Corso di laurea in INGEGNERIA GESTIONALE

ANALISI MATEMATICA a.a 2017-2018 Foglio 7

1) Calcolare , se esiste il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni

$$a_n = \sqrt{n}\left(\sin(\sqrt{e^n - 1})\right)(1 - e^{1/n}) \qquad b_n = \left(\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}\right)\log n$$

$$c_n = (n^2+n-1)\left(1 - \cos\left(\sqrt{2}/n\right)\right) - d_n = n\sin(n!)(1 - \cos 1/2n)$$

2) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\pi n^2 + n}{2n^2+1}\right)\left(\exp\left(\frac{n}{2n^2+1}\right) - 1\right)n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(1+1/n)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n^2) - 1 + \cos(1/n)}{e^{1/n} - 1 - \log(1+1/n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2+1}$$

Studiare la convergenza delle seguenti serie al variare del prametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{n^\alpha} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos(1/n^\alpha)$$

Determinare per quali x converge semplicemente e per quali x converge assolutamente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2-1)^n}{n}$$

3) Studiare al variare di α e β numeri reali positivi il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} (\cos^2 x^\alpha)^{2x^{-\beta}}$$

Sia $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x\log x} = l \in R,\ l \neq 0.$ Calcolare $\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)}$

4)Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che sia prolungabile per continuità in 0 la funzione f; provare che g è prolungabile per continuità in 0. La funzione prolungata è derivabile?

$$f(x) = \begin{cases} (1+\sin^2 x)^{1/\tan x} & -\pi/2 < x < 0 \\ x^\alpha \log(1+x^2) & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x < 0 \\ 1/x - 1/\arctan x & x > 0 \end{cases}$$

5) Provare che l'equazione $x + arctan x = 1$ ha un'unica radice reale.

6) Sia $f \in C^2([0,1])$ tale che $f''(x) - 2\cos\left(f'(x)\right) = 1$ $\forall x \in [0.1]$. Dimostrare che f non può avere un punto di massimo relativo in (0,1).

7) Siano $f(x) = 2|x| + \arctan \frac{1-e^x}{2-e^x}$ e $g(x) = \log|e^{2x} + 6e^x - 16|$

studiare i) dominio e asintoti
ii) derivabilità, monotonia, estremi relativi ed assoluti.

iii) concavità, convessità e flessi.
iv) disegnare il grafico e trovare l'immagine

8) Determinare al variare dei parametri reali a e b l'ordine di infinitesimo per x→ 0 della funzione $f(x) = a\sin x - 2b\log(1+x) + 2/3(a-2)x^3$

9) Dimostrare la seguente disuguaglianza $\left|\exp\left(-\sqrt{1+4x^2}\right) - \exp\left(.\sqrt{1+4y^2}\right)\right| \leq 2|x-y|$ $\forall x,y \in \mathbf{R}$

10) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^3\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2[\log(1+x)-x]}{x(e^x-1)-2+2\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sin 2x+2\beta}{x^\beta(1-\cos x)}$$ al variare di β

11) Calcolare $f(1/10)$ con un errore inferiore a 10^{-2} dove $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$