 + t, x_2))$$

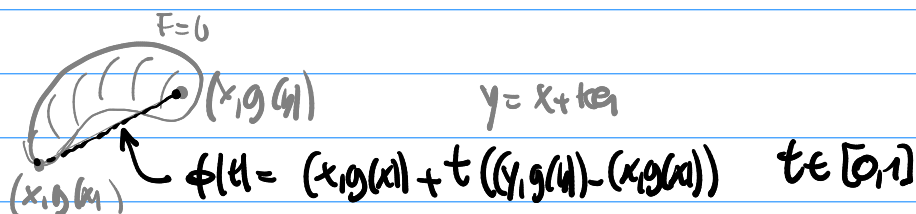


$$\Rightarrow \frac{g(x_1 + t_1 x_2) - g(x_1, x_2)}{t_1} = - \frac{\partial_1 F(p)}{\partial_3 F(p)} \xrightarrow{t_1 \rightarrow 0} - \frac{\partial_1 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}$$

$$\Rightarrow \partial_1 g(x) = - \frac{\partial_1 F(x, g(x))}{\partial_3 F(x, g(x))} \quad \partial_1 F(x_1 + \xi_1 x_2, g(x_1, x_2) + \eta g(x_1 + t_1 x_2))$$

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x) \in C^0(C) \Rightarrow g \in C^1$$

$F=0$



$y = x + t e_1$

$\phi(t) = (x, g(x)) + t((y, g(y)) - (x, g(x))) \quad t \in [0, 1]$

$$0 = F(x, g(x)) - F(y, g(y)) = F(\phi(0)) - F(\phi(1)) = \left. \frac{d}{dt} F(\phi(t)) \right|_{t=\xi} \cdot (0-1)$$

$$\Rightarrow 0 = \left. \frac{d}{dt} F(\phi(t)) \right|_{t=\xi} = \nabla F(\phi(\xi)) \cdot \phi'(\xi) = \nabla F(p) \cdot ((y, g(y)) - (x, g(x)))$$

OSS.



p punto critico di H vincolato su $V = \{F(x) = 0\}$

$H: B(p, r) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

suppongo che $\partial_3 F(p) \neq 0$ ($F(p) = 0, p \in V$)

$\leftarrow B((p_1, p_2), \rho)$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$

" $V = \{F(x) = 0\} = \{x_3 = g(x_1, x_2)\}$ " vicino al punto p

$\phi(t) = (p_1, p_2) + w t$ con $t \in [1, 1]$ e $w \neq 0$

$$\textcircled{1} \quad F(\phi(t), g(\phi(t))) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [F(\phi(t), g(\phi(t)))] \Big|_{t=0} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad H(\phi(t), g(\phi(t))) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} [H(\phi(t), g(\phi(t)))] \Big|_{t=0} = 0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \nabla F(p) \cdot (\underbrace{\phi'(0)}_w, \underbrace{\nabla g(p_1, p_2)}_w \cdot \underbrace{\phi'(0)}_w) = 0$$

$$\forall w \in \mathbb{R}^2, w \neq 0$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \nabla H(p) \cdot (\phi'(0), \nabla g(p_1, p_2) \phi'(0)) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla H(p) = c \nabla F(p) \Rightarrow L(x, c) = H(x) - cF(x)$$

$$\# : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \#F = \nabla F, \quad t=0 \Rightarrow (\phi(0), g(\phi(0))) = (p_1, p_2, g(p_1, p_2)) \\ = (p_1, p_2, p_3 F(p))$$

$$\phi : [1, 1] \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (p_1, p_2) + t w \Rightarrow \phi(t) = w \Rightarrow \phi'(0) = w \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{d}{dt} (\phi(t), g(\phi(t))) = \begin{pmatrix} \underbrace{\phi'_1(t)}_{\tilde{w}_1}, \underbrace{\phi'_2(t)}_{\tilde{w}_2}, \underbrace{\nabla g(\phi(t)) \cdot \phi'(t)}_w \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & & (\phi(t), g(\phi(t))) \end{matrix} \quad \downarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial_1 F(p)}{\partial_3 F(p)}, \frac{\partial_2 F(p)}{\partial_3 F(p)} \end{pmatrix}$$

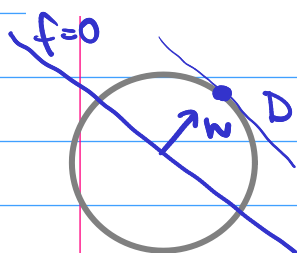
$$\nabla F(p) \cdot (\underbrace{\phi'(0)}_w, \underbrace{\nabla g(p_1, p_2)}_w \cdot \underbrace{\phi'(0)}_w) = \nabla F(p) \cdot (w, \nabla g(p) \cdot w) = 0$$

$$\nabla H(p) \cdot (\phi'(0), \nabla g(p_1, p_2) \phi'(0)) = \nabla H(p) \cdot (w, \nabla g(p) \cdot w) = 0$$

$$x \quad w = e_1 \Rightarrow (w, \nabla g(p) \cdot w) = (1, 0, \partial_1 g(p))$$

$$w = e_2 \Rightarrow (w, \nabla g(p) \cdot w) = (0, 1, \partial_2 g(p))$$

ESERCIZIO 4. i. Si calcoli il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, con $(a, b) \neq (0, 0)$, per $(x_1, x_2) \in D = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
 ii. Si generalizzi il punto precedente considerando la funzione $f(x) = w \cdot x$, con $w \neq 0$, e $x \in D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$.



$$f(x) = (a, b) \cdot x \quad \nabla f(x) = (a, b) \neq (0, 0)$$

[ricordiamo che D è compatto, $f \in C^\infty(D)$, quindi Weierstrass $\Rightarrow \Rightarrow \max(f), \min(f)$]

$$L(x, c) = f(x) - c(x_1^2 + x_2^2 - 1) = ax_1 + bx_2 - c(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, c) = a - 2cx_1 = 0 & x_1 = \frac{a}{2c} \\ \partial_2 L(x, c) = b - 2cx_2 = 0 & x_2 = \frac{b}{2c} \\ \partial_3 L(x, c) = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{a^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2} = 0 \Rightarrow 4c^2 = a^2 + b^2, \quad 2c = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x_n = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) : x_m = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$f(x_n) = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad f(x_m) = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$ii. \quad L(x, c) = w \cdot x - c(x \cdot x - 1)$$

$$\begin{cases} \partial_i L = w_i - 2cx_i = 0 \rightarrow x = \frac{w}{2c} \\ \partial_{n+1} L = 1 - \|x\|^2 = 0 \end{cases}$$

$$1 - \frac{\|w\|^2}{4c^2} = 0 \Rightarrow 2c = \pm \|w\|$$

$$x_n = \frac{w}{\|w\|}, \quad x_m = -\frac{w}{\|w\|}$$

ESERCIZIO 6. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni

$$f(x_1, x_2) = x_1 |x_1| x_2 \quad g(x_1, x_2) = x_1^4 - 4x_1^2 x_2 + x_2^2 \quad h(x_1, x_2) = x_1^2 \ln(1 + x_2) + x_1^2 x_2^2$$

$$f(x) = x_1 |x_1| \cdot x_2$$

$$f(k, 1) = k^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty, k \in \mathbb{N}$$

$$f(-k, 1) = -k^2 \xrightarrow{} -\infty$$

$$\partial_1 f(x) = 2|x_1| x_2$$

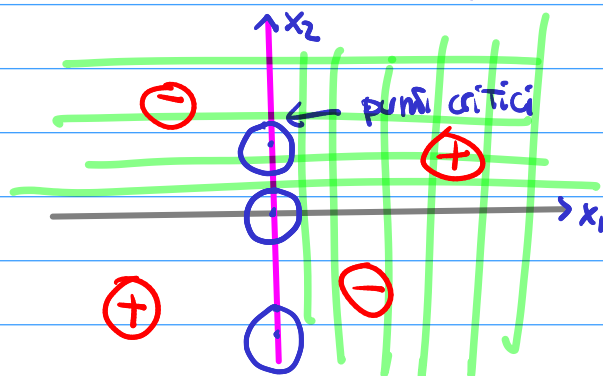
$$\partial_2 f(x) = x_1 |x_1|$$

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2 x_2 & x_1 \geq 0 \\ -x_1^2 x_2 & x_1 < 0 \end{cases}$$

$$\partial_1 f(x) = \begin{cases} 2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 \end{cases}$$

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{se} \quad x = (0, \delta), \delta \in \mathbb{R}$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2\delta \partial_1(x_1) x_2 & 2|x_1| \\ 2|x_1| & 0 \end{pmatrix} \quad x \neq (0, x_2)$$



$$\rightarrow f(x) \geq f(\text{pto critico}) = 0 = f(0, \delta)$$

$$x_1 |x_1| \cdot x_2 \geq 0$$

$$||| \equiv$$

$$\Rightarrow (0, \delta) \text{ è una sella } \forall \delta \in \mathbb{R}_-$$

$$g(x) = x_1^4 - 4x_1^2 x_2 + x_2^2$$

$$\nabla g(x) = (4x_1^3 - 8x_1 x_2, 2x_2 - 4x_1^2) \stackrel{?}{=} (0, 0)$$

$$\begin{cases} 4x_1(x_1^2 - 2x_2) = 0 \\ 2x_2 - 4x_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow 0(0, 0)$$

$$x_1^2 - 2x_2 = 0 \rightarrow -3x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 8x_2 & -8x_1 \\ -8x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ semidefinita positiva}$$

$$g(x) = x_1^2 - 2x_1^2x_2 + x_2^2 - 2x_1^2x_2 = (x_1^2 - x_2)^2 - 2x_1^2x_2 \geq 0 = g(0)$$

$$g(t, t^2) = t^2 \geq 0 \quad g(t, t^2) = (t^2 - t^2)^2 - 2t^4 = -2t^4 \leq 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ è un punto di sella.

notiamo che $\begin{matrix} g(t, t) \rightarrow +\infty \\ g(t, t^2) \rightarrow -\infty \end{matrix}$ per $t \rightarrow \pm\infty$

$$\Rightarrow +\infty = \sup(g) \quad -\infty = \inf(g)$$

ESERCIZIO 6. Siano $r = \{x_1 = x_2, x_3 = 0\}$ e $s = \{x_1 + x_2 = 1, x_3 = 1\}$ due rette di $\mathbb{R}^3$ prive di punti comuni:

i. si determini $p \in r$ e $q \in s$ tali che $\|p - q\|_2 \leq \|x - y\|$ per ogni $x \in r$ e $y \in s$,

ii. si verifichi che la retta per p e q è ortogonale alle due rette r ed s .

$$p = (p_1, p_2, p_3) \quad q = (q_1, q_2, q_3)$$

$$p = (p_1, p_1, 0) \in r \quad p_1 \in \mathbb{R}$$

$$q = (q_1, 1 - q_1, 1) \in s \quad q_1 \in \mathbb{R}$$

$$f(p, q) = f(p_1, q_1) = \|p - q\|_2^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_1 - (1 - q_1))^2 + 1$$

$$= p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1 + p_1^2 + (1 - q_1)^2 - 2p_1(1 - q_1) + 1$$

$$= 2p_1^2 + 2q_1^2 - 2p_1q_1 - 2q_1 - 2p_1 + 2p_1q_1 + 2$$

$$\Rightarrow f(p_1, q_1) = 2p_1^2 + 2q_1^2 - 2q_1 - 2p_1 + 2 = p_1^2 + (p_1 - 1)^2 + q_1^2 + (q_1 - 1)^2 \geq p_1^2 + q_1^2$$

$$\partial_1 f(p_1, q_1) = 4p_1 - 2 \quad \partial_2 f(p_1, q_1) = 4q_1 - 2$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ punto di minimo assoluto!}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in r \\ q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \in s \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punti che realizzano il} \\ \text{minimo della distanza} \\ \text{tra le due rette.} \end{array}$$

Nota che $\vec{pq} = e_3$ e che $r \subseteq \{x_3 = 0\}$ e $s \subseteq \{x_3 = 1\}$

$$\Rightarrow \vec{pq} \perp r \text{ e } \vec{pq} \perp s.$$

ESERCIZIO 12. Determinare (se esiste) il massimo assoluto della funzione $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^3$ nella regione dello spazio $D = \{x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 \leq 6\}$.

Osservo che D è compatto perché:

$$D = h^{-1}([0, 6]) \quad (\text{con } h(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6) \text{ è chiuso}$$

$$D \text{ è limitato: } x_1^2, 4x_2^2, 2x_3^6 \leq x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 \leq 6$$

f è continua (polinomio) $\Rightarrow \exists \max(f)$ per il teorema di Weierstrass.

$$\text{punti critici interni a } D: \nabla f(x) = (x_2 x_3^3, x_1 x_3^3, 3x_1 x_2 x_3^2) \stackrel{?}{=} (0, 0, 0)$$

$(x_1, x_2, 0)$ sono punti critici

$(0, 0, x_3)$ sono punti critici

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_3^2 & 3x_2 x_3^2 \\ x_3^2 & 0 & 3x_1 x_3^2 \\ 3x_1 x_3^2 & 3x_2 x_3^2 & 6x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x_1, x_2, 0) = O_3$$

↑
sede a curva
di x_3^3

$$(f(x) = x_1 x_2 x_3^3)$$

$$Hf(0, 0, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & x_3^2 & 0 \\ x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

blocco con determinante negativo
↓
 $4x_3^4 < 0$ ($x_3 \neq 0$)
 $x_3 = 0$

$\Rightarrow$ i punti critici $(0, 0, x_3)$ (con $x_3 \neq 0$) sono sede.

$$L(x, c) = x_1 x_2 x_3^3 - c(x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 - 6)$$

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, c) = x_2 x_3^3 - c \cdot 2x_1 = 0 \\ \partial_2 L(x, c) = x_1 x_3^3 - c \cdot 8x_2 = 0 \\ \partial_3 L(x, c) = 3x_1 x_2 x_3^2 - c \cdot 12x_3^5 = 0 & x_3^2(3x_1 x_2 - 12c x_3^3) = 0 \\ \partial_4 L(x, c) = 6 - x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^6 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 x_2 x_3^3 = 2c x_1^2$$

$$x_1^2 = \frac{1}{2c} x_1 x_2 x_3^3$$

$$x_1 x_2 x_3^3 = 8c x_2^2$$

$$4x_2^2 = \frac{1}{2c} x_1 x_2 x_3^3$$

$$x_1 x_2 x_3^3 = 4c x_3^6$$

$$2x_3^6 = \frac{1}{2c} x_1 x_2 x_3^3$$

$$\frac{3}{2c} x_1 x_2 x_3^3 = 6$$

$$x_1 x_2 x_3^3 = 4c \neq 0$$

$$\Rightarrow 4c = 2c \underset{2}{x_1^2} = 8c \underset{\frac{1}{2}}{x_2^2} = 4c \underset{1}{x_3^6}$$

$$x_1 = \pm \sqrt{2}$$

$$x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_3 = \pm 1$$

13/11/2025

oss. $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2

2. $p \in A$ tale che $\nabla F(p) = 0$, $H_F(p)$ definita positiva

$\Rightarrow p$ punto di minimo locale

① se A è compatto $\Rightarrow$ Teorema Weierstrass implica che $f(p) = \min_A(f)$ (p pto minimo assoluto)

② se $\lim_{x \rightarrow \partial A} f(x) \geq f(p) + \varepsilon$ (per $\varepsilon > 0$) allora

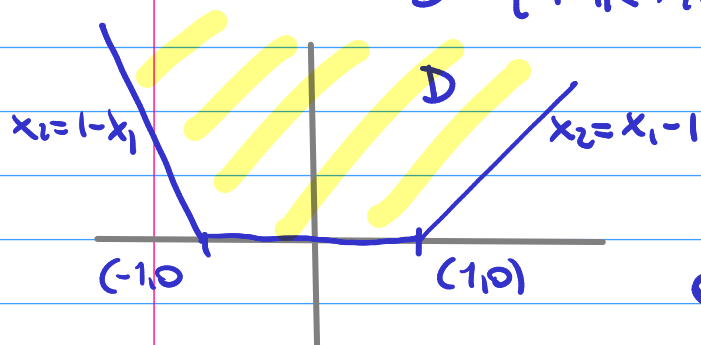
$f(p) = \min_f(f)$ (p pto minimo assoluto)



ES.14/SCU.5

$$f(x) = (x_1^2 - (x_2 + 1)^2) x_2 e^{-x_2}$$

$$D = \{ |x_1| \leq x_2 + 1, x_2 \geq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$



$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \forall x \in \partial D \\ f(x) &< 0 \quad \forall x \in \text{int}(D) \end{aligned}$$

$$0 = \max_D f \quad f(x) = 0 \text{ on } x \in \partial D$$

$A(0, 1 + \sqrt{2})$ punto critico, minimo locale

$$f(A) = -2(1 + \sqrt{2})e^{-(1 + \sqrt{2})}$$

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} f(x) = ? \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} |x_1| \rightarrow +\infty \\ |x_2| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\text{e} \quad x_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \leftarrow \text{causa di } e^{-x_2}$$

$$\text{e} \quad |x_1| \rightarrow +\infty \Rightarrow x_2 \geq |x_1| + 1 \Rightarrow x_2 \rightarrow +\infty$$

$$\text{allora } \lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \geq M$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq f(x) \leq 0 \quad \forall x \in D \cap B^c(0, M)$$

$\Rightarrow f(p)$ è minimo assoluto perché

in $\overline{D \cap B(0, M)}$ $\exists$ minimo assoluto per Weierstrass
 p è minimo locale e $p \in \overline{D \cap B(0, M)}$
 e fuori di $\overline{D \cap B(0, M)}$ $f(x) \geq -\varepsilon > f(p)$

$\Rightarrow p$ è punto di minimo assoluto in D .

DEF.

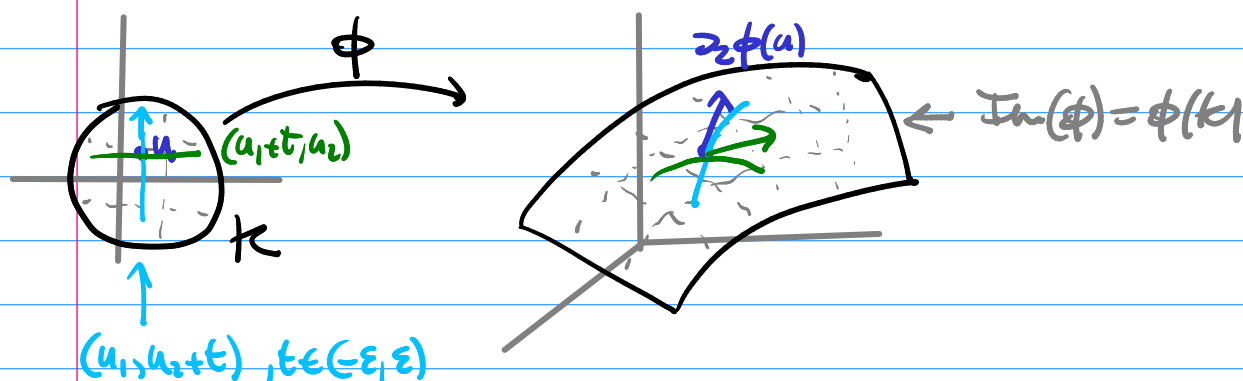
Una superficie regolare è una coppia (ϕ, K) dove:

- $K \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusa di un aperto connesso

- $\phi: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1

$\phi: \text{Int}(K) \rightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva

$\partial_1 \phi(u)$ e $\partial_2 \phi(u)$ sono linearmente indipendenti $\forall u \in K$



ESEMPIO NEGATIVO

$$\phi(u) = u_1 u_2 (1, 1, 1) \quad \partial_1 \phi = (u_2, u_2, u_2)$$

non sono linearmente
indipendenti!

$$\partial_2 \phi = (u_1, u_1, u_1)$$

ESEMPIO

$f: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

Il grafico di una
funzione C^1 è una
superficie regolare

$$\phi(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$$

$$\partial_1 \phi = (1, 0, \partial_1 f(u)) \quad , \quad \partial_2 \phi = (0, 1, \partial_2 f(u))$$

ESEMPIO

$$\phi(u) = (\cos(u_1) \cos(u_2), \cos(u_1) \sin(u_2), \sin(u_1))$$

$$(u_1, u_2) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi] = K$$

$$\phi(u) = \phi(w) \Rightarrow \begin{cases} \cos(u_1) \cos(u_2) = \cos(w_1) \cos(w_2) \\ \cos(u_1) \sin(u_2) = \cos(w_1) \sin(w_2) \end{cases} \rightarrow u_2 = w_2$$
$$\sin(u_1) = \sin(w_1) \rightarrow u_1 = w_1$$

$$\forall u, w \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi] = \text{Int}(K)!$$

$$\partial_1 \phi(u) = (-\sin(u_1) \cos(u_2), -\sin(u_1) \sin(u_2), \cos(u_1))$$

$$\partial_2 \phi(u) = (-\cos(u_1) \sin(u_2), \cos(u_1) \cos(u_2), 0)$$

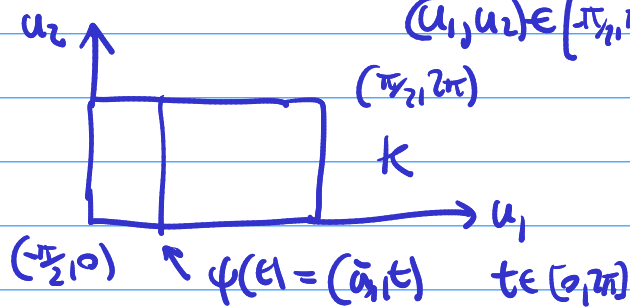
$$\begin{aligned} (\partial_1 \phi \wedge \partial_2 \phi) &= (-\cos^2(u_1) \cos(u_2), -\cos^2(u_1) \sin(u_2), -\sin(u_1) \cos(u_1)) \\ &= -\cos(u_1) (\cos(u_1) \cos(u_2), \cos(u_1) \sin(u_2), \sin(u_1)) \neq 0 \\ &\quad \forall u \in \mathcal{U}(\phi) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\phi, \kappa)$ è una superficie regolare

ESEMPIO

$$\phi(u) = (\cos(u_1) \cos(u_2), \cos(u_1) \sin(u_2), \sin(u_1))$$

$$(u_1, u_2) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] = \kappa$$



$$\gamma(t) = \phi(\psi(t)) = (\cos(\bar{u}_1) \cos(t), \cos(\bar{u}_1) \sin(t), \sin(\bar{u}_1)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (-\cos(\bar{u}_1) \sin(t), \cos(\bar{u}_1) \cos(t), 0)$$

$$L(\text{parallelo } \bar{u}) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(\bar{u}_1)} dt = |\cos(\bar{u}_1)| \cdot 2\pi$$

PROBLEMA

dato una superficie (ϕ, κ) regolare e una curva regolare $\psi: [a, b] \rightarrow \kappa$ si calcoli

$L(\gamma)$ dove γ è la curva $\phi(\psi): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \phi(\psi(t)) \right\|_2 dt$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \phi(\psi(t)) &= J\phi(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_1(\psi(t)) & \partial_2 \phi_1(\psi(t)) \\ \partial_1 \phi_2(\psi(t)) & \partial_2 \phi_2(\psi(t)) \\ \partial_1 \phi_3(\psi(t)) & \partial_2 \phi_3(\psi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'_1(t) \\ \psi'_2(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$