Soluzioni Compito A

1. Le equazioni del moto proiettate lungo i due assi del moto (quello del piano inclinato su cui si muove m_1 e quello del piano verticale su cui si muove m_2) si scrivono:
   per m_1:
   $N - m_1 g \cos\alpha = 0$;
   $T - m_1 g \sin\alpha + F_{s,d} = 0$
   per m_2:
   $g - T = 0$ per , m_2 che si muove verticalmente.
   Non conoscendo la direzione del moto il segno della forza di attrito $F_{s,d}$ è stato scelto casualmente: il segno positivo o negativo che si otterrà alla fine dirà il verso dell'accelerazione. Dalle relazioni soprascritte si ottiene: $\mathbf{F_{s,d} = (m_1 \sin\alpha - m_2)\, g < 0}$ e quindi $F_{s,d}$ è diretto in verso opposto a T. Per sapere se le masse sono ferme o accelerano si deve vedere se è soddisfatta la relazione di equilibrio statico e dunque
   $\mathbf{|F_s| < \mu_S\, m_1 g \cos\alpha}$. Sostituendo i dati del problema, si verifica che tale relazione non è soddisfatta e quindi le masse si metteranno in movimento.
   Nel caso dell'attrito dinamico $F_d = \mu_d\, m_1\, g \cos\alpha$ e le due accelerazioni delle masse m_1 e m_2 devono essere, in modulo, uguali. Utilizzando le relazioni
   $m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha - \mu_d\, m1\, g \cos\alpha$;
   $m2\, a = m2\, g - T$
   e risolvendo per a si ottiene
   $a = [m_2 g - m_1 g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)]/(m_1+m_2) = 5.75\ m/s^2$

2. Il sistema non è soggetto a forze esterne per cui $a_{CM}=0$ ed essendo il centro di massa del sistema fermo esso rimane in quiete. Nella configurazione iniziale il CM ha la coordinata X^I_{CM} data da:
   $\mathbf{X^I_{CM}}= (L/2M+mL)/(M+m)=L(M+2m)/[2(M+m)] = \mathbf{3.33m}$
   nella configurazione finale abbiamo l'uomo (m) in posizione X_F ed il CM della barca in posizione $L/2+X_F$. La nuova coordinata del CM vale quindi:
   $X^F_{CM} = [(L/2+X_F)M+mX_F]/(M+m) = X^I_{CM} = L(M+2m)/[2(M+m)]$
   da cui si ricava X_F posizione finale del punto A come:
   $\mathbf{X_F = mL/(M+m) = 1.67\ m}$

3. La velocità della barca ha componenti V_{BX} e V_{BY} date da:
   $V_Bx = V_B \cos\theta = 5.5\ m/s$
   $V_By = V_B \sin\theta = 2.6\ m/s$
   Per effetto della corrente del fiume la velocità della barca viene modificata solo lungo l'asse y per un osservatore che si trovi a riva si ha quindi che:
   $V_{YBR} = V_B \sin\theta - V_A$ da cui $\mathbf{V_{BR}}=\sqrt{[(V_B \cos\theta)^2+(V_B \sin\theta - V_A)^2]} = \mathbf{5.63\ m/s}$
   Affinche' la barca viaggi parallela all'asse x bisogna annullare la velocita' lungo y si ha quindi che:
   $V_B \sin\theta_F - V_A=0$ da cui si ricava che $\mathbf{\theta_F= \arcsin(-V_A/V_B) = 13.3\ °}$

4. Per il sistema puleggia/corpo m_1 e per la massa m_2 varranno le relazioni:
   $TR = I_O\alpha$
   $m_2 g - T = m_2 a$
   (rispettivamente equazione dei momenti e seconda legge di newton per i due sistemi).
   Essendo $\alpha = a/R$ (i due sistemi si muovono solidalmente senza slittamenti) e calcolando $I_O = 1/2MR^2 + m_1 d^2$ come momento d'inerzia rispetto al polo O è possibile esprimere T

tramite la seconda relazione e sostituirla nella prima per calcolare a ottenendo:
$a = m_2\, g\, R_2 / (m_1 d^2 + 1/2\, MR^2 + m_2 R^2) = 7.45\ m/s^2$ da cui
$\alpha = a/R = 7.45/0.5 = 14.9\ rad/s^2$

5. Le 4 fasi reversibili rappresentano rispettivamente
   1) compressione rapida adiabatica AB
   2) Scoppio con immissione del calore $Q_{CB}>0$ a volume costante
   3) Espansione veloce adiabatica
   4) Scarico a volume costante con perdita di $Q_{DA}<0$
   Il rendimento può essere calcolato dalla definizione:
   $\eta=1-|Q_{CED}|/|Q_{ASS}|=1-|Q_{DA}|/|Q_{BC}|=1-[ncv(T_D-T_A)]/[ncv(T_C-T_B)]=1-(T_D-T_A)]/(T_C-T_B)$
   infatti nelle due adiabatiche non ci sono scambi di calore. Per determinare il valori delle differenze di temperatura si possono utilizzare le adiabatiche DA e CB:
   $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ da cui $T_C V_B^{\gamma-1} = T_D V_A^{\gamma-1}$ avendo $V_D=V_A$ $V_B=V_C$
   $T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$
   Sottraendo membro a membro si ricava:
   $(T_C-T_B)V_B^{\gamma-1}=(T_D-T_A)V_A^{\gamma-1}$
   da cui si ricava che
   $(T_D-T_A)/(T_C-T_B)=(V_B/V_A)^{\gamma-1}= (1/8)^{\gamma-1}=0.44$ essendo $\gamma=cp/cv=7/5=1.4$
   da cui il rendimento vale:
   $\boldsymbol{\eta=1-(T_D-T_A)/(T_C-T_B) = 0.56}$

Soluzioni Compito B

1. Sia L l'allungamento della molla e α l'angolo che la molla forma con la verticale. Poiché la massa è ferma la seconda legge di Newton per la massa m si scrive:
   mg + Fel + Fapp = 0.
   Proiettando lungo i due assi cartesiani avremo:
   Fel $\cos\alpha$-mg = 0 e
   Fel $\cdot$ $\sin\alpha$ -Fapp = 0.
   La forza elastica è pari a kL. Ricavando Fel dalla prima equazione e sostituendola nella seconda si ottiene Fapp = mg $\tan\alpha$, da cui A/g = $\tan\alpha$ (essendo A l'accelerazione del vagone, origine della "forza apparente").
   L'angolo α si calcola come **α=atan(A/g) = 0.30 rad(17º)**.
   La forza elastica si può ora ricavare dalla prima equazione e risulta pari a **Fel=mg/(cosα)** e dunque l'allungamento della molla si ricava tramite
   L = mg/(k cosα) = 0.513 m.

2. Il moto delle due masse m_1 e m_2 si può analizzare in due sistemi cartesiani orientati in modo diverso. L'asse x per lo studio della massa m_1 è orientato verso sinistra e parallelo al piano orizzontale scabro. L'asse x' per lo studio della massa m_2 è parallelo al piano liscio inclinato e diretto verso il basso. Con questa scelta le equazioni per i due corpi divengono:
   $N_1 = m_1 g$ e $m_1 a = T - \mu_d\, m_1 g$
   mentre per la massa m_2, che deve avere la stessa accelerazione (in modulo) di m_1 a cui è attaccata tramite una fune inestensibile di massa trascurabile,
   $m_2 a = m_2 g \sin\alpha - T$.
   Nella condizione statica il a=0 in entrambe le equazioni del moto e si ottiene:
   $m_2 g\sin\alpha = \mu_s m_1 g$ da cui **$\mu_s = m_2/m_1 \sin\alpha = 1$.**
   Dalle due equazioni, risolvendo per a si ottiene **$a = (2\sin\alpha - \mu_d) = g/2 = 4.9\ m/s^2$**

3. Non essendo presenti forze esterne si conserva la quantità di moto del centro di massa quindi l'asticella si mette in moto in direzione opposta al topo con velocità data da: $m_T v_T = M_A v_A$ da cui $V_A = m_T v_T/M_A$ = 2cm/s. Essendo le due velocità in direzioni opposte la velocità relativa di Topo e Asticella è la somma delle due velocità: $v_R = V_A + V_T$ = 12 cm/s. A questo punto il topo percorrerà la lunghezza dell'asticella in un tempo pari a **$t = L/v_R$ = 4.16 s**

4. Il moto avviene in assenza di attrito e quindi si conserva l'energia meccanica del sistema. Avremo, all'inizio con il sistema in quiete, e ponendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale a terra, che l'energia meccanica è pari ad $E_{mi} = (m_1 + m_2)gh$. L'energia meccanica finale, quando m2 tocca terra sarà data dall'energia potenziale della massa m1 in posizione 2h e dall'energia cinetica delle masse e della puleggia: $E_{mf} = 2m_1 gh + 1/2\ m_1 v^2 + 1/2\ m_2 v^2 + 1/2\ I\omega^2$. Visto che la carrucola ruota solidamente con le masse avremo ω=v/R ed $I = 1/2\ MR^2$. Sostituendo nella relazione precedente, ed eguagliando E_{mi} ed E_{mf} otteniamo:
   $V = \sqrt{(2gh\,(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2 + M/2))}$ = 0.9 m/s.

5. Per le adiabatiche vale:
   Q_{BC}=0 dal primo principio $\Delta U = L_{BC} = nc_V \Delta t = ncv(T_2 - T_1)$
   Q_{DA}=0 dal primo principio $\Delta U = L_{DA} = nc_V \Delta t = ncv(T_1 - T_2)$

Allora il rapporto L_{BC}/L_{DA} vale:

$\mathbf{L_{BC}/L_{DA}}$= $[ncv(T_2-T_1)]/[ncv(T_1-T_2)]$ = **-1**

Il rendimento può essere calcolato dalla definizione:

$\boldsymbol{\eta=1-|Q_{CED}|/|Q_{ASS}|}$

il calore è assorbito nell'isoterma AB e si ha $Q_{AB}=nRT_1\ln(V_B/V_A)$

il calore è ceduto nell'isoterma CD e si ha $Q_{CD}=|nRT_2\ln(V_D/V_C)|= nRT_2\ln(V_C/V_D)$

$\boldsymbol{\eta=1-|Q_{CED}|/|Q_{ASS}|=1-[T_2\ln(V_c/V_D)]/[T_1(V_B/V_A)] = 0.52}$