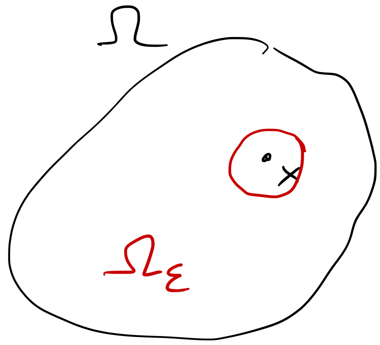
<u>Obiettivo</u>: dare una formula di rappresentazione per la soluzione (unica) del pb.

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$



$f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato con frontiera di classe C^1.

Ricordiamo una conseguenza del teorema della divergenza

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, v \, dy = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v \, d\sigma(y)$$

$$\forall u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

Fissiamo $x \in \Omega$ e consideriamo la funzione (di y)

$$v(y) = \Phi(x-y) = \Phi(y-x)$$

solu zione fondamentale dell'eq^{ne} di Laplace

Vorrei mettere questa $v(y)$ nella formula precedente ma non posso perchè Φ è singolare per $y = x$.

Quindi "isoliamo la singolarità". Per $\varepsilon > 0$ (piccolo)

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$$

Possiamo scrivere la formula di prima in Ω_ε con

$$v(y) = \Phi(y-x).$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \overbrace{(-\Delta u(y))}^{f(y)}\, \phi(y-x)\, dy = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla_y \phi(y-x)\, dy - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \phi(y-x)\, d\sigma(y)$$

Se u è la sol^{ne} $\overbrace{\text{del pb } (P)}^{\text{di classe } C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})}$, $-\Delta u = f$.

Ora scambio i ruoli di ϕ e di u.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{\cancel{(-\Delta_y \phi(y-x))}}_{= 0}\, u(y) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_y \phi(y-x) \cdot \nabla u\, dy - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \phi(y-x)\, u(y)\, d\sigma(y)$$

sottraggo le due uguaglianze.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\, \phi(y-x)\, dy = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \phi(y-x)\, u(y)\, d\sigma(y) - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \phi(y-x)\, d\sigma(y)$$

Adesso facciamo $\varepsilon \downarrow 0$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\, \phi(y-x)\, dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\Omega} f(y)\, \phi(y-x)\, dy$$

Infatti

$$\chi_{B^c_\varepsilon(x)} = \begin{cases} 0 & y \in B_\varepsilon(x) \\ 1 & y \notin B_\varepsilon(x) \end{cases}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\,\Phi(y-x)\,dy = \int_\Omega \underbrace{f(y)\,\Phi(y-x)\,\chi_{B^c_\varepsilon(x)}\,dy}_{\downarrow\ \varepsilon\to 0 \quad f(y)\,\Phi(y-x)\,dy}$$

$$\left| f(y)\,\Phi(y-x)\,\chi_\varepsilon \right| \le \max|f|\ \Phi(y-x) \quad \text{sommabile}$$

$\Rightarrow$ (thm conv. dominata) passo al limite.

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\Phi(y-x)\,d\sigma(y) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\Phi(y-x)\,d\sigma(y) + $$

$$\underbrace{-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\Phi(y-x)\,d\sigma(y)}_{= I_\varepsilon \ \xrightarrow{\varepsilon\to 0}\ 0}$$

$$|I_\varepsilon| \le \int_{\partial B_\varepsilon} \underbrace{|\nabla u|}_{\le C \text{ in un intorno di } x} \Phi(y-x)\,d\sigma(y) \le C\,\varepsilon^{N-1}\,\Phi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)\, u(y)\, d\sigma(y) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)\, \underset{\substack{g(y)\\ \shortparallel}}{u(y)}\, d\sigma(y) + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)\, u(y)\, d\sigma(y)}_{\downarrow\ \varepsilon\to 0 \atop u(x)}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x) = -\phi'(\varepsilon) = \frac{1}{\omega_N N \varepsilon^{N-1}}$$

$$\phi(y) = \frac{1}{\omega_N N(N-2)|y|^{N-2}} \qquad N \geq 3$$

Pongo con abuso di notazione

$$\phi(r) = \frac{1}{\omega_N N(N-2)\, r^{N-2}}$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y-x)\, u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, d\sigma(y) =$$

$$= \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, d\sigma(y) \longrightarrow u(x)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f(y)\,\phi(y-x)\,dy = \boxed{\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_y}\phi(y-x)\,u(y)\,d\sigma(y)} - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\phi(y-x)\,d\sigma(y)$$

$$\int_{\Omega} \text{— —}$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y-x)\,g(y)\,d\sigma(y) + u(x)$$

non la conosco

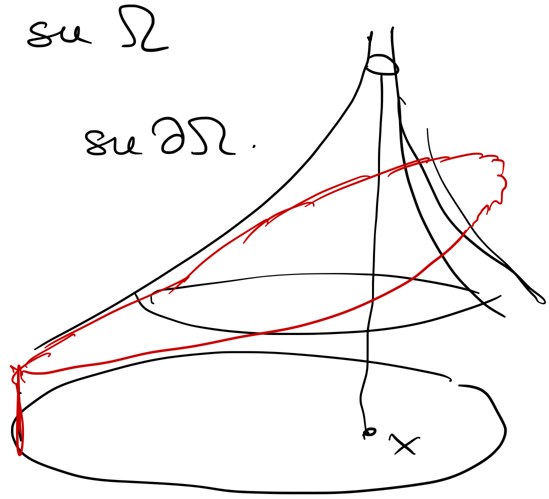
$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\phi(y-x)\,d\sigma$$

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)\,\phi(y-x)\,dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\phi(y-x)\,d\sigma(y) + $$

$$-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \nu_y}(y-x)\,g(y)\,d\sigma(y)$$

Idea: fisso $x \in \Omega$ e consideriamo il problema

$$(P_x) \quad \begin{cases} \Delta \varphi^x(y) = 0 & \text{su } \Omega \\ \varphi^x(y) = \Phi(y-x) & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$



Supponiamo che esista $\varphi^x(y)$ di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sol^{ne} di (P_x)

Moltiplico l'eq^{ne} per $u(y)$ e integro su Ω.

$$0 = \int_\Omega \underbrace{\left(-\Delta_y \varphi^x(y)\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} u(y)\,dy = \int_\Omega \nabla_y \varphi^x(y) \cdot \nabla u \, dy +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu} \underbrace{u(y)}_{\overset{\shortparallel}{g(y)}} \, d\sigma(y) = \left[\text{integro ancora per parti}\right]$$

$$= \int_\Omega \varphi^x(y) \underbrace{(-\Delta u)}_{\overset{\shortparallel}{f(y)}} \, dy + \int_{\partial\Omega} \overset{\Phi(y-x)}{\overbrace{\varphi^x(y)}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma(y) +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu} g(y) \, d\sigma(y)$$

$$0 = \int_{\Omega} \varphi^x(y)\, f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma(y) +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi^x}{\partial \nu}\, g(y)\, d\sigma(y)$$

Riscrivo la formula di prima.

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)\, \Phi(y-x)\, dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \Phi(y-x)\, d\sigma(y) +$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(y-x)\, g(y)\, d\sigma(y)$$

Le sottraggo:

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y) \left[\Phi(y-x) - \varphi^x(y) \right] dy +$$

$$- \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left[\Phi(y-x) - \varphi^x(y) \right] d\sigma(y)$$

Pongo

dipende solo da Ω

$$\Phi(y-x) - \varphi^x(y) = G(x,y)$$

funzione di Green per il dominio Ω.

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

→ Formula di rappresentazione mediante funzione di Green.

TEOREMA Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato regolare.

Siano $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$.

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sia soluzione di

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega . \end{cases}$$

Allora $u(x)$ è data da

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega f(y)\, G(x,y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, d\sigma(y)}$$

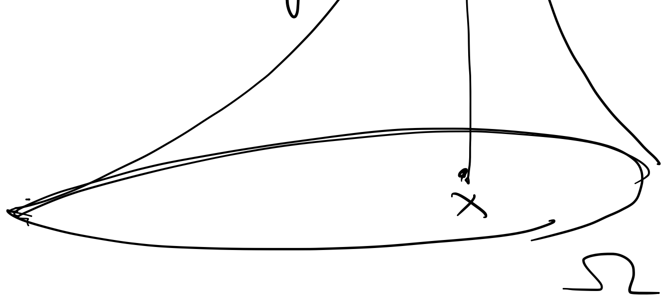
dove $G(x,y)$ è la funzione di Green relativa ad Ω,

cioè $$G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi^x(y)$$

e $\varphi^x(y)$ è sol^{ne} del problema (P_x)

OSS Formalmente, la $G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi^x(y)$ come funzione della y verifica il seguente pb.

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) & \Omega \\ G(x,y) = 0 & y \in \partial\Omega \end{cases}$$



Due domande:

1) Esiste una funzione di Green per ogni dominio Ω regolare?
In altre parole, il pb

$$(P_x) \qquad \begin{cases} -\Delta \varphi^x(y) = 0 & y \in \Omega \\ \varphi^x(y) = \Phi(y-x) & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

ammette una sol^{ne} $\varphi^x(y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$?

La risposta è: Sì se Ω è regolare.

2) Ci sono domini per cui $G(x,y)$ è esplicita?

Sì, per esempio $\Omega = B_R$ (una palla)

$\Omega =$ semispazio (ma attenzione, non è limitato ma si può generalizzare quanto fatto).

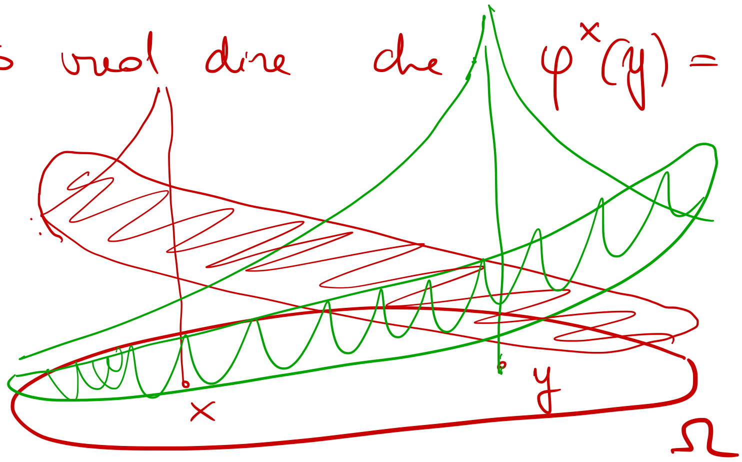
TEOREMA (Simmetria della funzione di Green).

Sia $G(x,y)$ la funzione di Green relativa ad Ω aperto limitato regolare. Allora

$$G(x,y) = G(y,x) \qquad \forall\, x,y \in \Omega .$$

$$\Phi(x-y) - \varphi^x(y) \qquad\qquad \Phi(y-x) - \varphi^y(x)$$

Questo vuol dire che $\varphi^x(y) = \varphi^y(x)$



DIM Fissiamo x, y come sopra.

Poniamo

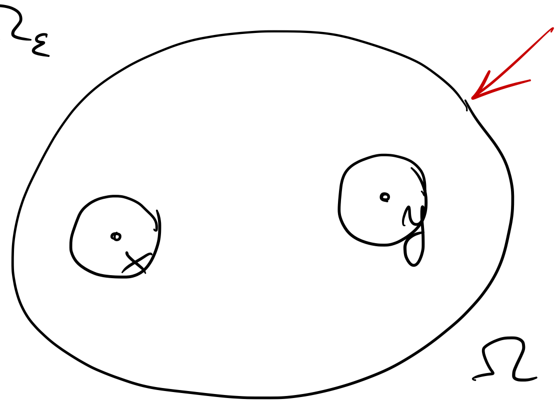
$$V(z) = G(x,z) \qquad\qquad W(z) = G(y,z).$$

Voglio provare che $\quad V(y) = W(x)$

Applico la formula di integraz. per parti su

$$\Omega \setminus \left(\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)} \right) =: \Omega_\varepsilon$$

(ε piccolo).



$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{(-\Delta v)}_{=0} w \, dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v \cdot \nabla w \, dz - \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \nu} w \, d\sigma(z)$$

$$0 = - - - = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla w \cdot \nabla v \, dz - \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \nu} v \, d\sigma(z)$$

---

sottraggo

$$\Longrightarrow \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \nu} v \, d\sigma(z) = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \nu} w \, d\sigma(z)$$

$$\underbrace{\boxed{\int_{\partial \Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} \underbrace{v}_{=0 \text{ su } \partial\Omega} \, d\sigma(z)}}_{=0} + \overbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v \, d\sigma(z)}^{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0} + \overbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v \, d\sigma(z)}^{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} v(y)} =$$

$$= \underbrace{\int_{\partial \Omega}}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)}}_{\to w(x)} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(y)}}_{\to 0}$$

v e w scambiati

$$\Longrightarrow \quad v(y) = w(x)$$