ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 03 - 20251017

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Si riscrivano le definizioni di insieme aperto, chiuso, limitato, convesso e compatto per lo spazio di Banach* $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$.

ESERCIZIO 2. *Si provi che l'insieme* $A = \left\{f \in C^0[0,1] : f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in [0,1]\right\}$ *è aperto in* $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$, *poi si scriva l'espressione di* A^c.

ESERCIZIO 3. *i. Considerato lo spazio vettoriale* $C^0[0,1]$, *si provi che*

$$\|f-g\|_X = \int_0^1 x|f(x)-g(x)|dx$$

è una norma su $C^0[0,1]$.
ii. Sia $\{f_n\}$ *la successione definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1-nx) & \text{se } x \le 1/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mostrare che f_n *converge alla funzione nulla rispetto alla norma* $\|\cdot\|_X$. *Stabilire se converge anche in* $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$.

ESERCIZIO 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $C^0[0,\pi]$ *e le norme* $\|\cdot\|_i$, *con* $i = 1, 2, +\infty$, *definite in modo che, per* $f \in C^0[0,\pi]$, *valga*

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(s)|ds \qquad \|f\|_2 = \left[\int_0^\pi |f(s)|^2 ds\right]^{1/2} \qquad \|f\|_\infty = \max_{s\in[0,\pi]} |f(s)|$$

i. si mostri che esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ *tali che*

$$\|f\|_1 \le C_1\|f\|_\infty \qquad e \qquad \|f\|_2 \le C_2\|f\|_\infty \qquad \text{per ogni } f \in C^0[0,\pi]$$

ii. esistono delle costanti* $K_1, K_2 > 0$ *in modo che*

$$\|f\|_\infty \le K_i\|f\|_i \qquad \text{per ogni } f \in C^0[0,\pi] \quad e \quad i = 1, 2?$$

iii. esiste* $C_0 > 0$ *tale che* $\|f\|_1 \le C_0\|f\|_2$.

ESERCIZIO 5. *Nello spazio* $C^0[-1,1]$ *si provi che, per* $k = 1, 2, 3, \ldots$, *si ha*
i. le funzioni $f_k(x) = e^{-kx^2}$ *costituiscono una successione di Cauchy rispetto a* $\|\cdot\|_2$,
ii. le funzioni $f_k(x) = e^{-kx^2}$ *non sono una successione di Cauchy rispetto a* $\|\cdot\|_\infty$,
iii. le funzioni $f_k(x) = e^{-|x|/k}$ *costituiscono una successione di Cauchy rispetto a* $\|\cdot\|_\infty$.

ESERCIZIO 6. *Sia* $E = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *un sottoinsieme finito, si dimostri che* E *è chiuso.*

Esercizio 7. *Si considerino gli spazi normati* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *e* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. *Si mostri che se* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *è aperto rispetto una delle tre norme lo è anche rispetto alle altre due.*

Esercizio 8. *Data un'applicazione lineare* $L : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *si provi che*
i. se $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *converge a* 0, *allora* $L(x_k) \longrightarrow 0$,
ii. se $x_k \longrightarrow x_0$, *allora* $L(x_k) \longrightarrow L(x_0)$.

Esercizio 9. *Data un'applicazione lineare* $L : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *si provi l'esistenza di* $K > 0$ *tale che* $\|L(x)\|_2 \leq K\|x\|_2$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 10. *Sia* $g \in C^0[0,1]$ *una funzione positiva e definiamo*

$$C = \left\{f : |f(x)| \leq g(x) \text{ per ogni } x \in [0,1]\right\} \subseteq \left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$$

i. si mostri che C *è chiuso,*
ii. si descriva ∂C.

Esercizio 11. *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{5x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + 3x_2^2}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\pi \ln(1 + x_1^2)x_2}{x_1x_2} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x_1^4}{x_2(x_1^2 + x_2^2)} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x_1x_2}}{1 + 2x_1^2 + 3x_2^2}$$

Esercizio 12. *Identificare il dominio massimale e calcolare le derivate parziali del primo e del secondo ordine, cioè* ∂_j *e* ∂_{ji} *con* $j, i = 1, 2, 3$, *delle seguenti funzioni*

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 3x_2^2)\ln(2x_1^2 + x_2^2) \qquad g(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2} \qquad h(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2}$$

Esercizio 13. *Data la funzione* $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 x_2^2$
i. studiare la continuità della funzione e delle sue derivate parziali in $\mathbb{R}^2$,
ii.studiare la differenziabilità della funzione $\mathbb{R}^2$,
iii. calcolare, se esistono, le derivate direzionali $\partial_w f$.

Esercizio 14. *Data*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x - y)^3}{\left[(x - 1)^2 + (y - 1)^2\right]^a} & (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f *al variare del parametro* $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 15. *Stabilire se le seguenti funzioni sono continue, derivabili, differenziabili o di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 \qquad g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

Calcolare le equazioni cartesiane del piano tangente al grafico di f *in* $(1, 1, 2)$, *del piano tangente al grafico di* g *in* $(1, 0, 1)$ *e del piano tangente al grafico di* h *in* $(0, 0, 0)$.

Ricordando che

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n) \qquad \text{e} \qquad \Delta = \partial_{11} + \partial_{22} + \dots + \partial_{nn}$$

si affrontino i seguenti esercizi

Esercizio 16. *Sia* $u(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$, *con* $x \in \mathbb{R}^n$, *si calcolino le seguenti quantità*

$$\partial_i u(x) \quad \textit{per } i = 1, \dots, n \qquad \partial_w u(x) \quad \textit{per } w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad \nabla u(x) \qquad \Delta u(x)$$

Esercizio 17. *Sia* $u(x) = \frac{1}{\|x\|_2}$, *con* $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, *si calcolino le seguenti quantità*

$$\partial_i u(x) \quad \textit{per } i = 1, 2, 3 \qquad \partial_w u(x) \quad \textit{per } w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \qquad \nabla u(x) \qquad \Delta u(x)$$

Esercizio 18. *Sia* $u(x) = \ln(\|x\|_2)$, *con* $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, *si calcolino le seguenti quantità*

$$\partial_i u(x) \quad \textit{per } i = 1, 2 \qquad \nabla u(x) \qquad \Delta u(x)$$

Esercizio 19. *Sia* $w(x) = \frac{1}{2n}(1 - \|x\|_2^2)$, *con* $x \in B = B(0,1)$, *si verifichi che la funzione risolve il seguente problema*

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = 1 & x \in B \\ w(x) = 0 & x \in \partial B \end{cases}$$

inoltre si calcoli $\partial_n w(x)$ *per* $x \in \partial B$, *dove* n *è il versore normale* ∂B *in* x.

SVOLGIMENTI

Esercizio 1. *Si riscrivano le definizioni di insieme aperto, chiuso, limitato, convesso e compatto per lo spazio di Banach* $(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Discussione. Ricordando le definizioni date per un generico spazio normato possiamo scrivere che $A \subseteq (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ è aperto se per ogni $f \in A$ esiste $r_0 = r_0(f) > 0$ tale che

$$\begin{aligned} B(f, r_0) &= \left\{h \in C^0[a,b] : \|f - h\|_\infty < r_0\right\} = \left\{h : \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| < r_0\right\} \\ &= \left\{h \in C^0[a,b] : |f(x) - h(x)| < r_0 \text{ per ogni } x \in [a,b]\right\} \subseteq A \end{aligned}$$

$E \subseteq C^0[a,b]$ è chiuso se il suo complementare è aperto,
$W \subseteq C^0[a,b]$ è limitato se esiste $M > 0$ tale che

$$W \subseteq B(0, M) = \left\{h \in C^0[a,b] : \max_{x \in [a,b]} |h(x)| < M\right\} = \left\{h \in C^0[a,b] : |h(x)| < M \text{ per ogni } x \in [a,b]\right\}$$

$C \subseteq C^0[a,b]$ è convesso se per ogni $f, g \in C$ si ha che la funzione $(tf + (1-t)g) \in C$ per ogni $t \in [0,1]$, cioè la funzione definita nel seguente modo

$$h_t(x) := tf(x) + (1-t)g(x) \qquad \text{con} \qquad \mathrm{dom}(h) = [a,b]$$

appartiene all'insieme C, per ogni valore del parametro t nell'intervallo $[0,1]$.
$K \subseteq C^0[a,b]$ è compatto se per ogni successione $\{f_k\} \subseteq K$ si ha che esistono una sottosuccessione $\{f_{k(j)}\} \subseteq K$ ed una funzione $f_\infty \in K$ tali che

$$f_{k(j)} \longrightarrow f_\infty \quad \text{per } j \longrightarrow +\infty \qquad \text{cioè} \qquad \|f_{k(j)} - f_\infty\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{per } j \longrightarrow +\infty$$

∎

Esercizio 2. *Si provi che l'insieme* $A = \left\{f \in C^0[0,1] : f(x) > 0 \text{ per ogni } x \in [0,1]\right\}$ *è aperto in* $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$*, poi si scriva l'espressione di* A^c.

Discussione. Sia $g \in A$, dalla definizione segue che $g(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$, poiché $[0,1]$ è un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, abbiamo che esiste $x_m \in [0,1]$ tale che $\min|g(x)| = \min[g(x)] = g(x_m) = m > 0$. Allora consideriamo l'insieme $B(g, m/2)$ e proviamo che tale insieme è contenuto in A: sia $h \in B(g, m/2)$, allora possiamo scrivere che

$$|h(x) - g(x)| \leq \|h - g\|_\infty < m/2 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

dalle proprietà del valore assoluto ricaviamo

$$h(x) = h(x) - g(x) + g(x) \geq g(x) - |h(x) - g(x)| > m - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m > 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

essendo la funzione h positiva in tutto l'intervallo possiamo affermare che $h \in A$, l'arbitrarietà di h ci permette di dedurre che $B(g, m/2) \subseteq A$.
Ricordiamo che $A^c = C^0[0,1] \setminus A = \{f \in C^0[0,1] : f \notin A\}$, per caratterizzare una funzione che non appartiene ad A è necessario ricordare come si nega una affermazione, siccome la proprietà che definisce A è che le funzioni nell'insieme sono positive in ogni punto di $[0,1]$, la negazione di questa affermazione è che deve esistere almeno un punto dell'intervallo su cui la richiesta non è soddisfatta, quindi abbiamo che

$$A^c = \left\{f \in C^0[0,1] : \text{ esiste } s \in [0,1] \text{ tale che } f(s) \leq 0\right\}$$

il che conclude lo svolgimento. ■

Esercizio 3. *i. Considerato lo spazio vettoriale* $C^0[0,1]$*, si provi che*

$$\|f - g\|_X = \int_0^1 x|f(x) - g(x)|dx$$

è una norma su $C^0[0,1]$.
ii. Sia $\{f_n\}$ *la successione definita da*

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - nx) & \text{se } x \leq 1/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mostrare che f_n *converge alla funzione nulla rispetto alla norma* $\|\cdot\|_X$*. Stabilire se converge anche in* $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$.

Discussione. i. Dimostriamo, più in generale, che se $w \in C^0[a,b]$, con $w(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora

$$\|f\|_w := \int_a^b w(x)|f(x)|dx$$

è una norma sullo spazio vettoriale $C^0[a,b]$. Naturalmente nel caso che ci interessa maggiormente $w(x) = x$.
La positività della norma segue dal fatto che $w(x) > 0$ e dalle proprietà del valore assoluto. Mostriamo che è assurdo supporre che $\|h\|_w = 0$ e che esista $x_0 \in [a,b]$ tale che $h(x_0) > 0$. Essendo h continua per il teorema della permanenza del segno possiamo pensare che $x_0 \in (a,b)$ (altrimenti $h \equiv 0$ in $[a,b]$), per la continuità di h in x_0 con $\varepsilon = h(x_0)/2 > 0$ dovrebbe esistere $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (che possiamo scegliere in modo che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a,b)$) tale che

$$|h(x) - h(x_0)| < \frac{h(x_0)}{2} \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

quindi tale che

$$h(x) > \frac{h(x_0)}{2} \qquad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ma allora

$$0 = \int_a^b h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \delta h(x_0) > 0$$

e abbiamo raggiunto una contraddizione.

L'omogeneità dellìapplicazione $\|\cdot\|_w$ segue dall'omogeneità del valore assoluto, cioè dal fatto che il valore assoluto di un prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti dei fattori.
Infine verifichiamo la disuguaglianza triangolare per il $\|\cdot\|_w$, infatti vale

$$\begin{aligned}\|f+g\|_w &= \int_a^b w(x)|f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^b w(x)\left[|f(x)|+|g(x)|\right]dx \\ &= \int_a^b w(x)|f(x)|dx + \int_a^b w(x)|g(x)|dx = \|f\|_w + \|g\|_w\end{aligned}$$

per ogni $f, g \in C^0[a,b]$, perché $w(x) > 0$ in (a,b).
ii. Cominciamo osservando che

$$\|f_n\|_w = \|f_n - 0\|_w = \int_0^1 x|f_n(x)|dx = \int_0^{1/n}[nx - n^2x^2]dx = \frac{1}{6n} \longrightarrow 0$$

per $n \longrightarrow +\infty$, quindi f_n converge alla funzione nulla nello spazio normato $(X, \|\cdot\|_w)$. Invece lo studio della convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ è più semplice visto che $f_n(0) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, questo implica che

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(0)| = n \longrightarrow +\infty$$

quindi la successione non è convergente (neppure limitata!) rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. ■

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $C^0[0,\pi]$ *e le norme* $\|\cdot\|_i$, *con* $i = 1, 2, +\infty$, *definite in modo che, per* $f \in C^0[0,\pi]$, *valga*

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(s)|ds \qquad \|f\|_2 = \left[\int_0^\pi |f(s)|^2 ds\right]^{1/2} \qquad \|f\|_\infty = \max_{s\in[0,\pi]}|f(s)|$$

i. si mostri che esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ *tali che*

$$\|f\|_1 \leq C_1\|f\|_\infty \qquad e \qquad \|f\|_2 \leq C_2\|f\|_\infty \qquad \text{per ogni } f \in C^0[0,\pi]$$

ii. esistono delle costanti* $K_1, K_2 > 0$ *in modo che*

$$\|f\|_\infty \leq K_i\|f\|_i \qquad \text{per ogni } f \in C^0[0,\pi] \quad e \quad i = 1,2?$$

iii. esiste* $C_0 > 0$ *tale che* $\|f\|_1 \leq C_0\|f\|_2$.

Discussione. i. Notiamo che $f \in C^0[0,\pi]$ è integrabile, in quanto continua, quindi tutte le norme coinvolte sono ben definite. Dalla proprietà di monotonia dell'integrale e dalla definizione di $\|\cdot\|_\infty$ ricaviamo

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(s)|ds \leq \int_0^\pi \left[\max_{s\in[0,\pi]}|f(s)|\right]ds = \|f\|_\infty \int_0^\pi ds = \pi\|f\|_\infty$$

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\pi |f(s)|^2 ds \leq \int_0^\pi \left[\max_{s\in[0,\pi]}|f(s)|\right]^2 ds = \|f\|_\infty^2 \int_0^\pi ds = \pi\|f\|_\infty^2$$

dunque valgono le disuguaglianze proposte dal testo dell'esercizio con costanti $C_1 = \pi$ e $C_2 = \sqrt{\pi}$.
ii. Le disuguaglianze scritte sono false, per provare questo fatto consideriamo la seguente successione di funzioni continue su $[0,\pi]$

$$f_k(s) = \begin{cases} 1 - e^k s & s \in [0, e^{-k}] \\ 0 & s \in (e^{-k}, \pi] \end{cases} \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

allora, per ogni k, abbiamo che

$$\|f_k\|_\infty = f_k(0) = 1 \qquad \|f\|_1 = \int_0^\pi |f(s)|ds = \frac{1}{2e^k} \qquad \|f\|_2 = \left[\int_0^\pi |f(s)|^2 ds\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3e^{k/2}}$$

Dai precedenti calcoli deduciamo che le costanti K_i non posso esistere visto che $\|f_k\|_\infty = 1$ è costante rispetto all'indice k, mentre le due norme integrali sono entrambe infinitesime rispetto a k.

iii. Per provare quest'ultima disuguaglianza usiamo le proprietà del prodotto scalare, precisamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Infatti possiamo scrivere che

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(s)|ds = \int_0^\pi 1 \cdot |f(s)|ds = (1|f)_2 \le \|1\|_2\|f\|_2 = \left[\int_0^\pi ds\right]^{1/2}\left[\int_0^\pi |f(s)|^2 ds\right]^{1/2} = \sqrt{\pi}\|f\|_2$$

ottenendo in questo modo la tesi desiderata. ■

Esercizio 5. *Nello spazio* $C^0[-1,1]$ *si provi che, per* $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *si ha*
i. le funzioni $f_k(x) = e^{-kx^2}$ *costituiscono una successione di Cauchy rispetto a* $\|\cdot\|_2$,
ii. le funzioni $f_k(x) = e^{-kx^2}$ *non sono una successione di Cauchy rispetto a* $\|\cdot\|_\infty$,
iii. le funzioni $f_k(x) = e^{-|x|/k}$ *costituiscono una successione di Cauchy rispetto a* $\|\cdot\|_\infty$,

Discussione. i. & ii. La successione $f_k(x) = e^{-kx^2}$ è una successione di funzioni limitate, positive e pari, quindi vale

$$\|f_k\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} e^{-kx^2} = f_k(0) = 1 \ge e^{-kx^2} \qquad \text{per ogni } x \in [-1,1] \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N}$$

però la successione converge puntualmente ad una funzione discontinua, infatti si ha

$$f_k(x) \longrightarrow f_\infty(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \in [-1,0) \cup (0,1] \end{cases} \qquad \text{per } k \longrightarrow +\infty$$

Dal punto di vista della norma integrale abbiamo che

$$\begin{aligned}\|f_k - f_{k+j}\|_2^2 &= \int_{[-1,1]} |f_k(x) - f_{k+j}(x)|^2 dx = \int_{[-1,1]} e^{-2kx^2}|1 - e^{-2jx^2}|^2 dx \le \int_{[-1,1]} e^{-2kx^2} dx \\ &= \int_{[-\sqrt{k},\sqrt{k}]} e^{-2s^2}\frac{1}{\sqrt{k}} ds \le \frac{1}{\sqrt{k}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2s^2} ds = \frac{C}{\sqrt{k}} \longrightarrow 0 \qquad \text{per } k \longrightarrow +\infty\end{aligned}$$

quindi la successione è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$.
Rispetto alla norma uniforme abbiamo che

$$\|f_k - f_{k+j}\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]}\left[e^{-kx^2} - e^{-(k+j)x^2}\right] = \left[\frac{k}{k+j}\right]^{k/j}\frac{j}{k+j} \longrightarrow 1 \qquad \text{per } j \longrightarrow +\infty$$

e il limite calcolato mostra che la successione non può essere di Cauchy rispeto a $\|\cdot\|_\infty$, visto che per k fissato la successione tende ad 1 rispetto all'indice j.
iii. La funzione $f_k(x) = e^{-|x|/k}$ è una funzione positive, pari e decrescente su $[0,1]$, e notiamo che

$$f_k(x) = e^{-|x|/k} \longrightarrow 1 \qquad \text{per ogni } x \in [-1,1]$$

Poiché vale

$$e^{x/(k+j)} - e^{-x/k} = e^{-x/k}\left[e^{jx/k(k+j)} - 1\right] \le e^{-x/k}\left[e^{x/k} - 1\right] = 1 - e^{x/k} \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

segue che

$$\|f_k - f_{k+j}\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]}\left[e^{-|x|/(k+j)} - e^{-|x|/k}\right] \le \max_{x\in[-1,1]}\left[1 - e^{-|x|/k}\right] = \left[1 - e^{-1/k}\right] \longrightarrow 0 \qquad \text{per } k \longrightarrow +\infty$$

il che ci permette di concludere che la successione è di Cauchy, e quindi convergente alla funzione 1, nello spazio di Banach $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$. ■

Esercizio 6. *Sia* $E = \{p_1, \ldots, p_N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *un sottoinsieme finito, si dimostri che* E *è chiuso.*

Discussione. Mostriamo che un insieme composto da un solo punto $E_p = \{p\}$ è un insieme chiuso, dopo di che la tesi segue, ricordando che l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso.
Nella prima scheda abbiamo già provato questo risultato mostrando che l'insieme $E_p^c = \{x : \|x-p\|_2 \ne 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, ora proviamo che E_p è chiuso per successioni. Sia $\{x_k\} \subseteq E_p$, poiché l'insieme è composto da un solo elemento segue che $x_k = p$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi la successione è automaticamente convergente (in quanto

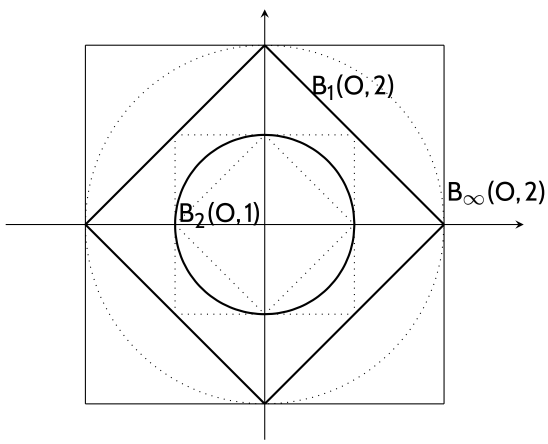
costante) ed E contiene il suo punto limite, che è sempre p! Si noti che questo ragionamento prova che E_p è compatto, non solo chiuso. ■

ESERCIZIO 7. *Si considerino gli spazi normati* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *e* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. *Si mostri che se* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *è aperto rispetto una delle tre norme lo è anche rispetto alle altre due.*

DISCUSSIONE. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto rispetto $\|\cdot\|_k$, cioè una delle tre norme studiate a lezione (nel nostro caso k può assumere uno tra i valori $1, 2, \infty$). Sappiamo che, per definizione, per ogni punto $x_0 \in A$ esiste un reale $r = r(x_0) > 0$ tale che

$$B_k(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - y\|_k < r\} \subseteq A \qquad \text{con } k \in \{1, 2, \infty\}$$

Per dimostrare che A è aperto anche in $\mathbb{R}^n$ dotato di una delle altre due distanze è sufficiente provare che esiste $B_j(x_0, r') \subseteq B_k(x_0, r')$ con $j \neq k$ e $j, k \in \{1, 2, \infty\}$. Il disegno che segue suggerisce la veridicità dell'affermazione Nella precedente figura sono illustrate alcune sfere concentriche (rispetto alle diverse norme) in modo da sug-



gerire la costruzione dell'inclusione. Si noti che, siccome i tre spazi normati hanno gli stessi aperti, segue che possiedono gli stessi chiusi e anche gli stessi compatti e che il concetto di funzione continua è indipendente da quale delle tre metriche stiamo considerando su $\mathbb{R}^n$! ■

ESERCIZIO 8. *Data un'applicazione lineare* $L : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *si provi che*
i. se $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *converge a* 0*, allora* $L(x_k) \longrightarrow 0$*,*
ii. se $x_k \longrightarrow x_0$*, allora* $L(x_k) \longrightarrow L(x_0)$*.*

DISCUSSIONE. i. Sappiamo, dai corsi di geometria afrontati, che ad ogni operatore lineare è possibile associare una matrice (dipendente dal sistema di riferimento in uso) tale che

$$L(x) = Ax = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right]_{i=1,\dots,n} \qquad \text{con } A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

fatta questa premessa possiamo procedere. Osserviamo che in $\mathbb{R}^n$ vale che

$$w \longrightarrow 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \|w\| \longrightarrow 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \|w\|_\infty \longrightarrow 0$$

allora possiamo ragionare come segue

$$\|L(x)\|^2 = \|Ax\|^2 = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)_{i=1,\dots,n}\right\|^2 = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right]^2 + \dots + \left[\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right]^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\|x\|_\infty\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right]^2 \|x\|_\infty^2 = \left[\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} |a_{ij}|\right]^2 \|x\|_\infty^2 = \|A\|_1^2\|x\|_\infty^2$$

ed estraendo una radice quadrata otteniamo che

$$\|Ax\| \leq \|A\|_1 \|x\|_\infty \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

la maggiorazione ottenuta implica l'affermazione da provare. Si noti che, in maniera surrettizia, abbiamo introdotto un'altra norma nello spazio delle matrici (la verifica che tale oggetto sia effettivamente una norma è, ovviamente, lasciata al lettore...). Si provi a dimostrare il risultato provato usando esclusivamente norme euclidee.
ii. La seconda parte del testo è una veloce conseguenza della prima parte, infatti, per linearità, possiamo scrivere che

$$0 \leq \|L(x) - L(x_0)\| = \|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\|_2 \leq \|A\|_1 \|x - x_0\|_\infty$$

quindi se $x \longrightarrow x_0$, cioè se $\|x - x_0\| \longrightarrow 0$, allora $L(x) \longrightarrow L(x_0)$. ■

ESERCIZIO 9. *Data un'applicazione lineare* $L : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *si provi l'esistenza di* $K > 0$ *tale che* $\|L(x)\| \leq K\|x\|$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$.

DISCUSSIONE. L'esercizio richiede la produzione di una maggiorazione simile, almeno come idea, ai calcoli fatti nel punto i dell'esercizio precedente. Sia $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice che rappresenta l'operatore nella base attuale, allora abbiamo che

$$\|L(x)\|_2^2 = \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left[\max_{ij} |a_{ij}| \right] |x_j| \right]^2$$

$$\left[\max_{ij} |a_{ij}| \right]^2 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n |x_j| \right]^2 = \left[\max_{ij} |a_{ij}| \right]^2 \sum_{i=1}^n n|x_j|^2 = n \left[\max_{ij} |a_{ij}| \right]^2 \|x\|_2^2 = n\|A\|_\infty^2 \|x\|_2^2$$

dalla maggiorazione fatta deduciamo che

$$\|L(x)\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty \|x\|_2 = K\|x\|_2 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

Si noti che, incidentalmente, abbiamo introdotto un'altra norma per lo spazio vettoriale delle matrici.

■

ESERCIZIO 10. *Sia* $g \in C^0[0,1]$ *una funzione positiva e definiamo*

$$C = \left\{ f : |f(x)| \leq g(x) \textit{ per ogni } x \in [0,1] \right\} \subseteq \left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty \right)$$

i. si mostri che C *è chiuso,*
ii. si descriva ∂C.

DISCUSSIONE. i. Per mostrare che C è chiuso possiamo procedere in due modi differenti: mostrare che C^c è aperto o provare che ogni successione covergente contenuta in C tende ad un elemento di C, discutiamo entrambi i modi.
Sia $\{f_k\} \subseteq C$ una successione convergente e denominiamo f_∞ il suo punto limite. Per definizione di C sappiamo che $|f_k(x)| \leq g(x)$ o, più chiaramente

(1) $\qquad -g(x) \leq f_k(x) \leq g(x) \qquad$ per ogni $x \in [0,1]$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$

Notiamo anche che, per ogni $x \in [0,1]$ valgono le seguenti maggiorazioni

$$0 \leq |f_k(x) - f_\infty(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f_\infty(x)| = \|f_k - f_\infty\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{per } k \longrightarrow +\infty$$

da cui possiamo dedurre che

$$f_k(x) \longrightarrow f_\infty(x) \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

Passando al limite per k che tende a $+\infty$ in (1) otteniamo che

$$-g(x) \leq f_\infty(x) \leq g(x) \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

cioè abbiamo provato che $f_\infty \in C$, provando che C è chiuso.

Analogamente possiamo provare a mostrare che C^c è aperto. Prendiamo in esame $h \in C^c$, dalla definizione segue che deve esistere almeno un punto $p \in [0,1]$ tale che $|h(p)| > g(p)$ e, per semplicità, supponiamo che $h(p) > g(p)$, o meglio che $h(p) - g(p) = \delta > 0$. Allora, per il teorema di permanenza del segno, possiamo affermare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $h(x) - g(x) > \delta/2$ per ogni $x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$.
A questo punto consideriamo l'insieme $B(h,r)$: C^c è aperto se riusciamo a mostrare che $B(h,r) \subseteq C^c$ per un opportuno $r > 0$. Poniamo $r = \delta/2$, allora segue che se $f \in B(h,\delta/2)$ possiamo affermare che

$$0 \leq |f(x) - h(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x) - h(x)| < \frac{1}{2}\delta \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

questo significa che per ogni $x \in [0,1]$ vale

$$h(x) - \frac{1}{2}\delta < f(x) < h(x) + \frac{1}{2}\delta$$

e siccome $h(x) - g(x) > \delta/2$ per ogni $x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$, abbiamo ottenuto che

$$g(x) < h(x) - \frac{1}{2}\delta < f(x) \qquad \text{per ogni } x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$$

il che implica che $B(h,\delta/2) \subseteq C^c$, e così abbiamo dimostrato che C^c è aperto, cioè che C è chiuso.
ii. A lezione abbiamo caratterizzato i punti della frontiera di C come punti che sono di accumulazione sia per C che per C^c, questo vuol dire che $b^* \in \partial C$ se e soltanto se esistono due successioni $\{a_k\} \subseteq C$ e $\{c_k\} \subseteq C^c$ tali che le distanze $\|a_k - b^*\|_\infty$ e $\|c_k - b^*\|_\infty$ sono infinitesime per $k \longrightarrow +\infty$.
Per quanto discusso nella prima parte dello svolgimento dell'esercizio possiamo affermare che

$$|a_k(x)| \leq g(x) \text{ per ogni } x \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad (|c_k(x)| - g(x)) > 0 \text{ per ogni } x \in [p-\varepsilon, p+\varepsilon]$$

si noti che sulle funzioni c_k non abbiamo ulteriori informazioni, il fatto che si trovi fuori dell'insieme C significa solo che assume valori maggiori (in valore assoluto) degli output della funzione g in (almeno) un punto dell'intervallo $[0,1]$ e nulla più...
Siccome abbiamo già osservato che

$$\begin{matrix} 0 \leq |b^*(x) - a_k(x)| \leq \|a_k - b^*\|_\infty \longrightarrow 0 \\ 0 \leq |b^*(x) - c_k(x)| \leq \|c_k - b^*\|_\infty \longrightarrow 0 \end{matrix} \qquad \text{per ogni } x \in [0,1]$$

possiamo dedurre che

$$a_k(p) \longrightarrow b^*(p) \qquad \text{e} \qquad c_k(p) \longrightarrow b^*(p)$$

da cui ricaviamo che

$$|b^*(p)| \leq g(p) \qquad \text{e} \qquad |b^*(p)| \geq g(p)$$

Le due disuguaglianze ottenute ci permettono di caratterizzare l'insieme ∂C, infatti abbiamo mostrato che

$$\partial C = \left\{ f \in C^0([0,1]) : \begin{matrix} |f(x)| \leq g(x) \text{ per ogni } x \in [0,1] \\ \text{esiste } p \in [0,1] \text{ tale che } |f(p)| = g(p) \end{matrix} \right\}$$

■

Esercizio 11. *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{5x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + 3x_2^2}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\pi \ln(1+x_1^2)x_2}{x_1x_2} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x_1^4}{x_2(x_1^2+x_2^2)} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x_1x_2}}{1+2x_1^2+3x_2^2}$$

Discussione. Discutiamo i limiti nell'ordine proposto dal testo dell'esercizio.
Nel calcolo del primo limite usiamo le coordinate polari per ottenere che

$$\left| \frac{5x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+3x_2^2}} \right| = \left| \frac{5r^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r\sqrt{1+2\sin^2(\theta)}} \right| = 5|r| \cdot \left| \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1+2\sin^2(\theta)}} \right| \leq \frac{5}{2} r \longrightarrow 0 \qquad \text{per } r \longrightarrow 0^+$$

dove l'ultima maggiorazione segue dal fatto che

$$\left| \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1+2\sin^2(\theta)}} \right| \leq \left| \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1}} \right| = \frac{1}{2}|\sin(2\theta)| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni } \theta \in \mathbb{R}$$

Per il secondo limite sfruttiamo la struttra di prodotto per scrivere

$$\frac{\pi \ln(1+x_1^2)x_2}{x_1x_2} = \pi \frac{\ln(1+x_1^2)}{x_1}\frac{x_2}{x_2} = \pi \frac{\ln(1+x_1^2)}{x_1} \simeq \pi \frac{x_1^2}{x_1} = \pi x_1 \longrightarrow 0 \qquad \text{per } x \longrightarrow 0$$

Notiamo che

$$\frac{x_1^4}{x_2(x_1^2+x_2^2)} = \frac{r^4}{r^3\sin(\theta)} = \frac{r}{\sin(\theta)}$$

il cui limite (per $r \longrightarrow 0$) non esiste, infatti è sufficiente considerare le due seguenti successioni di punti che convergono ad O

$$x_k = \left(0, \frac{1}{1+k^2}\right) \qquad \text{da cui abbiamo} \qquad \frac{(x_k)_1^4}{(x_k)_2\left((x_k)_1^2+(x_k)_2^2\right)} = 0 \longrightarrow 0$$

$$y_k = \left(e^{-k}, e^{-3k}\right) \qquad \text{da cui otteniamo} \qquad \frac{(y_k)_1^4}{(y_k)_2\left((y_k)_1^2+(y_k)_2^2\right)} = \frac{e^{-4k}}{e^{-3k}\left(e^{-2k}+e^{-4k}\right)} \longrightarrow +\infty$$

Per l'ultimo limite è sufficiente osservare che

$$\left|\frac{\sqrt{|x_1x_2|}}{1+2x_1^2+3x_2^2}\right| \leq \sqrt{|x_1x_2|} = r\sqrt{|\cos(\theta)\sin(\theta)|} \leq r \longrightarrow 0 \qquad \text{per } r \longrightarrow 0^+$$

il che ci permette di concludere l'esercizio. ■

ESERCIZIO 12. *Identificare il dominio massimale e calcolare le derivate parziali del primo e del secondo ordine, cioè ∂_j e ∂_{ji} con $j, i = 1, 2, 3$, delle seguenti funzioni*

$$f(x_1,x_2) = (x_1^2+3x_2^2)\ln(2x_1^2+x_2^2) \qquad g(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2} \qquad h(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2}$$

DISCUSSIONE. La funzione f ha dominio massimale $A_f = \{2x_1^2+x_2^2\}$, ovvero $A_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, in tutti i punti del dominio la funzione è prodotto e composizione di funzioni regolari, quindi $f \in C^\infty(A_f)$, in particolare possiamo calcolare le derivate parziali ricorrendo alle usuali regole di derivazione

$$\partial_1 f(x) = 2x_1\ln(2x_1^2+x_2^2) + (x_1^2+3x_2^2)\frac{4x_1}{2x_1^2+x_2^2} \qquad \partial_2 f(x) = 6x_2\ln(2x_1^2+x_2^2) + (x_1^2+3x_2^2)\frac{2x_2}{2x_1^2+x_2^2}$$

$$\partial_{11} f(x) = 2\ln(2x_1^2+x_2^2) + \frac{24x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 + 12x_2^4}{(2x_1^2+x_2^2)^2} \qquad \partial_{12} f(x) = \partial_{21} f(x) = \frac{4(12x_1^3x_2 + x_1x_2^3)}{(2x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$\partial_{22} f(x) = 6\ln(2x_1^2+x_2^2) + \frac{4x_1^4+34x_1^2x_2^2+6x_2^4}{(2x_1^2+x_2^2)^2}$$

La funzione g ha dominio massimale $A_g = \mathbb{R}^3$, visto che l'espressione della legge ha senso per qualsiasi input $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, in quanto sotto la radice quadrata appare una somma di quadrati, cioè una quantità mai negativa. Come prima la funzione è molto regolare, per cui calcoliamo le derivate parziali del primo ordine della funzione usando le ben note regole di derivazione

$$\partial_1 g(x_1,x_2,x_3) = \frac{4x_1}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{1/2}} \qquad \partial_2 g(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{1/2}}$$

$$\partial_3 g(x_1,x_2,x_3) = \frac{2x_3}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{1/2}}$$

Derivando le funzioni ottenute otteniamo le derivate parziali del secondo ordine

$$\partial_{11}g(x_1,x_2,x_3) = \frac{4+4x_2+8x_3^2}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{3/2}} \qquad \partial_{12}g(x_1,x_2,x_3) = -\frac{4x_1x_2}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{3/2}}$$
$$\partial_{13}g(x_1,x_2,x_3) = -\frac{16x_1x_3}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{3/2}} \qquad \partial_{22}g(x_1,x_2,x_3) = \frac{1+4x_1^2+2x_3^2}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{3/2}}$$
$$\partial_{23}g(x_1,x_2,x_3) = -\frac{2x_2x_3}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{3/2}} \qquad \partial_{33}g(x_1,x_2,x_3) = \frac{1+4x_1^2+x_2^2}{\left[1+4x_1^2+x_2^2+2x_3^2\right]^{3/2}}$$

Lasciamo al lettore il calcolo delle derivate mancanti, cioè $\partial_{21}g$, $\partial_{31}g$ e $\partial_{32}g$.
Anche la funzione h è ben definita in tutto lo spazio, quindi $A_h = \mathbb{R}^3$, per le derivate parziali procediamo come fatto sopra

$$\partial_1 h(x_1,x_2,x_3) = -2x_1e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2} \qquad \partial_2 h(x_1,x_2,x_3) = -10x_2e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2}$$
$$\partial_3 h(x_1,x_2,x_3) = -14x_3e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2}$$
$$\partial_{11}h(x_1,x_2,x_3) = 2(2x_1^2-1)e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2} \qquad \partial_{12}h(x_1,x_2,x_3) = 20x_1x_2e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2}$$
$$\partial_{13}h(x_1,x_2,x_3) = 28x_1x_3e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2} \qquad \partial_{22}h(x_1,x_2,x_3) = 10(10x_2^2-1)e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2}$$
$$\partial_{23}h(x_1,x_2,x_3) = 70x_2x_3e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2} \qquad \partial_{33}h(x_1,x_2,x_3) = 14(14x_3^2-1)e^{-x_1^2-5x_2^2-7x_3^2}$$

questi ultimi calcoli (se corretti) concludono l'esercizio. ∎

ESERCIZIO 13. *Data la funzione* $f(x_1,x_2) = (x_1-2)^2x_2^2$
i. studiare la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$*,*
ii. calcolare, se esistono, le derivate direzionali $\partial_w f$.

DISCUSSIONE. i. Dalla teoria studiata sappiamo che il concetto di differenziabilità in un punto è equivalente all'esistenza dell'iperpiano tangente nel corrispondente punto del grafico della funzione o alla validitá della formula (del primo ordine) di Taylor, quindi scriviamo subito l'espressione della formula di Taylor (o dell'iperpiano tangente) centrata in x

$$T(x,w) = f(x) + \nabla f(x)\cdot w = (x_1-2)^2x_2^2 + 2((x_1-2)x_2^2,(x_1-2)^2x_2)\cdot(w_1,w_2)$$

Se la funzione è differenziabile in un punto $x \in \mathbb{R}^2$, allora deve valere che

$$\lim_{w\longrightarrow 0} \frac{f(x+w)-f(x)-\nabla f(x)\cdot w}{\|w\|_2} = 0$$

cioè se

$$\frac{f(x+w)-f(x)-\nabla f(x)\cdot w}{\|w\|_2} = \frac{(x_1+w_1-2)^2(x_2+w_2)^2-(x_1-2)^2x_2^2-2((x_1-2)x_2^2,(x_1-2)^2x_2)\cdot(w_1,w_2)}{[w_1^2+w_2^2]^{1/2}} \longrightarrow 0$$

per $w \longrightarrow 0$. Svolgendo alcuni calcoli sulla precedente espressione e passando a coordinate polari $w_1 = r\cos(\theta)$ e $w_2 = r\sin(\theta)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{f(x+w) - f(x) - \nabla f(x)\cdot w}{\|w\|_2} &= \frac{[(x_1-2)^2 + 2(x_1-2)w_1 + w_1^2](x_2^2 + 2x_2w_2 + w_2^2)}{[w_1^2 + w_2^2]^{1/2}} \\ &\quad - \frac{(x_1-2)^2x_2^2 + 2(x_1-2)x_2^2w_1 + 2(x_1-2)^2x_2w_2}{[w_1^2+w_2^2]^{1/2}} \\ &= \frac{4(x_1-2)x_2w_1w_2 + x_2^2w_1^2 + (x_1-2)^2w_2^2 + 2(x_1-2)w_1w_2^2 + 2x_2w_1^2w_2 + w_1^2w_2^2}{[w_1^2+w_2^2]^{1/2}} \\ &= 4(x_1-2)x_2 r\cos(\theta)\sin(\theta) + x_2^2 r\cos^2 + (x_1-2)^2 r\sin^2(\theta) \\ &\quad + 2(x_1-2)r^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + 2x_2r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^3\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\end{aligned}$$

mandando $r \longrightarrow 0^+$ si ottiene l'affermazione desiderata.
ii. La teoria ci dice che per le funzioni differenziabili vale $\partial_w f(p) = \nabla f(p)\cdot w$, quindi segue che

$$\begin{aligned}\partial_w f(x) = \nabla f(x)\cdot w &= 2((x_1-2)x_2^2, (x_1-2)^2x_2)\cdot(w_1,w_2) = 2(x_1-2)x_2^2w_1 + 2(x_1-2)^2x_2w_2 \\ &= 2(x_1-2)x_2[(x_2,(x_1-2))\cdot(w_1,w_2)]\end{aligned}$$

■

ESERCIZIO 14. *Data*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3}{\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]^a} & (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & (x,y) = (1,1)\end{cases}$$

studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità di f *al variare del parametro* $a \in \mathbb{R}$.

DISCUSSIONE. Osserviamo subito che la funzione per $(x,y) \neq (1,1)$ è un rapporto tra un polinomio un polinomio elevato a potenza, inoltre il denominatore è sempre non nullo, le funzioni sono funzioni di classe C^∞, quindi il rapporto è differenziabile (e quindi continuo e derivabile) in tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$, quindi possiamo concentrarci sullo studio della funzione nel punto $(1,1)$.
Rammentiamo che f è continua nel punto $(1,1)$ se è vero che

$$|f(x,y) - f(1,1)| = \left|\frac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^a}\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{per } (x,y) \longrightarrow (1,1)$$

Esprimendo x e y in coordinate polari centrate nel punto $(1,1)$, cioè ponendo

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos(\theta) \\ y = 1 + \rho\sin(\theta)\end{cases}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^a}\right| &= \left|\frac{(1+\rho\cos(\theta) - 1 - \rho\sin(\theta))^3}{((\rho\cos(\theta))^2 + (\rho(\sin(\theta)))^2)^a}\right| = \frac{\rho^3|\cos(\theta)-\sin(\theta)|^3}{\rho^{2a}} \\ &= \rho^{3-2a}|\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 \leq C\rho^{3-2a}\end{aligned}$$

infatti sappiamo che $|\cos(\theta)|, |\sin(\theta)| \leq 1$ e quindi segue la disuguaglianza

$$|\cos(\theta) - \sin(\theta)|^3 \leq [|\cos(\theta)| + |\sin(\theta)|]^3 \leq 8 \qquad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi]$$

Poiché la maggiorazione ottenuta è uniforme rispetto alla variabile θ e la quantità risulta infinitesima se $(3 - 2a) > 0$, abbiamo provato che f è continua in $(1,1)$ se $a < 3/2$. Se $a = 3/2$ abbiamo che

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^a} = (\cos(\theta) - \sin(\theta))^3$$

che non è infinitesima per ρ che tende a 0. Mentre se $a > 3/2$ si trova

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^3}{((x-1)^2+(y-1)^2)^a} = \frac{(\cos(\theta)-\sin(\theta))^3}{\rho^{2a-3}}$$

che diverge, per ρ che tende a 0, se $\theta \neq \pi/4, 5\pi/4$.
Per quanto riguarda la derivabilità, calcoliamo i rapporti dei limiti incrementali

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^3}{h^{2a+1}} = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{2-2a} = \begin{cases} 0 & \text{se } a<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ \nexists & \text{se } a>1 \end{cases}$$

e analogamente

$$\lim_{k\longrightarrow 0}\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} = \lim_{k\longrightarrow 0}\frac{-k^3}{k^{2a+1}} = \lim_{k\longrightarrow 0} -k^{2-2a} = \begin{cases} 0 & \text{se } a<1 \\ -1 & \text{se } a=1 \\ \nexists & \text{se } a>1 \end{cases}$$

Quindi f è derivabile in $(1,1)$ per ogni $a \leq 1$ e abbiamo che

$$\partial_1 f(1,1) = \begin{cases} 0 & \text{se } a<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \partial_2 f(1,1) = \begin{cases} 0 & \text{se } a<1 \\ -1 & \text{se } a=1 \end{cases}$$

Se $a > 1$, la funzione f, non essendo derivabile, non può essere differenziabile in $(1,1)$.
Invece se $a < 1$ possiamo scrivere

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{f(1+h,1+k)-f(1,1)-\partial_1 f(1,1)h-\partial_2 f(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{(h-k)^3}{(h^2+k^2)^{a+1/2}}$$
$$= \lim_{\rho\longrightarrow 0^+}\frac{\rho^3(\cos(\theta)-\sin(\theta))^3}{\rho^{1+2a}} = 0$$

perché $3-(1+2a) > 0$ per ogni $a < 1$ e $|\cos(\theta)-\sin(\theta)|^3 \leq 8$.
Infine se $a = 1$ otteniamo

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{f(1+h,1+k)-f(1,1)-\partial_1 f(1,1)h-\partial_2 f(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot\left[\frac{(h-k)^3}{h^2+k^2}-h+k\right]$$
$$= \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{(h-k)^3-h^3-hk^2+h^2k+k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{-2h^2k+2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$
$$= \lim_{\rho\longrightarrow 0^+} 2\cos(\theta)\sin(\theta)(\sin(\theta)-\cos(\theta))$$

e questo limite non esiste, come si vede testando i valori $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$.
Dunque f è differenziabile in $(1,1)$ solo per $a < 1$. ∎

ESERCIZIO 15. *Stabilire se le seguenti funzioni sono continue, derivabili, differenziabili o di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^3 \qquad g(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3-x_2^3}{x_1^2+x_2^2+2x_3^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad h(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2-x_3^2$$

Calcolare le equazioni cartesiane del piano tangente al grafico di f *in* $(1,1,2)$*, del piano tangente al grafico di* g *in* $(1,0,1)$ *e del piano tangente al grafico di* h *in* $(0,0,0)$*.*

DISCUSSIONE. Le funzioni f e h sono palesamente di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, in quanto polinomi, quindi sono funzioni continue e derivabili e differenziabili. In particolare vale

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x, 2y, 3z^2\right) \qquad \text{e} \qquad \nabla h(x_1,x_2,x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$$

e ricordando l'espressione del piano tangente, possiamo ricavare rapidamente l'equazione del piano tangente per la funzione f

$$\begin{aligned} w &= f(1,1,2) + \nabla f(1,1,2) \cdot (x-1, y-1, z-2) = 10 + (2,2,12) \cdot (x-1, y-1, z-2) \\ &= 10 + 2x - 2 + 2y - 2 + 12z - 24 \\ &= 2x + 2y + 12z + 18 \end{aligned}$$

mentre per la funzione h otteniamo

$$x_4 = h(0,0,0) + \nabla h(0,0,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 + (0,0,0) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0$$

La funzione g è sicuramente regolare in $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, cominciamo lo studio della continuità in O usando le coordinate sferiche

$$\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2} = \frac{r^3 \sin^3(\phi)(\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta))}{r^2[1 + \cos^2(\phi)]} = \left[\frac{\sin^3(\phi)(\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta))}{1 + \cos^2(\phi)}\right] r \longrightarrow 0$$

per $r \longrightarrow 0^+$, visto che

$$\left|\frac{\sin^3(\phi)(\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta))}{1 + \cos^2(\phi)}\right| \leq |\sin^3(\phi)| \cdot |\cos^3(\theta) - \sin^3(\theta)| \leq |\cos(\theta)|^3 + |\sin(\theta)|^3 \leq 2 \qquad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi]$$

Riguardo alle derivate parziali in O vale che

$$\begin{aligned} \partial_1 g(O) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(h,0,0) - g(0,0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^3}{h(h^2)} = 1 \\ \partial_2 g(O) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(0,h,0) - g(0,0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} -\frac{h^3}{h(h^2)} = -1 \\ \partial_1 g(O) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(0,0,h) - g(0,0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{0}{h(2h^2)} = 0 \end{aligned}$$

per cui possiamo dire che la funzione è derivabile in O e scrivere che $\nabla g(O) = (1, -1, 0)$.
Studiare la differenziabilità in O significa, in questo caso, stimare il seguente rapporto

$$\begin{aligned} \frac{g(w) - \nabla g(O) \cdot w}{\|w\|_2} &= \frac{1}{\|w\|_2} \cdot \left[\frac{w_1^3 - w_2^3}{w_1^2 + w_2^2 + 2w_3^2} - (1, -1, 0) \cdot (w_1, w_2, w_3)\right] \\ &= \frac{-w_1 w_2^2 - 2w_1 w_3^2 + w_1^2 w_2 + 2w_2 w_3^2}{[w_1^2 + w_2^2 + 2w_3^2][w_1^2 + w_2^2 + w_3^2]^{1/2}} \\ &= \frac{r^3 \sin(\phi)[\sin^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos(\theta) - \sin(\theta)) + 2\cos^2(\phi)(\sin(\theta) - \cos(\theta))]}{r^3(1 + \cos^2(\phi))^{1/2}} \end{aligned}$$

semplificando r rimane un quoziente che dipende da θ e che in generale non è infinitesimo, quindi la funzione g non è differenziabile in O. Infine, per $x \neq O$ abbiamo che

$$\nabla g(x) = \left(\frac{x_1^4 + 3x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2^3 + 6x_1^2 x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)^2}, \frac{-3x_1^2 x_2^2 - x_2^4 - 2x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2^3 - 6x_2^2 x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)^2}, \frac{x_2^3 - x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)^2}\right)$$

e, in particolare, vale

$$\nabla g(1,0,1) = \left(\frac{7}{9}, 0, -\frac{1}{9}\right)$$

da cui ricaviamo l'equazione del piano tangente nel punto

$$x_4 = g(1,0,1) + \nabla g(1,0,1) \cdot (x_1 - 1, x_2, x_3 - 1) = \frac{1}{3} + \left(\frac{7}{9}, 0, -\frac{1}{9}\right) \cdot (x_1 - 1, x_2, x_3 - 1) = -\frac{1}{3} + \frac{7}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_3$$

concludendo l'esercizio. ■

ESERCIZIO 16. *Sia* $u(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$, *con* $x \in \mathbb{R}^n$, *si calcolino le seguenti quantità*

$$\partial_i u(x) \quad \textit{per } i = 1, \dots, n \qquad \partial_w u(x) \quad \textit{per } w \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \qquad \nabla u(x) \qquad \Delta u(x)$$

DISCUSSIONE. Poiché possiamo scrivere che

$$u(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2 = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2\right] \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

segue, per calcolo diretto, che

$$\begin{aligned}
&\partial_i u(x) = \frac{1}{2}\partial_i\left[x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2\right] = \frac{1}{2}2x_i = x_i \qquad \text{per ogni } i = 1, ..., n \\
&\nabla u(x) = (\partial_1 u(x), ..., \partial_n u(x)) = (x_1, ..., x_n) = x \\
&\partial_w u(x) = \nabla u(x) \cdot w = x \cdot w = \sum_{i=1}^n w_i x_i \\
&\partial_{ii} u(x) = \partial_i\left[\partial_i u(x)\right] = \partial_i x_i = 1 \\
&\Delta u(x) = \partial_{11} u(x) + .. + \partial_n u(x) = 1 + ... + 1 = n
\end{aligned}$$

Si noti che, essendo $\partial_i u(x) = x_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, la funzione è differenziabile in tutto lo spazio e possiamo dedurre le derivate direzionali tramite il prodotto scalare del gradiente con il versore direzione che ci interessa. ■

ESERCIZIO 17. *Sia* $u(x) = \frac{1}{\|x\|_2}$, *con* $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, *si calcolino le seguenti quantità*

$$\partial_i u(x) \quad \textit{per } i = 1, 2, 3 \qquad \partial_w u(x) \quad \textit{per } w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \qquad \nabla u(x) \qquad \Delta u(x)$$

DISCUSSIONE. Procediamo esattamente come abbiamo fatto nello svolgimento dell'esercizio precedente, quindi abbiamo

$$u(x) = \frac{1}{\|x\|_2} = \left[x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2\right]^{-1/2} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$$

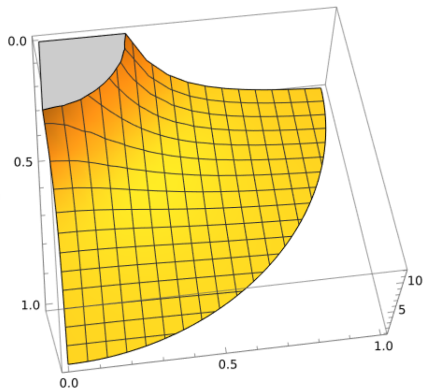
da cui, per calcolo diretto, ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\partial_i u(x) = -\frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2\right]^{-3/2} 2x_i = -\frac{x_i}{\|x\|_2^3} \qquad \text{per ogni } i = 1, ..., n \\
&\nabla u(x) = (\partial_1 u(x), ..., \partial_n u(x)) = -\frac{x}{\|x\|_2^3} \\
&\partial_w u(x) = \nabla u(x) \cdot w = -\frac{x}{\|x\|_2^3} \cdot w = -\frac{1}{\|x\|_2^3}\sum_{i=1}^n w_i x_i \\
&\partial_{ii} u(x) = \partial_i\left[\partial_i u(x)\right] = -\partial_i\left[\frac{x_i}{\left[x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2\right]^{3/2}}\right] = -\frac{\|x\|_2^3 - x_i\frac{3}{2}\|x\|_2 \cdot 2x_i}{\left[x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2\right]^3} = -\frac{\|x\|_2^2 - 3x_i^2}{\|x\|_2^5} \\
&\Delta u(x) = \partial_{11} u(x) + .. + \partial_n u(x) = \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3\|x\|_2^2}{\|x\|_2^5} = 0
\end{aligned}$$

sorprendentemente (?) abbiamo ottenuto che il laplaciano della funzione è nullo, dove la funzione esiste. Le soluzioni dell'equazione differenziale $\Delta w(x) = 0$ sono dette funzioni armoniche, come vedremo in futuro tali funzioni hanno un ruolo interessante in varie questioni dell'analisi matematica e della fisica. Concludiamo la discussione inserendo un disegno di una parte del grafico della funzione

```
In[20]:= Plot3D[{1 / (x^2 + y^2)}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
          RegionFunction → Function[{x, y, z}, 0 < x^2 + y^2 ≤ 1]]
```

Out[20]=



Si noti che il grafico di u è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$, la figura si riferisce all'intersezione del grafico con il sottospazio vettoriale $x_3 = 0$. ■

ESERCIZIO 18. *Sia* $u(x) = \ln(\|x\|_2)$*, con* $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*, si calcolino le seguenti quantità*

$$\partial_i u(x) \quad per\ i = 1,2 \qquad \nabla u(x) \qquad \Delta u(x)$$

DISCUSSIONE. Osserviamo che

$$u(x) = \ln\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \ln\left(\left[x_1^2 + x_2^2\right]^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

e quindi segue che

$$\partial_j u(x) = \partial_j \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \frac{1}{2}\frac{2x_j}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_j}{\|x\|_2^2}$$

$$\nabla u(x) = \left(\frac{x_1}{\|x\|_2^2}, \frac{x_2}{\|x\|_2^2}\right) = \frac{x}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x}{\|x\|_2^2}$$

$$\partial_{jj} u(x) = \partial_j \left[\frac{x_j}{x_1^2 + x_2^2}\right] = \frac{(x_1^2 + x_2^2) - x_j(2x_j)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_i^2 - x_j^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \qquad \text{con } i \neq j$$

$$\Delta u(x) = \partial_{11} u(x) + \partial_{22} u(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0 \qquad \text{per ogni } x \neq 0$$

L'ultimo calcolo mostra che $u(x) = \ln(\|x\|_2)$ è una funzione armonica nel suo dominio, cioè in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, torneremo sull'argomento più avanti. ■

ESERCIZIO 19. *Sia* $w(x) = \frac{1}{2n}(1 - \|x\|_2^2)$*, con* $x \in B = B(0,1)$*, si verifichi che la funzione risolve il seguente problema*

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = 1 & x \in B \\ w(x) = 0 & x \in \partial B \end{cases}$$

inoltre si calcoli $\partial_n w(x)$ *per* $x \in \partial B$*, dove* n *è il versore normale* ∂B *in* x*.*

DISCUSSIONE. Cominciamo scrivendo per esteso l'espressione della funzione

$$w(x) = \frac{1}{2n}\left[1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2\right] \qquad x \in B = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

e, grazie alle usuali (e ben note) regole di derivazione calcoliamo le derivate parziali (del primo e del secondo ordine) della funzione

$$\partial_j w(x) = \frac{1}{2n}\partial_j\left[1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2\right] = -\frac{2x_j}{2n} = -\frac{1}{n}x_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

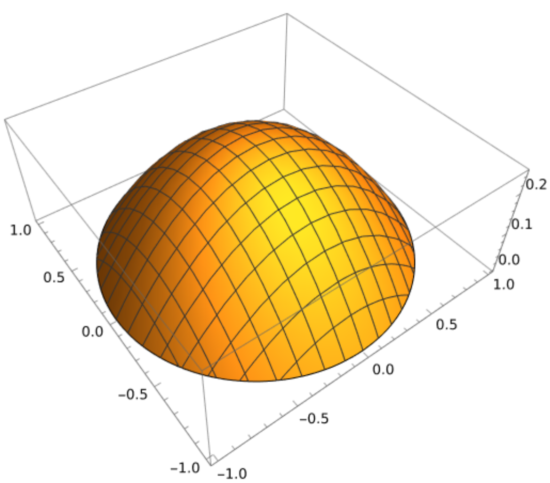
$$\partial_{ji} w(x) = \partial_i\left[\partial_j w(x)\right] = \partial_i\left[-\frac{x_j}{n}\right] = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

$$\Delta w(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{jj} w(x) = \partial_{11} w(x) + \partial_{22} w(x) + \ldots + \partial_{nn} w(x) = -\frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{n} = -1$$

l'ultima espressione ottenuta prova che la funzione w soddisfa l'equazione differenziale contenuta nel problema. Per concludere la prima parte dell'esercizio è sufficiente notare che se $x \in \partial B$ allora $\|x\|_2 = 1$, quindi vale $w(x) = (1 - \|x\|_2^2)/2n = (1 - 1)/2n = 0$. Come prima inseriamo una apprensentazione del grafico di w per il caso $n = 2$

```
In[21]:= Plot3D[{(1 - x^2 - y^2) / 4}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
          RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 ≤ 1], ViewPoint → Above]
```

Out[21]=



Per il calcolo della derivata direzionale facciamo affidamento al fatto che $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$, per cui abbiamo $\partial_n w(x) = \nabla w(x) \cdot n$, inoltre osserviamo che $x = n$ in ogni punto di ∂B, da cui ricaviamo che

$$\partial_n w(x) = \nabla w(x) \cdot x = -\frac{x}{n} \cdot x = -\frac{1}{n} \qquad \text{per ogni } x \in \partial B$$

■