TEOREMA (proprietà della media delle f. armoniche)

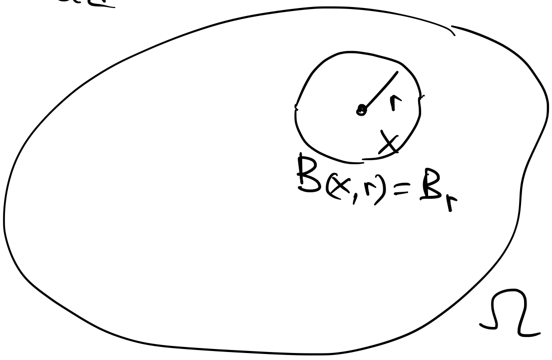
Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω (Ω aperto di $\mathbb{R}^N$).

Allora $\forall\, B_r(x) \subset \Omega$

palla di centro x e raggio r.

$$u(x) = \fint_{B_r} u(y)\,dy = \fint_{\partial B_r} u(y)\,d\sigma$$

Dim. Mostriamo che vale la seconda



Considero la funzione

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B_r} u(y)\,d\sigma(y)$$

$$\varphi'(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r} u(y)\,d\sigma(y)\right) =$$

$y = x + rz$, $z \in \partial B_1$

$d\sigma(y) = r^{N-1}\,d\sigma(z)$

difficoltà: il dominio cambia con r.

$$= \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{N\omega_N \cancel{r^{N-1}}} \int_{\partial B_1} u(x+rz)\,\cancel{r^{N-1}}\,d\sigma(z)\right] =$$

supponendo di poter scambiare derivata e integrale

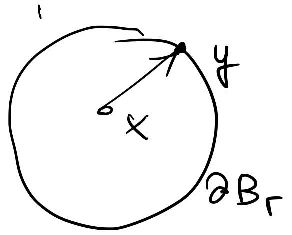
$$= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1} \frac{d}{dr}\left[u(x+rz)\right] d\sigma(z)$$

$$= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1} \nabla u(x+rz)\cdot z\,d\sigma(z) =$$ torno alla y

$$= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_r} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r}\,\frac{1}{r^{N-1}}\,d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_r} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \frac{1}{r^{N-1}} \, d\sigma(y) =$$

$$\frac{y-x}{r} = \nu_e$$



$$= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B_r} \underbrace{\nabla u(y) \cdot \nu_e}_{\frac{\partial u}{\partial \nu}} \, d\sigma(y) =$$

$$= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B_r} \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u(y))}_{= \Delta u = 0} \, dy = 0$$

$$\varphi'(r) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(r) = \text{costante} = \lim_{r \to 0^+} \varphi(r) =$$

$$= \lim_{r \to 0^+} ⨍_{\partial B_r} u \, d\sigma = u(x)$$

Dim 1).

$$\int_{B(x,r)} u(y)\, dy = \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho} u(y)\, d\sigma(y)$$

$y = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\ldots$

$$= \int_0^r d\rho \underbrace{\left(⨍_{\partial B_\rho} u(y)\, d\sigma(y) \right)}_{= u(x)} N\omega_N \rho^{N-1} = r^N \omega_N \, u(x)$$

Divido per $r^N \omega_N$, ho la tesi

$$u(x) = \fint_{B_r} u(y)\,dy.$$

Resta da giustificare la derivazione sotto integrale

TEOREMA $f(t,x) : I \times E$, t.c.

intervallo

1) $f(t,x)$ è integrabile in E $\forall t \in I$

2) per ogni x (eccetto al più un insieme di misura nulla) $f(t,x)$ è derivabile in I

3) $\exists\, g(x)$ integrabile in E t.c

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq g(x) \quad \begin{array}{l} \forall x \in E \text{ (eccetto al più un insieme)} \\ \forall t \in I \end{array}$$

Allora

$$\frac{d}{dt}\left(\int_E f(x,t)\,dx \right) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

(Vale anche se $E \subset \mathbb{R}^N$)

La derivazione che abbiamo fatto prima è giustificata in quanto

$$\frac{d}{dr} u(x+rz) = \nabla u(x+rz) \cdot z \quad \text{verifica}$$

$$\left| \qquad \qquad \right| \leq |\nabla u(\quad)| \cdot \underbrace{|z|}_{=1} \leq C$$

perché u è di classe C^2

OSS In realtà vale anche il viceversa

TEOREMA u continua in Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e verifica la proprietà della media.

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma(y) \quad \forall B(x,r) \subset \Omega.$$

Allora 1) $u \in C^\infty(\Omega)$ e 2) u è armonica.

Dim. solo 2). Sappiamo già che $u \in C^2(\Omega)$, mostro che $\Delta u \equiv 0$ in Ω.

Per assurdo, se non lo fosse, $\exists\ \bar{x} \in \Omega$ t.c. $\Delta u(\bar{x}) \neq 0$, per es. $\Delta u(\bar{x}) > 0$. $\Rightarrow \exists$ $B(\bar{x}, R)$ in cui $\Delta u \geq c > 0$

Sia $0 < r < R$.

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma(y) = u(x) \quad \text{costante (non dipende da } r)$$

$$\Downarrow$$

$$\phi'(r) \equiv 0$$

$$\| \leftarrow \text{con gli stessi conti di prima}$$

$$\frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B_r} \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u(y))}_{\substack{\| \\ \Delta u \\ \geq \\ c \\ > \\ 0}}\, dy > 0$$

CONSEGUENZE DELLA PROPRIETÀ DELLA MEDIA

Principio di massimo

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato.

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sia armonica in Ω

1) Principio di massimo debole.

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x)$$

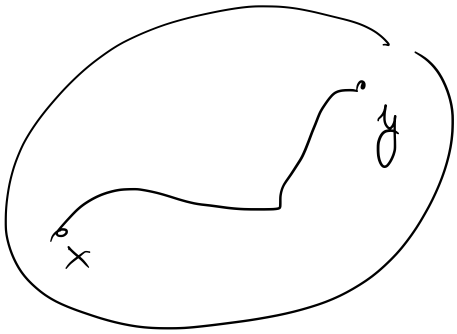
$$\min_{\overline{\Omega}} u(x) = \min_{\partial\Omega} u(x)$$

Principio di max forte.

2) se Ω connesso per archi, e

se $\exists\, x_0 \in \Omega$ t.c.

$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, allora $u \equiv$ cost su $\overline{\Omega}$.



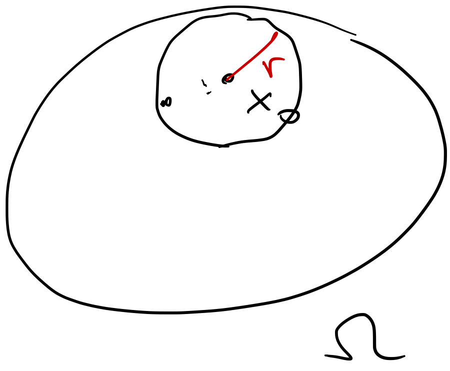
Ovviamente 2) $\Rightarrow$ 1)

Dimostriamo 2).

Sia $x_0 \in \Omega$ t.c. $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u = M$.

Sia r t.c. $0 < r < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$

Voglio provare che $u \equiv$ costante in $B_{x_0}(r)$



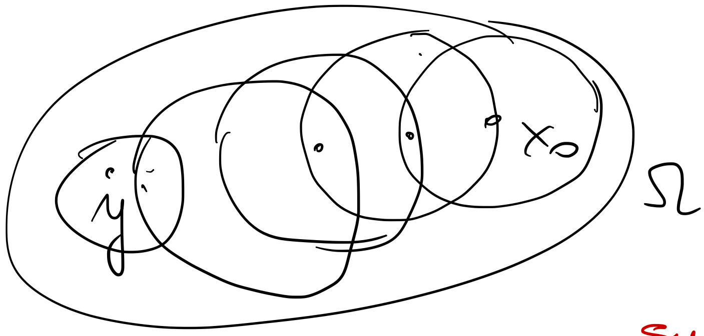
Sappiamo proprietà della media

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(y)\, dy \leq M$$

deve essere un uguaglianza

$\Longrightarrow$ u deve essere $\equiv M$ in $B(x_0, r)$.

Sia $y \in \Omega$. Collego y e x con una catena di palle $B_1 \dots B_m \Rightarrow u(y) = u(x_0) = M$.



<u>OSS</u>. Una funzione si dice superarmonica (sub) in Ω se $-\Delta u \geq 0$ ($\leq$)

Il teorema della media diventa

$$u(x) \geq \fint_{\partial B_r} u(y)\, d\sigma(y) \quad \text{se } u \text{ è superarmonica}$$
$$\leq \quad \text{subarmonica}$$

Per una f. superarmonica vale solo il principio di minimo (debole e forte).

subarmonica $\Rightarrow$ solo il principio del max.

Conseguenza: Unicità del Pb. di Dirichlet.

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{in } \Omega \text{ aperto limitato.} \\ u = g(x) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

assegnato

Pb. di Dirichlet per l'eq^{ne} di Poisson.

Sia $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$

Una soluz. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ di (P), se esiste, è unica

Dim. Supponiamo che v sia un'altra sol^{ne} di (P)

Considero la differenza $w = u - v$.

$$\begin{cases} \Delta w = \Delta u - \Delta v = f - f \equiv 0 \\ w = g - g = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$$w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

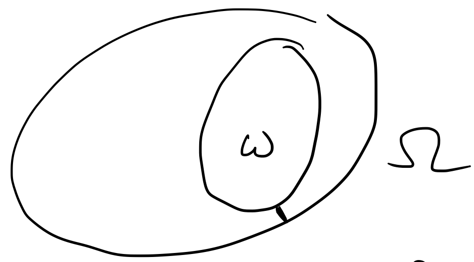
Princ. max

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} w &= \max_{\partial\Omega} w = 0 \\ \min_{\overline{\Omega}} (w) &= \min_{\partial\Omega} w = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow w \equiv 0 \Downarrow v \equiv u$$

Dis. di Harnack.

ω, Ω aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ t.c.

ω connesso, $\omega \subset\subset \Omega$ cioè $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$.



Allora $\exists$ costante positiva $c = c(\omega, \Omega)$ t.c.

$$\sup_{\omega} u \leq c \inf_{\omega} u.$$

per tutte le funzioni u armoniche e non negative in Ω.

OSS c non dipende da u

OSS Questo significa che $\forall x, y \in \omega$

$$\frac{u(y)}{c} \leq u(x) \leq c\, u(y)$$

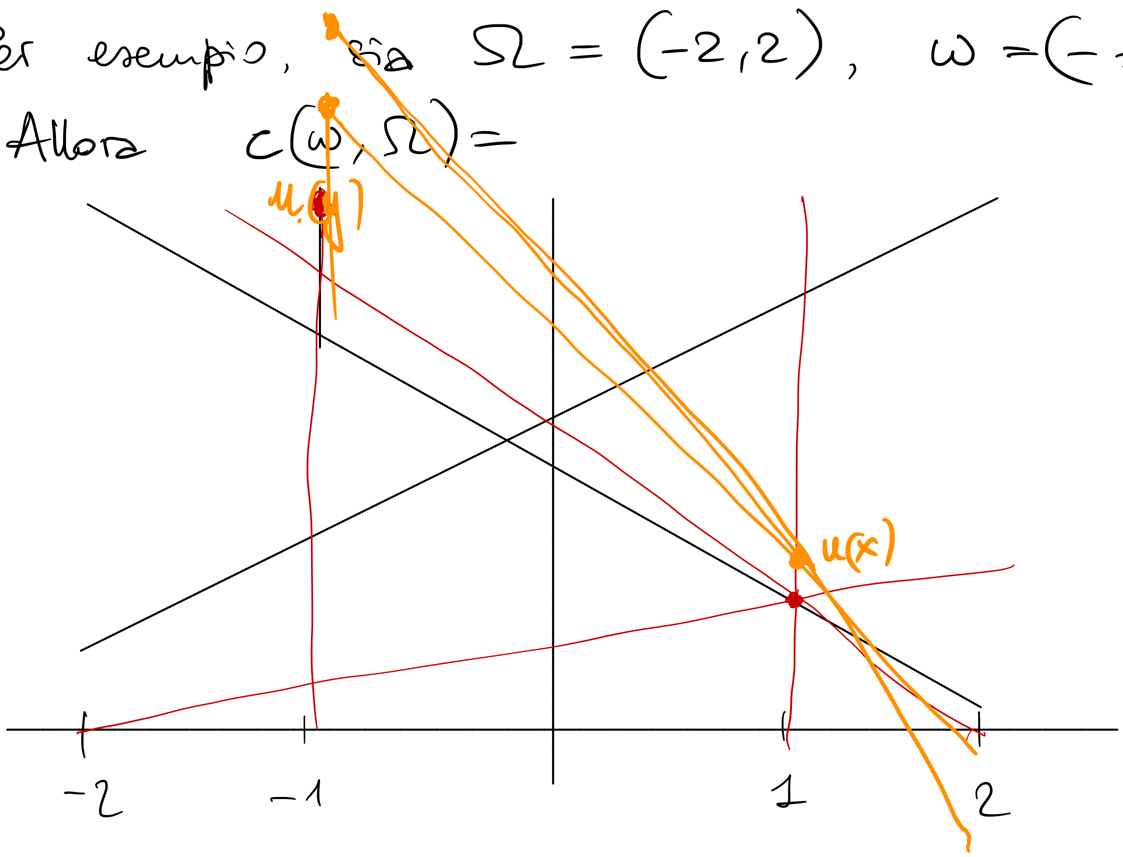
Tutti i valori di una funzione armonica e non negativa su Ω. sono "confrontabili" su ω: u non può essere molto grande in nessun punto di ω se non è abbastanza grande su tutto Ω.

OSS Questo risultato è ovvio in dim. 1, perché in questo caso

u armonica $\iff u(x) = ax + b$.

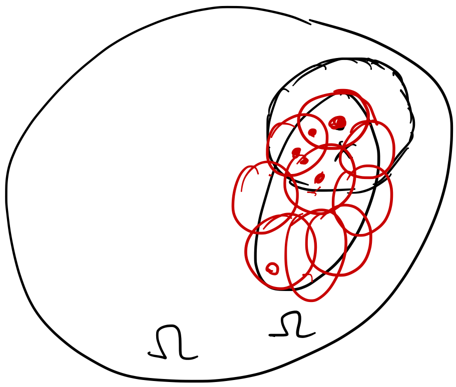
Per esempio, sia $\Omega = (-2,2)$, $\omega = (-1,1)$.

Allora $c(\omega,\Omega) =$



Dim. della dis. di Harnack.

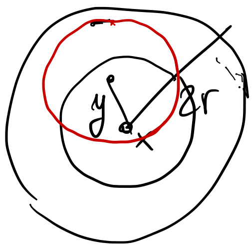
Sia $0 < r < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$



$B(x,2r) \subset \Omega$

$|x-y| < r \Rightarrow B(y,r) \subset B(x,2r)$

$x, y \in \omega \quad |x-y| < r$.



$$u(x) = \fint_{B(x,2r)} u(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{\omega_N 2^N r^N} \int_{B(x,2r)} u(z)\,dz \overset{u \geq 0}{\geq} \frac{1}{\omega_N 2^N r^N} \int_{B(y,r)} u(z)\,dz = \frac{1}{2^N} \fint_{B(y,r)} u(z)\,dz$$

$$\frac{1}{2^N} u(y)$$

$$\parallel$$

$$\Rightarrow \quad u(y) \leq 2^N u(x) \quad \forall x, y \in \omega : \quad |x-y| < r.$$

Posso ricoprire ω con un numero finito k di pallette di raggio r, centrate in pti di ω.

Se x e $y \in \omega$, con al massimo k confronti

$$u(x) \leq 2^N u(y_1) \leq 2^N 2^N u(y_2) \leq \dots \leq \underbrace{2^{kN}}_{= C} u(y)$$