Prossime lezioni:

Lun 23/10 pomeriggio SPV 14:00 →
o Mar 24/10 " Mat. 14:30-15:00 →

Ven 27/10 ore 14:00 → 16:00 Sala videoconf. SPV.
Ven 3/11 ore 16:00 → 18:00 " " "
Ven 10/11 " " " " "
Ven 17/11 " " " " "

L.C. Evans - Partial Differentials Equations (AMS).

Cap. 2

Equazione di Laplace $\Delta u = \nabla^2 u = 0$

Equazione di Poisson $-\Delta u = -\nabla^2 u = f(x)$

$$u : \underset{\substack{\cup \\ \underline{x} = (x_1, \dots x_n)}}{\overset{\text{aperto}}{\Omega}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$n = 2$ $n = 3$ nei casi "fisici".

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(x) = \mathrm{div}(\nabla u) = \text{"}\nabla \cdot (\nabla u)\text{"} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})_{x_i}$$

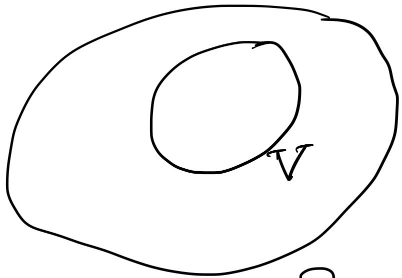
Questo operatore emerge in molte situazioni fisiche, in particolare:

diffusione del calore (u = temperatura)
diffusione di una sostanza chim (u = concentrazione).
potenziale elettrostatico (u = potenziale)
$n=2$ membrana elastica (u = altezza della membrana)

u = temperatura o concentrazione chimica.

$\underline{F}$ = densità di flusso relativo a u.

Situazione stazionaria:


Ω

$V \subset \Omega$ sottoregione regolare.

In una situazione stazionaria:

$$\text{Flusso uscente da } \partial V = \int_{\partial V} \underline{F} \cdot \underline{\nu}_e \, d\sigma = 0$$

normale esterno

teorema della divergenza

$$= \int_V \operatorname{div}(\underline{F}) \, dx$$

Ma questo è vero $\forall V$ regione regolare $\Rightarrow \operatorname{div}(\underline{F}) = 0$ in tutto Ω

La relazione tra F e u è la seguente

$$\underline{F} = -c \nabla u \quad , \quad c > 0.$$

$$0 = +\operatorname{div}(\underline{F}) = -c \operatorname{div}(\nabla u) = -c\Delta u.$$

Si ottiene quindi l'eq^{ne} di Laplace $-\Delta u = 0$.

Se invece forniamo energia (oppure iniettiamo o produciamo la sost. chimica) si arriva all'eq^{ne} di Poisson

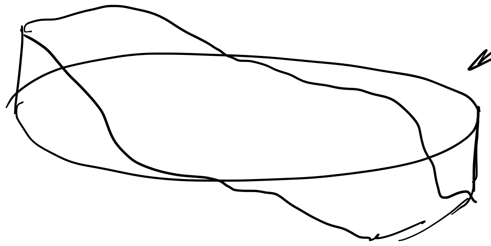
$$-\Delta u = f(x) \leftarrow \text{assegnata.}$$

Nel caso del calore, $f(x)$ si interpreta come una sorgente di calore diffuso.

In dim. 2 l'equazione di Poisson

$$-\Delta u = f(x) \iff -u_{xx} - u_{yy} = f(x)$$

modella l'altezza di una membrana elastica sottoposta alla forza f.



E' naturale imporre delle cond^{ni} al bordo, per esempio $u = 0$ al bordo $\partial\Omega$, oppure

$u(x) = g(x)$ su $\partial\Omega$ Cond^{ne} di Dirichlet.

<u>OSS</u> In dim. 1 l'eq^{ne} di Laplace/Poisson diventa

$$u'' = 0 \iff u(x) = ax + b$$

$$-u'' = f(x) \Rightarrow u'(x) = -\int_\alpha^x f(t)\,dt + c \Rightarrow$$

e, reintegrando, ottengo u.

$$u(x) = -\int_\alpha^x \left(\int_\alpha^t f(s)\,ds\right) dt + ax + b$$

dipendono dalle condizioni al contorno

Più interessante in 2/3/n variabili.

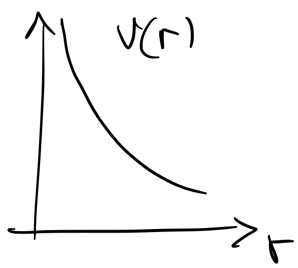
Cerchiamo una soluzione dell'eq^{ne} $\Delta u = 0$

cioè una funzione armonica.

Cerchiamo una soluzione radiale, cioè una soluzione della forma $u(x) = v(|x|) = v(r)$

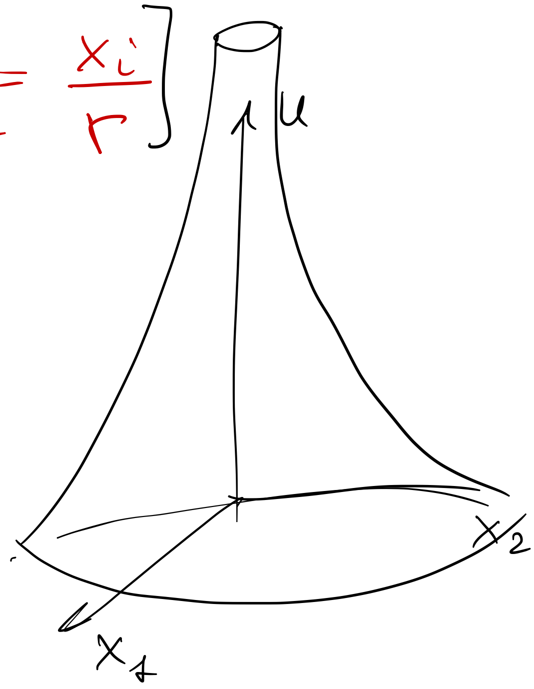
$$r = |x| = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{1/2}$$

$\Delta u = 0$ diventa



$$u_{x_i}(x) = (v(r))_{x_i} = v'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_i} =$$

$$\left[\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^n x_j^2\right]^{1/2} = \frac{\cancel{2}\,x_i}{\cancel{2}\left[\sum_{j=1}^n x_j^2\right]^{1/2}} = \frac{x_i}{r}\right]$$



$$= v'(r)\,\frac{x_i}{r}$$

$$u_{x_i x_i} =$$

$$\Rightarrow \quad u_{x_i}(x) = \frac{v'(r)\, x_i}{r}$$

$$(u_{x_i})_{x_i} = \frac{v''(r)\, x_i^2}{r^2} - \frac{v'(r)}{r^2}\frac{x_i^2}{r} + \frac{v'(r)}{r} =$$

$$= \frac{v''(r)\, x_i^2}{r^2} - \frac{v'(r)\, x_i^2}{r^3} + \frac{v'(r)}{r}$$

sommo su i

$$\Delta u = \sum_i u_{x_i x_i} = \frac{v''(r) \cancel{\sum_i x_i^2}}{\cancel{r^2}} - \frac{v'(r)}{r^{\cancel{3}}}\cancel{r^2} + N\frac{v'(r)}{r} =$$

$$= v''(r) + (N-1)\frac{v'(r)}{r}$$

espressione del Laplaciano per una funzione radiale.

Devo risolvere l'equazione $v''(r) + (N-1)\dfrac{v'(r)}{r} = 0$

Pongo $v'(r) = w(r)$

$$\Rightarrow \quad w'(r) + (N-1)\frac{w(r)}{r} = 0$$

$$\int \frac{w'(r)}{w(r)}dr = -\int \frac{(N-1)}{r}dr = -(N-1)\ln r + \overset{\ln k}{\overset{\shortparallel}{c}} =$$

$$= \ln \frac{k}{r^{N-1}}$$

$$\shortparallel$$

$$\int \frac{dw}{w}$$

$$\shortparallel$$

$$\ln|w| \quad \Rightarrow$$

$$w(r) = \frac{k}{r^{N-1}}$$

$$w(r) = \frac{k}{r^{N-1}}$$
$$\parallel$$
$$v'(r)$$

$$v(r) = \begin{cases} k \ln r + c_1 & N = 2 \\ \frac{k}{r^{N-2}} + c_1 & N \geq 3 \end{cases}$$

Le funzioni della forma

$u(x) = v(|x|)$ dove v è di questa forma

sono soluzioni.

Scegliamo $c_1 = 0$

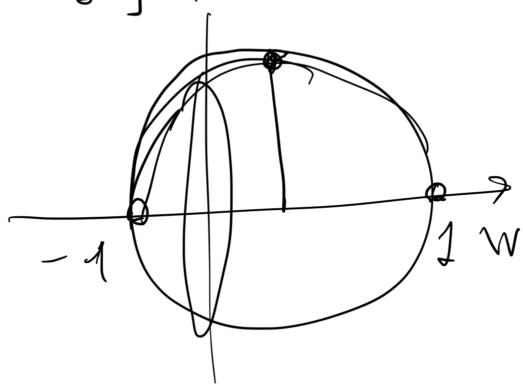
e $k = -\frac{1}{2\pi}$ se $N = 2$

$k = \frac{1}{N(N-2)\omega_N}$ se $N \geq 3$.

ω_N è il volume della palla unitaria $B_1(0)$ in dim N. $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$ $\omega_2 = \pi$ $\omega_1 = 2$

$$\omega_4 = \text{vol} \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : |x| \leq 1 \} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \text{mis } B^{(3)}_{\sqrt{1-w^2}} \, dw =$$



$$= 2 \int_0^1 \frac{4}{3}\pi (1-w^2)^{3/2} \, dw.$$

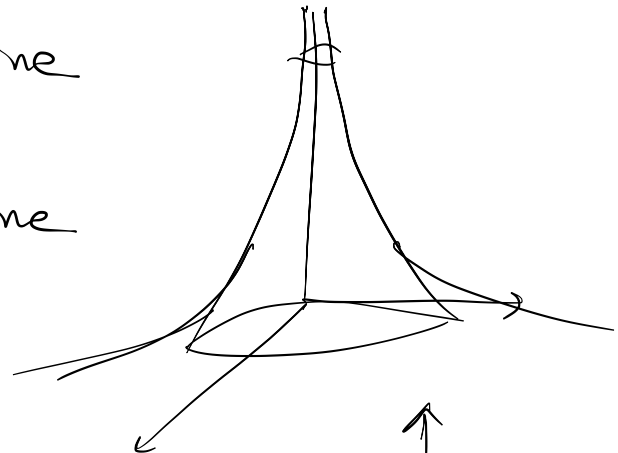
Con queste scelte di k e c_1 si ottiene la sol^{ne} fondamentale dell'eq^{ne} di Laplace:

SOL^{NE} FONDAMENTALE DELL'EQ^{NE} DI LAPLACE

$$\phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x| & n=2 \\[2ex] \dfrac{1}{n(n-2)\,\omega_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

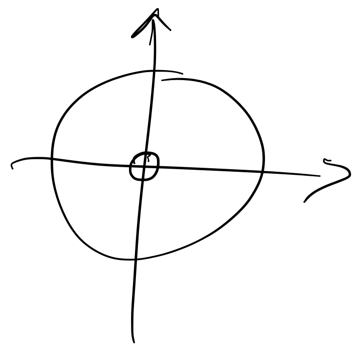
1) E' illimitata vicino all'origine

2) E' integrabile vicino all'origine



$n=2$.

$$\int_{B(0,1)} \phi(x)\,dx = \cancel{2\pi} \int_0^1 \left(-\frac{1}{\cancel{2\pi}}\right) r \ln r \, dr =$$



$$= - \cancel{\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1} + \int_0^1 \frac{r^{\cancel{2}}}{2} \frac{1}{\cancel{r}} = \frac{1}{4}$$

integrale improprio

<u>OSS</u> $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{r^\alpha}\,dr$ converge sse $\alpha < 1$.

$$\ln r << \frac{1}{r^\alpha} \qquad \forall \alpha > 0$$

$n \geq 3$

$$\int_{B(0,1)} \phi(x)\,dx = \int_{B(0,1)} \frac{c}{|x|^{n-2}}\,dx = \text{improprio}$$

converge

Parentesi: $n=2$ $\displaystyle\int_{B(0,1)} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ converge per quali α?

$$= 2\pi \int_0^1 r\frac{dr}{r^\alpha} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha-1}}$$

converge $\boxed{\forall\, \alpha < 2.}$

$n=3$ $\displaystyle\int_{B(0,1)} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ converge $\forall\, \alpha < 3.$

$n \geq 3$ " $\forall\, \alpha < n.$

OSS $|\nabla\phi| = |v'(r)|$

$$\int_{B(0,1)} |\nabla\phi|\,dx = \int_{B(0,1)} \frac{c}{|x|^{N-1}}\,dx \quad \text{converge}$$

N

OSS

$$|D^2\phi(x)| \sim \frac{c}{|x|^n}$$

N.B.

$$\int_{B(0,1)} \frac{c}{|x|^n}\,dx \qquad \text{diverge.}$$

OSS $\quad x \longmapsto \phi(x)$ armonica $\quad \forall x \neq 0.$
$(\Delta\phi = 0)$

$x \longmapsto \phi(x-y)$ armonica $\quad \forall x \neq y$

Sia $f(y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione.
(per semplicità, regolare e a supporto compatto)

$x \longmapsto \phi(x-y)f(y)$ è armonica, $\forall y \in \mathbb{R}^N$.

Consideriamo

singolare per $y \to x$. ma integrabile

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y)\,f(y)\,dy$$

in realtà l'integrale è solo sul supporto di f.

OSS L'integrale è improprio ma converge $\forall x$.

Proviamo a calcolare il laplaciano di $u(x)$ così definito

$$\Delta_x u(x) = \Delta_x \left[\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) f(y)\, dy \right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\Delta_x \phi(x-y)}_{\overset{\shortparallel}{0}} f(y)\, dy = 0$$

se si può scambiare l'ordine del Δ e dell' $\int$

In realtà mostreremo che si ha

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Il motivo è che il passaggio di derivazione sotto $\int$

non è corretto in questo caso.

TEOREMA Sia $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ (funzioni con derivate continue fino all'ordine 2, a supporto compatto)

Sia $u(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy$

Allora:

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

ii) $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Dopo aver provato questo teorema, adotteremo il metodo per risolvere il pb. di Dirichlet $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$$u_t - \Delta_p u = 0$$

$$u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = 0$$

$$u_t - \operatorname{div}\left(u^m\right) = 0$$ eq$^{\text{ni}}$ dei mezzi porosi

$$u_t - \operatorname{div}\left(\frac{u \nabla u}{\sqrt{u^2 + \frac{|\nabla u|^2}{c^2}}}\right) = 0$$ eq$^{\text{ne}}$ del calore relativistica