Laplaciano

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \mathrm{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$$

Eq^{ne} di Laplace

$$\Delta u = 0$$

se u verifica laplace si dice armonica.

Eq^{ne} di Poisson

$$-\Delta u = f$$

assegnata.

+ cond^{ni} al bordo.

Sol^{ne} fondamentale dell'eq^{ne} di Laplace:

$$\phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln |x| & N = 2 \\[2ex] \dfrac{1}{N(N-2)\,\omega_N\,|x|^{N-2}} & N \geq 3 \end{cases}$$

misura della palla unitaria $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 1\}$

$$\omega_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

- ϕ è armonica fuori dall'origine
- singolare nell'origine
- $|\nabla \phi| \leq \dfrac{c}{|x|^{N-1}}$ integrabile vicino all'origine
- $|D^2 \phi| \leq \dfrac{c}{|x|^{N}}$ non integrabile " " ".
- Il motivo della scelta delle costanti si chiarirà oggi.

Sia $f(x): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con opportune ipotesi di regolarità e sommabilità.

Definiamo

$$u(x) = (f * \phi)(x) = (\phi * f)(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) f(y)\, dy \overset{x-y=\tilde{y}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) f(x-y)\, dy.$$

Formalmente (ma erroneamente) si ha $\boxed{\text{errato.}}$

$$\Delta u(x) = \Delta\left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) f(y)\, dy\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\Delta_x \phi(x-y)}_{0 \text{ per } y \neq x} f(y)\, dy$$

$$\cancel{= 0}$$

$$= -f(x)$$

TEOREMA (Sol^{ne} dell'eq^{ne} di Poisson in $\mathbb{R}^N$).

Sia $f(x) \in C^2_c(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto, cioè nulla fuori da un limitato.

Definiamo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) f(y)\, dy$$

Allora:

1) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$;

2) $-\Delta u(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$.

OSS. gli integrali sono in realtà su una regione limitata. Inoltre convergono perché

$$|\phi(y)|\underbrace{|f(x-y)|}_{\leq C} \leq c\,|\phi(y)| \leftarrow \text{integrabile vicino all'origine.}$$

DiM. 1).

$$e_i = (0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, 0)$$

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) \underbrace{\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}}_{\downarrow\, h_n \to 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)} dy.$$

Facciamo $h \to 0$.
per es. $h_n \to 0$

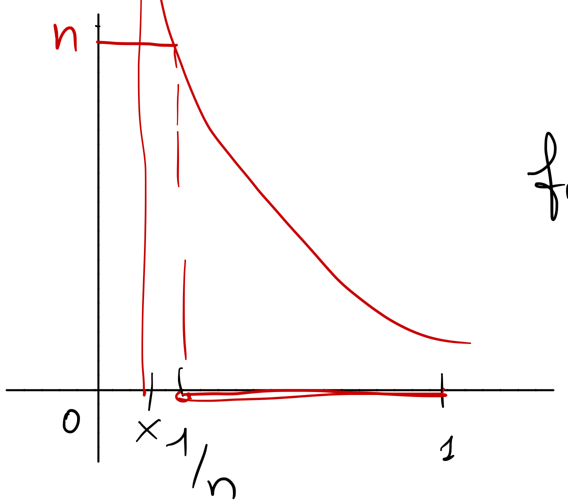
Apriamo parentesi: passaggio al limite sotto $\int$.

Supponiamo $f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in E \subset \mathbb{R} \ (\mathbb{R}^N)$

$$\overset{??}{\Longrightarrow} \quad \int_E f_n(x)\,dx \xrightarrow{?} \int_E f(x)\,dx$$

<u>No</u> $\quad E = (0,1) \subset \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se} \quad x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{se} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right) \end{cases}$$



$$f_n(x) \xrightarrow{n} \underset{\overset{\parallel}{f(x)}}{0} \qquad \forall x \in (0,1)$$

$$\underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{=1} \xrightarrow{?} \int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

<u>NO!</u>

TEOREMA (della convergenza dominata, o di Lebesgue).

$f_n(x)$, $f(x)$ integrabili su $E \subset \mathbb{R}^N$ (secondo Lebesgue) ?

Supponiamo $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\forall x \in E$

eccetto al più in un insieme di misura (volume) nulla, per esempio un pto in $\mathbb{R}$, una curva in $\mathbb{R}^2$, una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Supponiamo inoltre che esista una funzione $g(x)$ integrabile su E ($g \in L^1(E)$) t.c.

$|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in E$ tranne al più un insieme di misura nulla

($|f_n(x)| \leq g(x)$ q.o. in E).

Allora

$$\int_E f_n(x)\,dx \xrightarrow[n]{} \int_E f(x)\,dx$$

Applichiamolo alla nostra situazione.

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} =$$

$$= \int_{\cancel{\mathbb{R}^N}\ B} \phi(y) \underbrace{\boxed{\frac{f(x+h_n e_i-y)-f(x-y)}{h}}}_{\tilde{f}_n(y)}\, dy.$$

$$\xrightarrow{h_n \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

Facciamo $h \to 0$

per es. $h_n \to 0$

palla suff^te grande

$$\tilde{f}_n(y) \xrightarrow[n]{} \tilde{f}(y) = \phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

$$\forall y \in B \setminus \{0\}$$

Verifichiamo che $\exists$ $g(y)$ integrabile in B t.c.

$$|\tilde{f}_n(y)| \leq g(y) \qquad \text{q.o. in } B.$$

$$\| $$

$$|\phi(y)| \cdot \underbrace{\left|\frac{f(x+h_n e_i-y)-f(x-y)}{h}\right|}_{\overset{\text{Lagrange}}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h_n e_i-y)\right| \leq c} \leq c\,|\phi(y)|$$

integrabile in B.

$\theta \in (0,1)$

f_{x_i} continua e nulla fuori da B

Si applica la conv. dominata

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(x+h_n e_i) - u(x)}{h_n} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_B \phi(y) \frac{f(x+h_n e_i - y) - f(x-y)}{h_n} dy$$

$$= \int_B \phi(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\, dy .$$

Ripetendo questo calcolo, si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_B \phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)\, dy.$$

$\Longrightarrow$ u è derivabile 2 volte, e si può dimostrare che le derivate sono continue

2^a parte

Integrazione per parti, formule di Gauss-Green e thm. divergenza

Se $\underline{F}$ è un campo vettoriale C^1 e Ω è un aperto regolare limitato,

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} \underline{F} \cdot \underline{\nu}_e \, d\sigma.$$

versore normale esterno

Se $\underline{F} = \nabla u$, u di classe C^2.

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\nabla u \cdot \underline{\nu}_e}_{} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma}$$

$\frac{\partial u}{\partial \nu_e}$ derivata normale esterna

u, v di classe $C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega v \, \Delta u \, dx = \int_\Omega v \operatorname{div}(\nabla u)\, dx =$$

$$\left[\operatorname{div}(v \nabla u) = \sum_i (v \, u_{x_i})_{x_i} = v \, \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v \right]$$

$$= \int_\Omega \operatorname{div}(v \nabla u)\, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \overset{\text{thm divergenza}}{=}$$

$$= \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{\frac{\partial u}{\partial \nu}} \, d\sigma$$

$\shortparallel$

Riassumendo: $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\boxed{\int_\Omega v\,\Delta u\,dx = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma}$$

$$\Delta_x u(x) = \int_{\cancel{\mathbb{R}^N}\ B} \phi(y)\,\Delta_x f(x-y)\,dy =$$

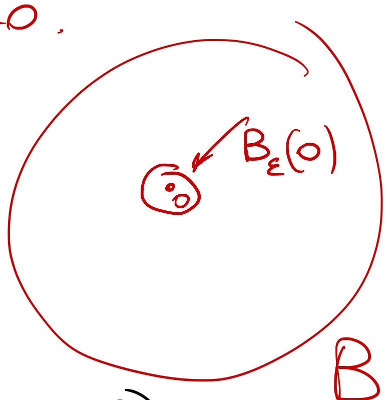
N.B. il segno resta uguale, sono derivate seconde

$$= \int_B \phi(y)\,\Delta_y f(x-y)\,dy = (*)$$

vorrei applicare la formula di integraz. per parti, ma non posso perché ϕ è singolare in $y=0$.

$\Longrightarrow$ isolamento della singolarità

$$(*) = \underbrace{\int_{B\setminus B_\varepsilon} \phi(y)\,\Delta_y f(x-y)\,dy}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon} \phi(y)\,\Delta_y f(x-y)\,dy}_{J_\varepsilon}$$



$J_\varepsilon \overset{?}{=} o_\varepsilon(1) =$

integrabile

$$|J_\varepsilon| \le \int_{B_\varepsilon} |\phi(y)|\,\underbrace{|\Delta_y f(x-y)|}_{\le c}\,dy \le c\int_{B_\varepsilon}|\phi(y)|\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

<u>$N=3$</u>

$$\int_{B_\varepsilon}|\phi(y)|\,dy = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\varepsilon c_N\,\frac{\sin\vartheta}{\rho}\,\rho^2\,d\rho =$$

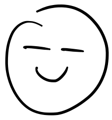
$$= c\int_0^\varepsilon \rho\,d\rho = c\,\varepsilon^2 \to 0$$

I_ε : applico l'integraz. per part.

$$I_\varepsilon = \int_{B\setminus B_\varepsilon} \phi(y)\, \Delta_y f(x-y)\, dy =$$

$$= -\int_{B\setminus B_\varepsilon} \nabla\phi(y)\cdot\nabla_y f(x-y)\, dy + \overset{=0}{\cancel{\int_{\partial B} \phi(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} f(x-y)\, d\sigma}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} \phi(y)\frac{\partial}{\partial \nu} f(x-y)\, d\sigma}_{K_\varepsilon}.$$

K_ε = 

$$|K_\varepsilon| \leq \int_{\partial B_\varepsilon} |\phi(y)|\, \underbrace{|\nabla f(x-y)|}_{\leq C}\, d\sigma \leq c \int_{\partial B_\varepsilon} |\phi(y)|\, d\sigma$$

(per es. $N=3$)
$$= c \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, d\sigma = c\, \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\, 4\pi\varepsilon^{\cancel{2}} \longrightarrow 0$$

Continuo a integrare per parti

$$I_\varepsilon = \underbrace{\int_{B\setminus B_\varepsilon} \underbrace{\Delta\phi(y)}_{=0} f(x-y)\, dy}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(y)\, f(x-y)\, d\sigma}_{H_\varepsilon}$$

$$H_\varepsilon = -\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)\, f(x-y)\, d\sigma$$

→ derivata normale interna al cerchietto.

$B \setminus B_\varepsilon$

$N \geq 3$

∂B_ε

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{N(N-2)\,\omega_N}\,\frac{1}{r^{N-2}}\right) = -\frac{\cancel{N-2}}{N\,\cancel{(N-2)}\,\omega_N}\,\frac{1}{r^{N-1}} =$$

$$= -\frac{1}{N\,\omega_N\, r^{N-1}}$$

$$H_\varepsilon = -\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{N\,\omega_N\,\varepsilon^{N-1}}\, f(x-y)\, d\sigma = -\fint_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\, d\sigma =$$

$N\omega_N \varepsilon^{N-1}$ è esattamente l'area della sferetta di raggio ε.

$N = 3 \implies N\omega_N\varepsilon^{N-1} = \cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\pi\,\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon^2$

$$= -\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} f(\tilde{y})\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -f(x)$$

$x - y = \tilde{y}$

$$\Delta u(x) = -f(x) + o_\varepsilon(1)$$

quindi $\quad -\Delta u(x) = f(x)$ $\square$

OSS 1) Abbiamo supposto $f \in C^2_c(\mathbb{R}^N)$.
In realtà basta meno, si può dimostrare che basta $f \in C^1$, e che vada a zero abbastanza velocemente all'infinito.

2) In realtà la soluzione fondamentale ϕ non è soluzione di $\Delta \phi = 0$
ma è sol^ne di $-\Delta\phi(y) = \delta_0(y)$
delta di Dirac.

$\delta_0(y)$ è una misura (cioè una funzione definita sugli insiemi E)

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in E \\ 0 & \text{se } 0 \notin E \end{cases}$$

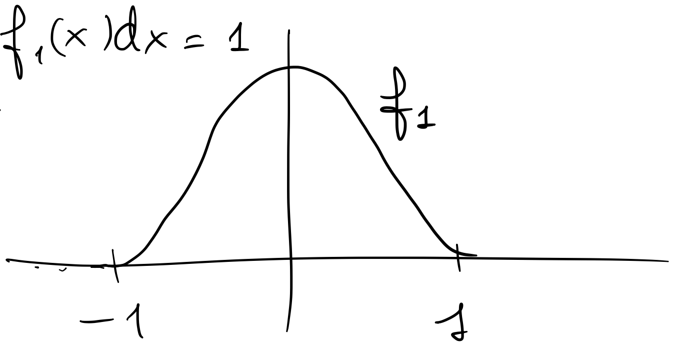
In alternativa, δ_0 può essere vista come un operatore lineare e continuo sull'insieme delle funzioni continue in $\mathbb{R}^N$.

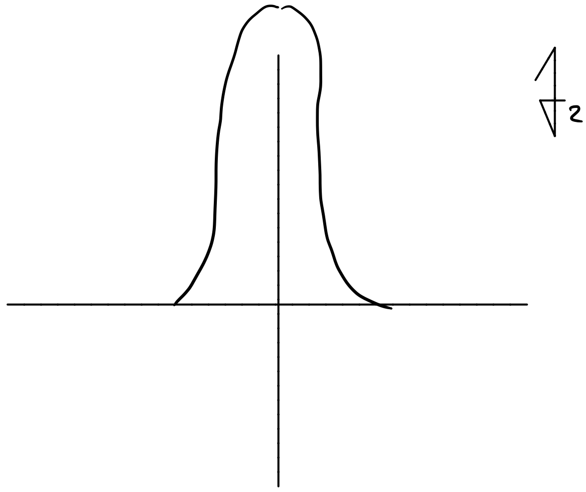
$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_0(x)\varphi(x) = \varphi(0)$$

notazione scorretta

Si può considerare δ_0 come il limite di una succ^ne di funzioni $\{f_k\}$ della forma

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx = 1$$





$$f_k(x) = k^N f(kx)$$

Sono funzioni (sempre più concentrate) con integrale 1

$$f_k \xrightarrow{k} \delta_0$$

$$\int_E f_k \varphi\, dx \to \int_E \delta_0 \varphi(x) = \varphi(0)$$

Aggiustiamo formalmente il conto fatto all'inizio.

$$-\Delta u(x) = -\Delta \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) f(y)\, dy \right) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \big(-\Delta_{\cancel{x}\, y} \phi \underbrace{(\cancel{x-y})}_{y-x}\big) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_x(y) f(y) = f(x)$$

$\square$

Proprietà delle funzioni armoniche ($\Delta u = 0$)

TEOREMA (proprietà della media delle f. armoniche)

Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω (Ω aperto di $\mathbb{R}^N$)

Allora $\forall\, B_r(x) \subset \Omega$

palla di centro x e raggio r.

$$u(x) = \fint_{B_r} u(y)\,dy = \fint_{\partial B_r} u(y)\,d\sigma$$