ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 04 - 20251024

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Date le seguenti leggi*

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \qquad f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3$$

i. si spieghi dove ogni espressione ha senso e dove è differenziabile,
ii. si calcoli il gradiente e la matrice hessiana della funzione,
iii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1,1,f_i(1,1,1))$.

ESERCIZIO 2. *Data la funzione*

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \qquad \textit{con } x \in \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi dove e perché la funzione è differenziabile,
ii. si calcoli il gradiente e la matrice hessiana della funzione,
iii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1,1,g(1,1,1))$, *la giacitura del piano tangente e un vettore normale al grafico.*

ESERCIZIO 3. *Usare la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare le derivate parziali di* $F(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ *nei seguenti casi :*

$$f(x,y) = x + xy + y^2 \qquad x(u,v) = u+v \qquad y(u,v) = uv$$
$$f(x,y) = y \qquad x(u,v) = ue^y \qquad y(u,v) = 1 + ue^{-v}$$

ESERCIZIO 4. *Date* $u,w \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *e* $F,H \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, *si verifichino le seguenti identità*

$$\nabla\cdot(uH)(x) = \nabla u(x)\cdot H(x) + u(x)(\nabla\cdot H(x))$$
$$\nabla\wedge(uH)(x) = \nabla u(x)\wedge H(x) + u(x)(\nabla\wedge H(x))$$
$$\nabla\cdot(F\wedge H)(x) = \nabla\wedge F(x)\cdot H(x) - F(x)\cdot\nabla\wedge H(x)$$
$$\nabla\cdot\nabla w(x) = \Delta w(x)$$
$$\nabla\wedge\nabla w(x) = 0$$
$$\nabla\cdot\nabla\wedge H(x) = 0$$
$$\nabla\wedge\nabla\wedge H(x) = \nabla[\nabla\cdot H(x)] - \Delta H(x)$$

prestando attenzione alle dimensioni degli oggetti coinvolti. Poi si riscrivano le identità usando le notazioni div$[F] := \nabla\cdot F$ *e rot*$[F] := \nabla\wedge F$.

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Date le seguenti leggi*

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \qquad f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3$$

i. si spieghi dove ogni espressione ha senso e dove è differenziabile,
ii. si calcoli il gradiente e la matrice hessiana della funzione,
iii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1,1,f_i(1,1))$.

DISCUSSIONE. i. Le leggi f_1 e f_2 hanno senso in tutto $\mathbb{R}^3$ (ovvero il dominio massimale della funzione associata è tutto lo spazio), essendo le leggi dei polinomi o la composizione di un logaritmo naturale con il polinomio $1+x_3^2 \geq 1$ per ogni x. La legge f_3 contiene dei termini che sono delle funzioni razionali (precisamente il reciproco di un monomio), quindi la legge ha come dominio massimale l'aperto $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 \neq 0\}$. Le funzioni così ottenute sono differenziabili in tutto il loro dominio massimale, perché sono o polinomi (f_2) o perché sono rapporti tra polinomi (f_3) o perché sono polinomi e composizione di polinomi (f_1) con funzioni C^∞), precisamente il logaritmo naturale. In tutti e tre i casi abbiamo a che fare con funzioni di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ o $C^1(A)$ e quindi differenziabili per il teorema del differenziale totale,
ii. Per rispondere al secondo punto del testo è sufficiente svolgere alcuni calcoli, seguiamo alla lettera le disposizioni del testo scrivendo

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \ln(1+x_3^2) \qquad \nabla f_1(x_1,x_2,x_3) = \left(2(x_1-1), 2x_2, \frac{2x_3}{1+x_3^2}\right)$$
$$Hf_1(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1-x_3^2)}{(1+x_3^2)^2} \end{pmatrix}$$

Per la funzione f_2 possiamo scrivere

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)^2 - x_1x_2 + x_3^2 \qquad \nabla f_2(x_1,x_2,x_3) = \left(4x_1(x_1^2+x_2^2) - x_2, 4x_2(x_1^2+x_2^2) - x_1, 2x_3\right)$$
$$Hf_2(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 12x_1^2+4x_2^2 & 8x_1x_2-1 & 0 \\ 8x_1x_2-1 & 4x_1^2+12x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per concludere interessiamoci alla terza funzione

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1x_2x_3 \qquad \nabla f_3(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1^2x_2x_3 - 1}{x_1^2}, \frac{x_1x_2^2x_3 - 1}{x_2^2}, \frac{x_1x_2x_3^2 - 1}{x_3^2}\right)$$
$$Hf_3(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2/x_1^3 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 2/x_2^3 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 2/x_3^3 \end{pmatrix}$$

iii. Ricordiamo che il piano tangente al grafico di una generica funzione f (almeno) differenziabile nel punto $(1,1,1,f(1,1,1))$ ha equazione $\{x_4 = f(1,1,1) + \nabla f(1,1,1) \cdot (x_1-1, x_2-1, x_3-1)\}$, quindi nei tre casi che ci interessano otteniamo

$$x_4 = f_1(1,1,1) + \nabla f_1(1,1,1) \cdot (x_1-1,x_2-1,x_3-1) = \ln(2) + (0,2,1) \cdot (x_1-1,x_2-1,x_3-1) = 2x_2 + x_3 + \ln(2) - 3$$
$$x_4 = f_2(1,1,1) + \nabla f_2(1,1,1) \cdot (x_1-1,x_2-1,x_3-1) = 4 + (7,7,2) \cdot (x_1-1,x_2-1,x_3-1) = 7x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 12$$
$$x_4 = f_3(1,1,1) + \nabla f_3(1,1,1) \cdot (x_1-1,x_2-1,x_3-1) = 4 + (0,0,0) \cdot (x_1-1,x_2-1,x_3-1) = 4$$

il che finisce l'esercizio. ■

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \qquad \textit{con } x \in \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi dove e perché la funzione è differenziabile,
ii. si calcoli il gradiente e la matrice hessiana della funzione,
iii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1,1,g(1,1,1))$*, la giacitura del piano tangente e un vettore normale al grafico.*

Discussione. i. Abbiamo esplicitamente osservato a lezione che i polinomi sono funzioni differenziabili ovunque, questo perché sono funzioni continue e derivabili, inoltre le derivate parziali (essendo polinomi) sono funzioni continue in tutto lo spazio e l'affermazione è conseguenze del teorema del differenziale totale.
ii. Procediamo con le usuali leggi di dervazione per ottenere

$$\nabla g(x) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) \qquad \text{e} \qquad Hg(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iii. Grazie ai precedenti calcoli possiamo ricavare rapidamente l'equazione di W iperpiano tangente al grafico di g in $(1,1,1,3)$ che è

$$W = \{x_4 = g(1,1,1)+\nabla g(1,1,1)\cdot(x_1-1,x_2-1,x_3-1)\} = \{x_4 = 3+(2,2,2)\cdot(x_1-1,x_2-1,x_3-1) = 2x_1+2x_2-3x_3-3\}$$

A questo punto possiamo derivare l'equazione della giacitura dello spazio tangente semplicemente cancellando il termine noto nell'equazione precedente, infatti la giacitura è lo spazio vettoriale sottostante lo spazio affine tangente, quindi abbiamo

$$\text{giacitura di } W = \{2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0\}$$

mentre un vettore normale al grafico nel punto $(1,1,1,3)$ è $n = (2,2,-3,-1)$, che possiamo dedurre facilmente pensando W come un insieme di livello di una funzione definita su $\mathbb{R}^4$ e calcolando il gradiente della funzione.

■

Esercizio 3. *Usare la regola di derivazione delle funzioni composte per calcolare le derivate parziali di* $F(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ *nei seguenti casi :*

$$f(x,y) = x + xy + y^2 \qquad x(u,v) = u + v \qquad y(u,v) = uv$$

$$f(x,y) = y \qquad x(u,v) = ue^y \qquad y(u,v) = 1 + ue^{-v}$$

Discussione. Nel primo caso abbiamo che

$$F(u,v) = f(x(u,v),y(u,v)) = x(u,v) + x(u,v)y(u,v) + y^2(u,v) = u + v + (u + v)uv + (uv)^2 = u + v + u^2v + uv^2 + u^2v^2$$

e, per calcolo diretto, osserviamo che

$$\partial_1 F(u,v) = 1 + 2uv + v^2 + 2uv^2 \qquad \text{e} \qquad \partial_2 F(u,v) = 1 + u^2 + 2uv + 2u^2v$$

Volendo verificare il teorema di derivazione delle funzioni composte possiamo scrivere

$$\nabla f(x,y) = (1 + y, x + 2y) \qquad \text{e} \qquad J(x(u,v),y(u,v)) = \begin{pmatrix} \partial_1 x(u,v) & \partial_2 x(u,v) \\ \partial_1 y(u,v) & \partial_2 y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$\begin{aligned} \nabla F(u,v) &= \nabla f(x(u,v),y(u,v))J(x(u,v),y(u,v)) = (1 + uv, u + v + 2uv)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \left(1 + uv + uv + v^2 + 2uv^2, 1 + uv + u^2 + uv + 2u^2v\right) \\ &= \left(1 + 2uv + v^2 + 2uv^2, 1 + 2uv + u^2 + 2u^2v\right) \end{aligned}$$

il risultato ottenuto è in perfetto accordo con il risultato visto a lezione.
Ripetiamo i precedenti ragionamenti per il secondo caso, cioè per

$$F(u,v) = f(x(u,v),y(u,v)) = y(u,v) = 1 + ue^{-v}$$

per questa funzione vale

$$\partial_1 F(u,v) = e^{-v} \qquad \text{e} \qquad \partial_2 F(u,v) = -ue^{-v}$$

Per verificare il teorema di derivazione delle funzioni composte calcoliamo alcuni jacobiani come segue

$$\nabla f(x,y) = (0,1) \qquad \text{e} \qquad J(x(u,v),y(u,v)) = \begin{pmatrix} \partial_1 x(u,v) & \partial_2 x(u,v) \\ \partial_1 y(u,v) & \partial_2 y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^v & ue^v \\ e^{-v} & -ue^{-v} \end{pmatrix}$$

e tramite moltiplicazione ricaviamo da cui otteniamo che

$$\nabla F(u,v) = \nabla f(x(u,v),y(u,v)) J(x(u,v),y(u,v)) = (0,1) \begin{pmatrix} e^v & ue^v \\ e^{-v} & -ue^{-v} \end{pmatrix} = \left(e^{-v}, -ue^{-v}\right)$$

concludendo l'esercizio. ■

Esercizio 4. *Date* $u,w \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *e* $F,H \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$*, si verifichino le seguenti identità*

$$\nabla \cdot (uH)(x) = \nabla u(x) \cdot H(x) + u(x)(\nabla \cdot H(x))$$
$$\nabla \wedge (uH)(x) = \nabla u(x) \wedge H(x) + u(x)(\nabla \wedge H(x))$$
$$\nabla \cdot (F \wedge H)(x) = \nabla \wedge F(x) \cdot H(x) - F(x) \cdot \nabla \wedge H(x)$$
$$\nabla \cdot \nabla w(x) = \Delta w(x)$$
$$\nabla \wedge \nabla w(x) = 0$$
$$\nabla \cdot \nabla \wedge H(x) = 0$$
$$\nabla \wedge \nabla \wedge H(x) = \nabla[\nabla \cdot H(x)] - \Delta H(x)$$

prestando attenzione alle dimensioni degli oggetti coinvolti. Poi si riscrivano le identità usando le notazioni div$[F] :=$ $\nabla \cdot F$ *e rot*$[F] := \nabla \wedge F$.

Discussione. Per verificare la veridicità delle precedenti espressioni è sufficiente svolgere in dettaglio (e con un minimo di attenzione!) alcuni semplici calcoli, ricordando le ben note regole di derivazione.
Per la prima formula possiamo procedere come segue

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (uH)(x) &= (\partial_1,\partial_2,\partial_3) \cdot (u(x)H_1(x), u(x)H_2(x), u(x)H_3(x)) \\
&= \partial_1 (u(x)H_1(x)) + \partial_2 (u(x)H_2(x)) + \partial_3 (u(x)H_3(x)) \\
&= \partial_1 u(x)H_1(x) + u(x)\partial_1 H_1(x) + \partial_2 u(x)H_2(x) + u(x)\partial_2 H_2(x) + \partial_3 u(x)H_3(x) + u(x)\partial_3 H_3(x) \\
&= (\partial_1 u(x), \partial_2 u(x), \partial_3 u(x)) \cdot (H_1(x), H_2(x), H_3(x)) + u(x)\left(\partial_1 H_1(x) + \partial_2 H_2(x) + \partial_3 H_3(x)\right) \\
&= \nabla u(x) \cdot H(x) + u(x)\left[\nabla \cdot H(x)\right]
\end{aligned}$$

e questa può essere riscritta nel seguente modo

$$\text{div}\,[uH]\,(x) = \text{grad}[u](x) \cdot H(x) + u(x)\text{div}\,[H(x)]$$

Passiamo alla seconda espressione

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge [uH](x) &= (\partial_1,\partial_2,\partial_3) \wedge (u(x)H_1(x), u(x)H_2(x), u(x)H_3(x)) \\
&= (\partial_2(u(x)H_3(x)) - \partial_3(u(x)H_2(x)), \partial_3(u(x)H_1(x)) - \partial_1(u(x)H_3(x)), \partial_1(u(x)H_2(x)) - \partial_2(u(x)H_1(x))) \\
&= (\partial_2 u(x)H_3(x) + u(x)\partial_2 H_3(x) - \partial_3 u(x)H_2(x) - u(x)\partial_3 H_2(x), \partial_3 u(x)H_1(x) + u(x)\partial_3 H_1(x) \\
&\quad -\partial_1 u(x)H_3(x) - u(x)\partial_1 H_3(x), \partial_1 u(x)H_2(x) + u(x)\partial_1 H_2(x) - \partial_2 u(x)H_1(x) - u(x)\partial_2 H_1(x)) \\
&= (\partial_2 u(x)H_3(x) - \partial_3 u(x)H_2(x), \partial_3 u(x)H_1(x) - \partial_1 u(x)H_3(x), \partial_1 u(x)H_2(x) - \partial_2 u(x)H_1(x)) \\
&\quad + (u(x)\partial_2 H_3(x) - u(x)\partial_3 H_2(x), u(x)\partial_3 H_1(x) - u(x)\partial_1 H_3(x), +u(x)\partial_1 H_2(x) - u(x)\partial_2 H_1(x)) \\
&= \det\left[\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 u(x) & \partial_2 u(x) & \partial_3 u(x) \\ H_1(x) & H_2(x) & H_3(x) \end{pmatrix}\right] + u(x)\left(\det\left[\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ H_1(x) & H_2(x) & H_3(x) \end{pmatrix}\right]\right) \\
&= \nabla u(x) \wedge H(x) + u(x)[\nabla \wedge H(x)]
\end{aligned}$$

che possiamo riformulare nel seguente modo

$$\text{rot}\,[uH]\,(x) = \text{grad}[u](x) \wedge H(x) + u(x) \cdot \text{rot}[H(x)]$$

Per la terza formula abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (F \wedge H)(x) &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (F_2(x)H_3(x) - F_3(x)H_2(x), F_3(x)H_1(x) - F_1(x)H_3(x), F_1(x)H_2(x) - F_2(x)H_1(x)) \\
&= \partial_1 F_2(x)H_3(x) + F_2(x)\partial_1 H_3(x) - \partial_1 F_3(x)H_2(x) - F_3(x)\partial_1 H_2(x) + \partial_2 F_3(x)H_1(x) + F_3(x)\partial_2 H_1(x) \\
&\quad - \partial_2 F_1(x)H_3(x) - F_1(x)\partial_2 H_3(x) + \partial_3 F_1(x)H_2(x) + F_1(x)\partial_3 H_2(x) - \partial_3 F_2(x)H_1(x) - F_2(x)\partial_3 H_1(x) \\
&= F_1(x)(\partial_3 H_2(x) - \partial_2 H_3(x)) + F_2(x)(\partial_1 H_3(x) - \partial_3 H_1(x)) + F_3(x)(\partial_2 H_1(x) - \partial_1 H_2(x)) \\
&\quad + (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x))H_1(x) + (\partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x))H_2(x) + (\partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))H_3(x) \\
&= -F(x) \cdot (\partial_2 H_3(x) - \partial_3 H_2(x), \partial_3 H_1(x) - \partial_1 H_3(x), \partial_1 H_2(x) - \partial_2 H_1(x)) \\
&\quad + (\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)) \cdot (H_1(x), H_2(x), H_3(x)) \\
&= \nabla \wedge F(x) \cdot H(x) - F(x) \cdot \nabla \wedge H(x)
\end{aligned}
$$

ricordando la definizione di prodotto vettoriale e di rotore di un campo vettoriale. Questa espressione si può incontrare anche scritta nel seguente modo

$$\mathrm{div}[F \wedge H](x) = \mathrm{rot}[F](x) \cdot H(x) - F(x) \cdot \mathrm{rot}[H](x)$$

La quarta identità è (relativamente) facile, almeno in confronto con gli altri enunciati, infatti vale

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla w(x)(\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (\partial_1, \partial_2, \partial_3)w(x) &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (\partial_1 w(x), \partial_2 w(x), \partial_3 w(x)) \\
&= \partial_{11} w(x) + \partial_{22} w(x) + \partial_{33} w(x) = \Delta w(x)
\end{aligned}
$$

e può essere riformulata secondo la seguente spressione

$$\mathrm{div}\left[\mathrm{grad}[w](x)\right] = \Delta w(x)$$

La quinta relazione da mostrare è una identità importante, come vederemo più avanti nel corso, e si ricava così

$$
\begin{aligned}
\nabla \wedge \nabla w(x) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \wedge (\partial_1 w(x), \partial_2 w(x), \partial_3 w(x)) &= \det\left[\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 w(x) & \partial_2 w(x) & \partial_3 w(x) \end{pmatrix}\right] \\
(\partial_{32} w(x) - \partial_{23} w(x), \partial_{13} w(x) - \partial_{31} w(x), \partial_{21} w(x) - \partial_{12} w(x)) &= 0
\end{aligned}
$$

dove l'uguaglianza finale è una conseguenza del teorema di Schwarz (si ricordi che $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$), questa informazione può essere riassunta nella seguente espressione

$$\mathrm{rot}\left[\mathrm{grad}[w](x)\right] = 0$$

La penultima identità ha alcune affinità con la precedente, infatti vale

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \wedge H(x) &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \wedge (H_1(x), H_2(x), H_3 w(x)) \\
&= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \cdot (\partial_2 H_3(x) - \partial_3 H_2(x), \partial_3 H_1(x) - \partial_1 H_3(x), \partial_1 H_2(x) - \partial_2 H_1(x)) \\
&= \partial_{21} H_3(x) - \partial_{31} H_2(x) + \partial_{32} H_1(x) - \partial_{12} H_3(x) + \partial_{13} H_2(x) - \partial_{23} H_1(x) = 0
\end{aligned}
$$

e l'ultima uguaglianza discende (come prima, in quanto $H \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$) dal teorema di Schwarz. Si noti che l'espressione può essere sintetizzata dicendo che

$$\mathrm{div}\left[\mathrm{rot}[H](x)\right] = 0$$

L'ultima espressione da studiare è la seguente

$$
\begin{aligned}
\nabla \wedge \nabla \wedge H(x) &= (\partial_1,\partial_2,\partial_3) \wedge [(\partial_1,\partial_2,\partial_3) \wedge (H_1(x),H_2(x),H_3w(x))]\\
&= (\partial_1,\partial_2,\partial_3) \wedge (\partial_2 H_3(x) - \partial_3 H_2(x), \partial_3 H_1(x) - \partial_1 H_3(x), \partial_1 H_2(x) - \partial_2 H_1(x))\\
&= (\partial_2(\partial_1 H_2(x) - \partial_2 H_1(x)) - \partial_3(\partial_3 H_1(x) - \partial_1 H_3(x)), \partial_3(\partial_2 H_3(x) - \partial_3 H_2(x))\\
&\quad -\partial_1(\partial_1 H_2(x) - \partial_2 H_1(x)), \partial_1(\partial_3 H_1(x) - \partial_1 H_3(x)) - \partial_2(\partial_2 H_3(x) - \partial_3 H_2(x)))\\
&= (\partial_{12}H_2(x) - \partial_{22}H_1(x) - \partial_{33}H_1(x) + \partial_{13}H_3(x), \partial_{23}H_3(x) - \partial_{33}H_2(x) - \partial_{11}H_2(x) + \partial_{21}H_1(x),\\
&\quad \partial_{31}H_1(x) - \partial_{11}H_3(x) - \partial_{22}H_3(x) + \partial_{32}H_2(x))\\
&= (\partial_{11}H_1(x) + \partial_{12}H_2(x) + \partial_{13}H_3(x) - \Delta H_1(x), \partial_{21}H_1(x) + \partial_{23}H_3(x) + \partial_{22}H_2(x) - \Delta H_2(x),\\
&\quad \partial_{31}H_1(x) + \partial_{32}H_2(x) + \partial_{33}H_3(x) - \Delta H_3(x))\\
&= (\partial_1(\partial_1 H_1(x) + \partial_2 H_2(x) + \partial_3 H_3(x)), \partial_2(\partial_1 H_1(x) + \partial_2 H_2(x) + \partial_3 H_3(x)),\\
&\quad \partial_3(\partial_1 H_1(x) + \partial_2 H_2(x) + \partial_3 H_3(x))) - (\Delta H_1(x), \Delta H_2(x), \Delta H_3(x))\\
&= (\partial_1,\partial_2,\partial_3)[(\partial_1,\partial_2,\partial_3) \cdot (H_1(x),H_2(x),H_3w(x))] - (\partial_{11}+\partial_{22}+\partial_{33})(H_1(x),H_2(x),H_3w(x))\\
&= \nabla[\nabla \cdot H(x)] - \Delta H(x)
\end{aligned}
$$

quest'ultima relazione provata può essere riscritta come segue

$$\mathrm{rot}[\mathrm{rot}[H](x)] = \mathrm{grad}[\mathrm{div}[H](x)] - \Delta H(x)$$

Con quest'ultima osservazione l'esercizio è concluso. ■

Delle seguenti affermazioni si provi la veridicità tramite un ragionamento sintetico o la falsità attraverso un controesempio (da aggiornare).

ESERCIZIO 5. *Sia* $\{x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$ *una successione convergente in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, *allora la successione* $(x_{3,k}, x_{1,k}, x_{2,k})$ *è convergente.* $\boxed{V}$

ESERCIZIO 6. *Sia* $\{p_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})\}$ *una successione di Cauchy in* $\mathbb{R}^3$, *allora la successione* $\{(x_{1,k}, x_{2,k})\}$ *è convergente in* $\mathbb{R}^2$. $\boxed{V}$

ESERCIZIO 7. *Sia* $E = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi] \subseteq \mathbb{R}^3$, *allora* E *è aperto.* $\boxed{F}$

ESERCIZIO 8. *Sia* $E = (0,\pi) \times (0,\pi) \times (0,\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$, *allora* E *è aperto.* $\boxed{V}$

ESERCIZIO 9. $\{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = x_3 = 0\}$ *sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso.* $\boxed{V}$

ESERCIZIO 10. *L'insieme* $\{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = x_3 = 0\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è aperto.* $\boxed{F}$

ESERCIZIO 11. *L'insieme* $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso.* $\boxed{V}$

ESERCIZIO 12. *L'insieme* $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subseteq (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso.* $\boxed{V}$

ESERCIZIO 13. $\{2 < x_1^2 + x_2^2 < 4\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso.* $\boxed{F}$

Esercizio 14. *L'insieme* $\{x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_3 = 0\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è aperto.* $\boxed{F}$

Esercizio 15. *Sia* p *un punto di* $\mathbb{R}^3$*, allora la funzione*
$f(x) := \|x - p\|_2$*, con* $x \in A \subseteq \mathbb{R}^3$*, è continua.* $\boxed{V}$

Esercizio 16. *Sia* f *una funzione continua da* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *in sé.*
Dato $C \subseteq \mathbb{R}^3$ *insieme chiuso, allora segue che* $f^{-1}(C)$ *è chiuso.* $\boxed{V}$

Esercizio 17. *Sia* $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ *continua,*
allora $f^{-1}([0,1])$ *è compatto in* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$*.* $\boxed{F}$

Esercizio 18. *Sia* $f : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ *continua,*
allora $f^{-1}((0,1))$ *è compatto in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$*.* $\boxed{F}$

Esercizio 19. *Sia* $f : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ *continua,*
allora $f([0,1]^3)$ *è compatto in* $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$*.* $\boxed{V}$

Esercizio 20. *Sia* $f : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ *continua,*
allora $f((0,1)^3)$ *è aperto in* $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$*.* $\boxed{F}$

Esercizio 21. *La funzione* $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, con* $s(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$*, è continua* $\boxed{V}$

Esercizio 22. *La funzione* $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, con* $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$*, è continua* $\boxed{V}$

Esercizio 23. *La funzione* $f(x) = \|x\|_2^2 - \ln(\|x\|_2^2)$*, con* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, è continua* $\boxed{V}$

Esercizio 24. *Se* $f(x) = e^{-\|x\|_2^2}$*, allora* $\nabla f(x) = 2xe^{-\|x\|_2^2}$ $\boxed{V}$

Esercizio 25. *Se* $f(x) = w \cdot x + q$*, allora* $\nabla f(x) = w$ *e* $\Delta f(x) = 0$ $\boxed{V}$

Esercizio 26. *Sia* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 + x_3^4$ *e* $p(1,1,1)$*, allora il piano*
tangente al grafico di f *in* $(p, f(p))$ *ha equazione* $x_4 = (2,1,4) \cdot (x_1, x_2, x_3) + 3$ $\boxed{V}$

Esercizio 27. *La funzione* $f(x) = \|x\|_2$ *è differenziabile in* $\mathbb{R}^n$ $\boxed{F}$

Esercizio 28. *Il grafico della funzione* $f(x) = \|x\|_2$
ha piano tangente in $(x, f(x))$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{F}$
