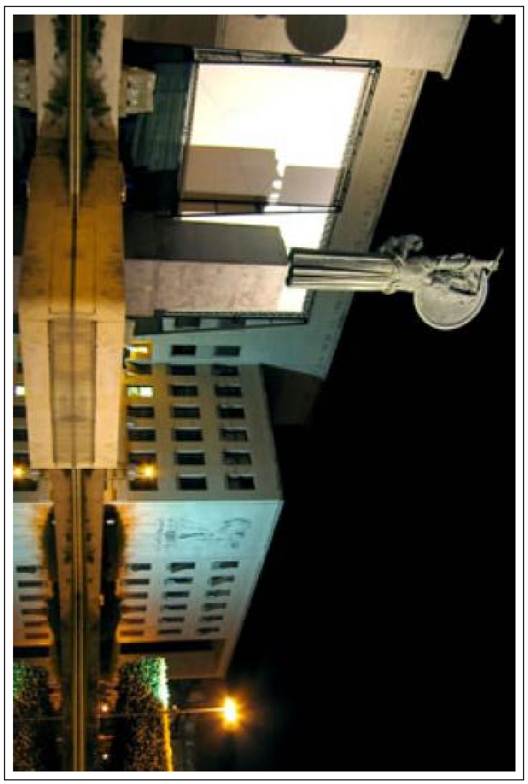
CORSO PROPEDEUTICO DI MATEMATICA 2012-2013



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dispensa a cura di:
Dino Boccaletti
Lamberto Lamberti
Luigi Stazi

Ultima revisione settembre 2012.

Dipartimento di Matematica
Guido Castelnuovo
http://www.mat.uniroma1.it

Il testo di questa dispensa è stato scritto in LaTeX.

I grafici sono stati realizzati con GeoGebra.

Indice

CAPITOLO 1

Elementi di teoria degli insiemi

1. Introduzione

La Matematica moderna si differenzia da quella classica per un più elevato grado di astrazione: il suo principale interesse è rivolto non tanto a ciò che i singoli oggetti *sono*: numeri, equazioni, vettori, operazioni, ..., quanto piuttosto alle *regole* che essi soddisfano; si produce così, da un lato, una notevole economia di pensiero, che consente di applicare una teoria, già stabilita per degli oggetti singoli, ad altri apparentemente molto lontani, e, dall'altro, consente di stabilire analogie insospettate nei vari campi.
Riportiamo, a tal proposito, un passo tratto dal volume di Courant - Robbins: "*Che cos'è la Matematica*", Ed. Boringhieri:

Attraverso i secoli, i matematici hanno considerato gli oggetti del loro studio, quali ad esempio numeri, punti, ecc., come cose esistenti di per sé. Poiché questi enti hanno sempre sfidato ogni tentativo di un'adeguata descrizione, lentamente sorse nei matematici del XIX secolo l'idea che la questione del significato di questi oggetti come cose sostanziali, se pure ha un senso, non lo avesse nel campo della matematica. Le uniche affermazioni rilevanti che li riguardano non si riferiscono alla realtà sostanziale, e stabiliscono soltanto delle relazioni tra gli oggetti matematicamente non definiti e le regole che governano le operazioni con essi. Nel campo della scienza matematica, non si può, e non si deve discutere ciò che i punti, le rette, i numeri sono effettivamente: ciò che importa e ciò che corrisponde a fatti verificabili sono la struttura e le relazioni, che due punti determinano una retta, che i numeri si combinano secondo certe regole per formare altri numeri, ecc. Uno dei più importanti e fruttuosi risultati dello sviluppo postulazionale moderno è stata una chiara indagine della necessità di rendere astratti i concetti della matematica elementare.

Dopo tali premesse, visto che gli oggetti matematici sono stati svuotati di un preciso significato concreto, è naturale fissare l'attenzione su *insiemi astratti*, cioè costituiti di elementi la cui natura non interessa.

Un insieme astratto è da intendersi come un *concetto primitivo*, cioè non descrivibile mediante altri più elementari. Sono sinonimi di insieme le parole *famiglia, classe, totalità*, ecc.; ogni insieme verrà generalmente indicato con lettere maiuscole: $A, B, \ldots$; inoltre ognuno di essi si penserà formato da elementi di un *insieme universale* o *insieme ambiente* S nel quale tutti sono immersi.
Come la nozione di insieme, è da intendersi come primitiva la nozione di appartenenza ad un insieme; l'appartenenza di un elemento x ad un insieme A si indica con $x \in A$ o anche $A \ni x$ che si legge :

"A contiene x"

Se x non appartiene ad A, si scrive $x \notin A$, o anche $A \not\ni x$.

Un insieme A può essere individuato in duplice modo: o mediante le proprietà che caratterizzano i suoi elementi, o elencando, ove possibile, gli elementi che lo compongono, senza tener conto dell'ordine.

Ad esempio l'insieme dei numeri primi compresi tra 10 e 20 può essere descritto come l'insieme costituito dai numeri 11, 13, 17, 19.

Se A e B sono insiemi, si dice che A è un *sottoinsieme* di B, e si scrive $A \subset B$, o anche $B \supset A$, se ogni elemento di A è anche elemento di B:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B);$$

la formula precedente va letta nel seguente modo: *L'insieme A è un sottoinsieme di B, (o è contenuto in B), se e solo se, per ogni x appartenente ad A, (il simbolo $\forall$ si legge per "ogni" o "qualsiasi"), ne segue che ($\Rightarrow$) x appartiene a B.*
I due insiemi si dicono *coincidenti* se

$$A \subset B \text{ e } B \subset A;$$

in tal caso si scrive $A = B$. Se $A \subset B$, senza che sia $B \subset A$, si dice che A è un *sottoinsieme proprio* di B.
Un comodo modo di raffigurare gli insiemi è attraverso i diagrammi di Eulero-Venn: si traccia in un piano una linea chiusa, e si immagina l'insieme in questione come costituito dai punti indicati all'interno della regione così individuata.

Dati due o più insiemi, se ne possono costruire altri. Precisamente, dati A e B, si chiama *unione* di A e B l' insieme $A \cup B$, costituito da tutti gli elementi che verificano una almeno delle due condizioni

1: $x \in A$
2: $x \in B$;

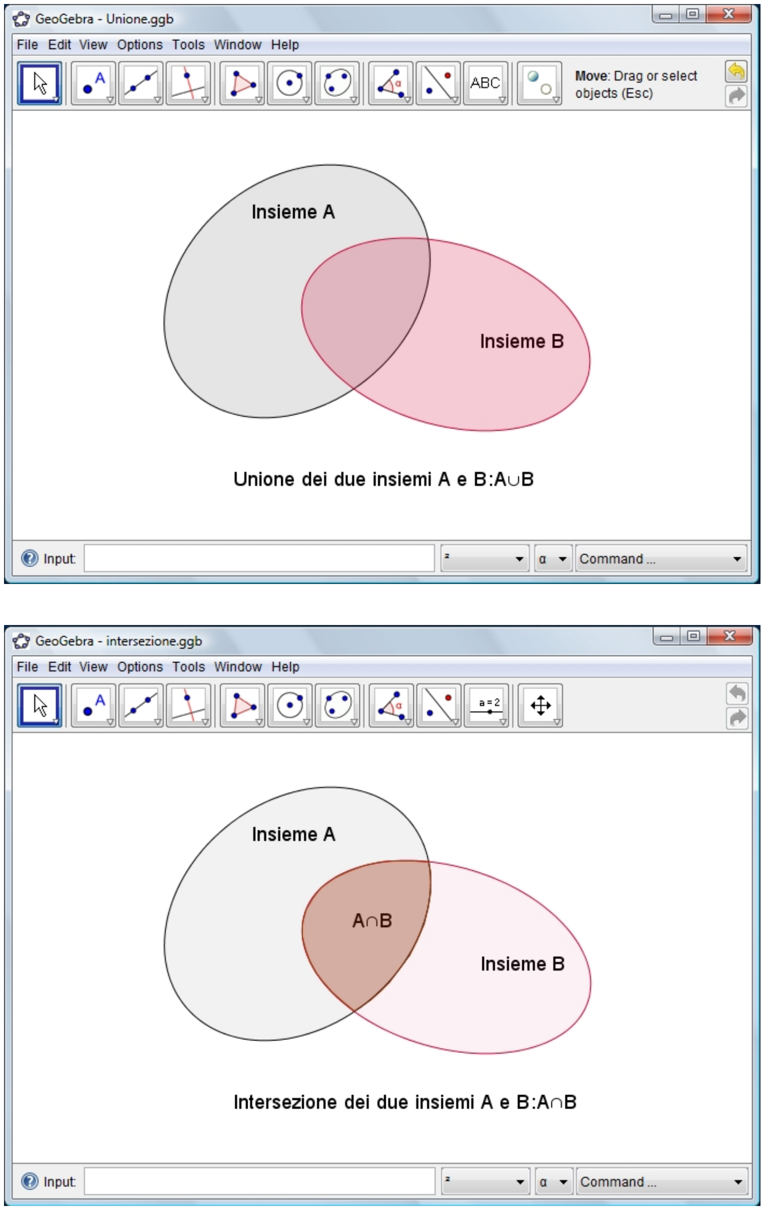


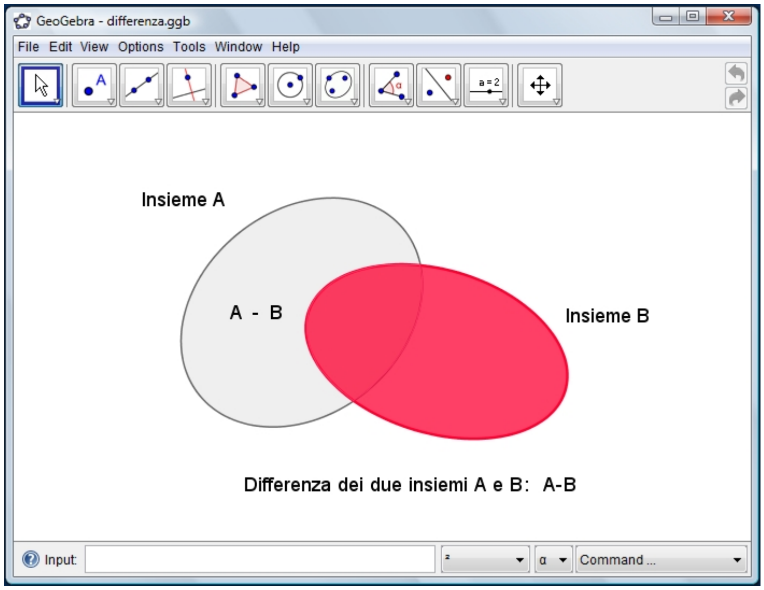
FIGURA 1. Unione e intersezione di due insiemi.

cioè, vedi Figura 1 in alto,

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{ e/o } \ x \in B\}.$$

La nozione si generalizza a più insiemi in modo ovvio. Valgono le seguenti proprietà, di verifica immediata

1: $A \cup B = B \cup A$



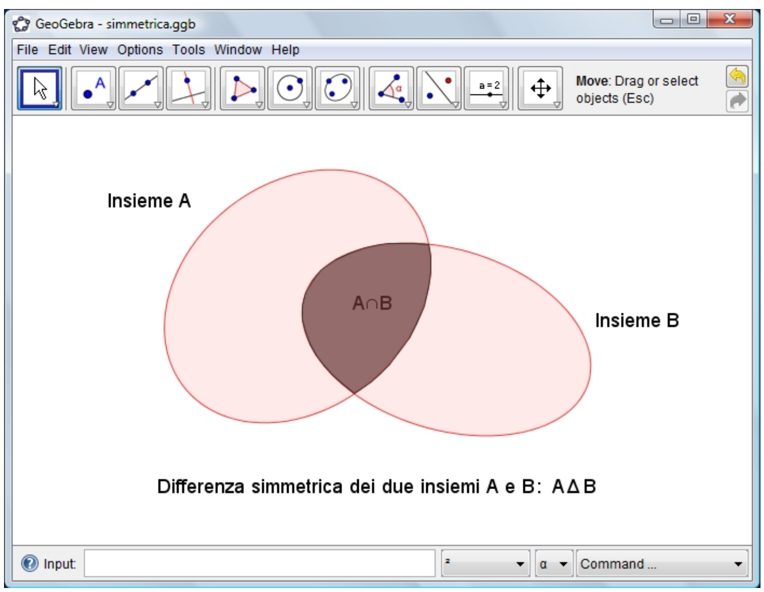


FIGURA 2. Differenza e differenza simmetrica di due insiemi.

2: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
3: $A \cup A = A$
4: $A \cup B \supset B$
5: $A \cup B = B \Leftrightarrow B \supset A$.

Si chiama *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi che appartengono sia ad A, sia a B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\},$$

nozione questa che, come la precedente, si generalizza a più insiemi. Risulta

6: $A \cap B = B \cap A$
7: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
8: $A \cap A = A$
9: $A \cap B \subset A$
10: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

TEOREMA 1.1. *Unione e intersezione verificano le seguenti proprietà distributive:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

da cui, per $B = A$,

$$A \cup (A \cap C) = A, \quad A \cap (A \cup C) = A.$$

DIMOSTRAZIONE. Occupiamoci della prima relazione

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Se x appartiene all'insieme a primo membro allora o $x \in A$, oppure x appartiene contemporaneamente a B e C; in entrambi i casi x appartiene al secondo membro, sicché il primo insieme è contenuto nel secondo.
Facciamo ora vedere che anche il secondo è contenuto nel primo. Sia dunque x appartenente al secondo insieme; allora esso appartiene contemporaneamente ad $A \cup B$ e ad $A \cup C$; se appartiene ad A, allora appartiene anche all'insieme a primo membro; se invece x non appartiene ad A, deve appartenere contemporaneamente a B e C, e dunque alla loro intersezione; ne viene che deve appartenere anche ad $A \cup (B \cap C)$.

La seconda relazione si dimostra in modo analogo, verificando cioè le due inclusioni:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$\square$

In queste Dispense il simbolo $\square$ indica la fine della DIMOSTRAZIONE: in altri testi si può trovare, con lo stesso significato l'acronimo CDD, *Come Dovevasi Dimostrare*, o QED, *Quod Erat Demonstrandum*, usato specialmente nei testi di lingua inglese.

Si chiama *insieme vuoto*, e si indica con $\emptyset$, l'insieme che non contiene alcun elemento. Ad es. tale è l'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $x^2 = -4$, oppure l'insieme dei numeri primi compresi tra 32 e 36. Si ha

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad \forall A.$$

L'insieme *differenza* tra A e B è l'insieme $A-B$ costituito dagli elementi di A che non appartengono a B:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\};$$

esso è detto anche il *complemento* di B in A; valgono le ovvie proprietà

$$A - B = A - (A \cap B), \quad A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset,$$
$$A = (A - B) \cup (A \cap B), \quad A - A = \emptyset.$$

La *differenza simmetrica* $A\Delta B$, vedi Figura 2, è l'insieme costituito dagli elementi di A o B privato degli elementi comuni:

$$A\Delta B = (A\cup B)-(A\cap B) = (A-B)\cup(B-A) \quad \text{quindi} \quad A\Delta B = B\Delta A.$$

Inoltre

$$A\Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B.$$

Se S è l'insieme universale, ed A un insieme, l'insieme complementare, $\overline{A}$, di A, è definito come

$$\overline{A} = S - A.$$

Esempio

$$S = \mathbb{R}, \quad A = \{x : 0 < x < 1\} \Rightarrow \bar{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \cup x \geq 1\}.$$

Valgono le proprietà

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \bar{S} = \emptyset, \quad \bar{\emptyset} = S$$

Teorema 1.2 (Regole di De Morgan). *Unione, intersezione e passaggio al complementare verificano le relazioni*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

che si generalizzano a più insiemi:

$$\overline{A \cap B \cap C \cap \dots} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \dots$$
$$\overline{A \cup B \cup C \cup \dots} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \dots$$

Dimostrazione. Se x appartiene al primo insieme, allora è un elemento di S che non appartiene ad A e B contemporaneamente, e pertanto verifica una delle seguenti condizioni: a) non appartiene né ad A né a B; b) appartiene ad A ma non a B; c) appartiene a B ma non ad A; in ognuno di questi casi appartiene all'insieme a secondo membro e dunque il primo insieme è contenuto nel secondo.

Viceversa, se x appartiene al secondo insieme, o sta nel complementare di A, (e dunque non appartiene ad A, e quindi nemmeno all'intersezione di A con B), o sta nel complementare di B, o nel complementare di entrambi; in ogni caso appartiene al primo insieme, sicché il secondo è contenuto nel primo. Pertanto i due insiemi coincidono. $\square$

Dato un insieme A contenente n elementi, si definisce *insieme delle parti* l'insieme che ha come elementi i sottoinsiemi di A, compresi l'insieme stesso e l'insieme vuoto.
Esso è costituito da 2^n elementi, come si può riconoscere contando gli elementi singoli, le possibili coppie, le terne ... utilizzando la formula del binomio di Newton.

Esempio 1.3. *Per l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$, l'insieme delle parti è l'insieme*

$$\mathcal{P}(A) = \{\{O\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Esercizio 1.4.

(1) *Dimostrare che $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ e $B = \emptyset$.*
(2) *Dimostrare che se $A \cup B = A \cup C$, non necessariamente $B = C$ (non vale la legge di cancellazione)*
(3) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$*?*
(4) *Si considerino l'insieme A dei numeri interi divisibili per 3, l'insieme B dei numeri interi divisibili per 5, l' insieme C dei numeri interi divisibili per 20. Determinare $A \cap B, A \cup B, A \cap B \cap C, A \cup B \cup C, (A \cap B) \cup C, (A \cup B) \cap C$.*
(5) *Dimostrare che $(A \cup B) \cap \overline{B} = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$*

1.1. I numeri naturali. E' consuetudine indicare con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri *naturali*:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

In esso sono definite le ordinarie operazioni di somma e di prodotto, le quali, ad ogni coppia di numeri naturali, associano ancora un numero naturale: si dice che l'insieme $\mathbb{N}$ è *chiuso* rispetto alle operazioni anzidette.

Per poter definire anche la sottrazione, bisogna introdurre l'insieme $\mathbb{Z}$ degli *interi relativi*:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

ed infine, per dar senso all'operazione di divisione, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*, cioè l'insieme delle frazioni, intese come rapporto di numeri interi, con l'avvertenza che il denominatore sia diverso da zero:

$$\mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0\}$$

Unitamente ai numeri *irrazionali*, gli insiemi precedenti costituiscono l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*.

2. Prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B, nell'ordine, l'insieme $A \times B$ costituito dalle coppie *ordinate* (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Sottolineamo che le coppie sono ordinate, nel senso che, ad es., si deve intendere $(a, b) \neq (b, a)$ per $a \neq b$.

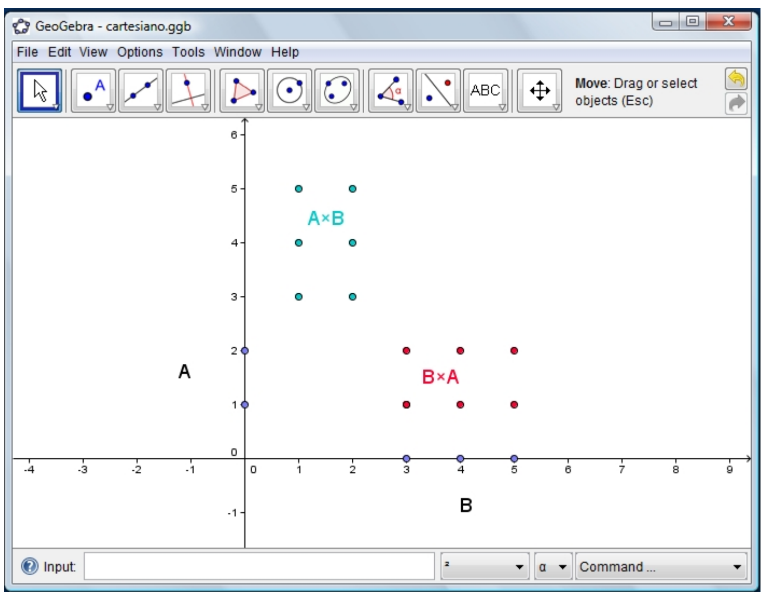


FIGURA 3. I due prodotti cartesiani $A \times B, \quad B \times A$.

Ad esempio, se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ è, vedi Figura 3,

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\},$$

mentre

$$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}.$$

L'insieme delle coppie ordinate di numeri reali si indica con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; se poi si introduce su un piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si può rappresentare la coppia (a, b) come il punto di coordinate (a, b).

Per generalizzazione, l'insieme

$$\mathbb{R}^n \equiv \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ volte}},$$

prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali per sé stesso, n volte, è l'insieme delle n-ple ordinate di numeri reali.

Esercizio 2.1. *Dimostrare che*

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \quad (A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

3. Un paradosso

La teoria degli insiemi finora ricordata, quella esposta in tutti i programmi scolastici, prende il nome anche di teoria *naif*, teoria ingenua, e si presta ad alcuni paradossi, cioé esempi sorprendenti e in qualche senso contradditori.
L'ingenuitá consiste nell'accettare, implicitamente, che qualsiasi proprietá si enunci esista l'insieme, eventualmente vuoto, degli elementi che soddisfano tale proprietá.
Ad esempio la proprietá

- di essere un intero con il quadrato minore di 10 definisce l'insieme $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
- di essere un numero dispari divisibile per 2 definisce l'insieme vuoto $B = \varnothing$.

L'esempio - il paradosso - presentato da Bertrand Russel nel 1902 si basa sulla proprietá di un insieme di *essere elemento di se stesso:*

- l'insieme T dei triangoli non é un triangolo e quindi non é elemento di se stesso,
- l'insieme A dei concetti astratti é a sua volta un concetto astratto e quindi é elemento di se stesso,
- l'insieme V degli insiemi non vuoti é un insieme non vuoto e quindi é elemento di se stesso.

Sia ora E l'insieme costituito da tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi:

$$T \in E, \quad A \notin E, \quad V \notin E$$

Non é tuttavia possibile alcuna delle seguenti possibilitá

$$E \in E, \quad E \notin E$$

Sono infatti entrambe contradditorie.
Non resta che concludere che E non é un insieme e, quindi, che é illusoria l'idea che qualsiasi proprietá determini un insieme quello, eventualmente vuoto, formato degli elementi che soddisfano tale proprietá.

4. La cardinalitá

I numeri naturali rappresentano l'operazione del *contare*: quanti elementi ha il tale insieme ? Un elemento, due, tre, 1000, ecc.
Dopo aver contato gli elementi di due insiemi si riconosce, a volte, che....

...hanno lo stesso numero di elementi,

e si riconosce anche che tra i due insiemi si puó stabilire una corrispondenza biunivoca.
Una volta incontrati insiemi non finiti la domanda *quanti elementi ha ?* diviene imbarazzante, mentre il valutare se due insiemi (anche non finiti) abbiano lo stesso numero di elementi appare ragionevole e conduce a scoperte sorprendenti.
L'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e quello P dei soli numeri pari possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro:

- ad ogni $n \in \mathbb{N}$ facciamo corrispondere il numero pari $2n \in P$,
- ad ogni $p \in P$ facciamo corrispondere la sua metá $p/2 \in \mathbb{N}$.

L'esistenza di corrispondenze biunivoche tra due insiemi A e B viene sintetizzata nella frase

A e B hanno la stessa cardinalitá.

Quindi, ad esempio $\mathbb{N}$ e P hanno la stessa cardinalitá: la sorpresa consiste nel fatto che

$$P \subset \mathbb{N}, \quad P \neq \mathbb{N}$$

Cioé per gli insiemi infiniti, quali P ed $\mathbb{N}$ si puó avere la stessa cardinalitá pur essendo uno sottinsieme proprio dell'altro, circostanza che invece é impossibile nel caso finito.

4.1. L'insieme delle parti. Assegnato un insieme A indichiamo con $P(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di A.
Cosí, ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ riesce

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Esiste un teorema, neanche tanto difficile, che afferma che $P(A)$ ha cardinalitá maggiore di quella di A, ovvero che non esiste corrispondenza biunivoca tra A e $P(A)$.
Tra le conseguenze di tale teorema c'é il risultato di Cantor relativo all'esistenza di insiemi di cardinalitá comunque grandi.

- l'insieme A $= P(\mathbb{N})$ delle parti di $\mathbb{N}$ ha cardinalitá maggiore di quella di $\mathbb{N}$,
- l'insieme B $= P(A)$ delle parti di A ha cardinalitá maggiore di quella di A, ecc. ecc.

CAPITOLO 2

Polinomi

1. Monomi

I monomi sono i *mattoni* base del calcolo letterale:

DEFINIZIONE 1.1. *Un monomio è un simbolo formato dal prodotto di un coefficiente numerico e un certo numero di variabili letterali anche non tutte diverse.*

Sono monomi

$$3x, \quad xy, \quad 5a^2bc, \quad 17ax^2, \ldots.$$

non sono monomi

$$x+1, \quad x^2-y^2, \quad x^y$$

DEFINIZIONE 1.2. *Due monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale.*

1.1. Operazioni.

- Due monomi simili si possono sommare e sottrarre:

$$13x^2y, \text{ e } \frac{3}{5}\,yx^2 \quad \rightarrow \quad 13x^2y + \frac{3}{5}\,yx^2 = \frac{68}{5}\,x^2\,y$$

- Due qualunque monomi si possono moltiplicare

$$a^3b^2x^2, \ e\ cby^3 \quad \rightarrow \quad (a^3b^2x^2) * (cby^3) = a^3b^3cx^2y^3$$

- Un primo monomio si può dividere per un secondo se il primo contiene tutte le lettere che figurano nel secondo, ad un esponente maggiore o uguale.

ESEMPIO 1.3. *x^2z non può essere diviso per xy mentre $x^2z^2y^2$ può essere diviso per $3xyz^2$ e riesce*

$$x^2z^2y^2 \,:\, 3xyz^2 \,= \frac{1}{3}xy$$

ESERCIZIO 1.4. *Assegnato il monomio*

$$m = \frac{3}{4}a^3\,b^5$$

- *scrivere* m^2 *ed* m^3
- *calcolarne il valore in corrispondenza ad* $a = 2$ *e* $b = \dfrac{1}{2}$
- *esprimere* m *come somma di due altri monomi simili,*
- *esprimere* m *come prodotto di due altri monomi,*
- *esprimere* m *come quoziente di due altri monomi,*
- *calcolare* m *nel caso*

$$a = \frac{1}{2}r^2, \quad b = \frac{2}{3}\, s^3.$$

2. I polinomi

DEFINIZIONE 2.1. *Un polinomio nell'indeterminata* x *è una somma di monomi contenenti la sola* x *ad esponenti naturali: l'esponente più alto presente si dice grado del polinomio.*

I polinomi di cui ci si occupa (piú spesso) sono di primo o di secondo grado
I coefficienti numerici che compaiono in un polinomio sono spesso indicati a loro volta con lettere: così il polinomio di secondo grado $P(x) = x^2 + 7x + 5$ può essere indicato con $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ pensando che $a = 1,\ b = 7,\ c = 5$

I polinomi si sommano, sottraggono e si moltiplicano: tutto con le usuali regole di addizione e moltiplicazione tra monomi.

ESERCIZIO 2.2.

- *Determinare tutti i polinomi di primo grado in* x *che si annullano per* $x = 1$*,*
- *determinare tutti i polinomi di secondo grado in* x *che si annullano per* $x = \pm 1$*,*
- *determinare tutti i polinomi di terzo grado in* x *che si annullano per* $x = 1, 2, 3$
- *detto* $x^2 + ax + b$ *il polinomio che si annulla per* $x = \alpha$ *e* $x = \beta$ *determinare che relazioni passano tra i due coefficienti* $a,\ b$ *e le due radici* $\alpha,\ \beta$

3. Prodotti notevoli

Il prodotto, o l'elevamento al quadrato, al cubo, ecc. di un polinomio è in genere una operazione complicata perché si generano molti addendi ed è quindi facile commettere errori.
Si dicono *prodotti notevoli* alcuni casi, molto semplici ma frequenti, di prodotto o di elevamento a potenza: la familiarità con i prodotti notevoli agevola alcuni calcoli.

Esercizio 3.1.

- *calcolare il prodotto* $(a+b).(b+c)$
- *calcolare le potenze* $(a+b)^2, \ (a+b)^3$
- *calcolare il cubo* $(a+b+c)^3$
- *semplificare le espressioni dei numeri*

$$x = (1+\sqrt{2})^2, \quad y = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$$

- *determinare la forma dei numeri ottenuti addizionando, moltiplicando o dividendo fra loro numeri della forma*

$$m + n\sqrt{5}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

- *La differenza di due quadrati, tipo* $21353 = 147^2 - 16^2$ *può essere un numero primo ?*

4. Divisione tra polinomi

Dati due polinomi $p(x)$ e $g(x)$ in una variabile esiste una e una sola coppia di polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ con $r(x)$ di grado piú basso di quello di $g(x)$ tale che

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

Naturalmente $q(x)$ prende il nome di quoziente della divisione di $p(x)$ per $g(x)$ e $r(x)$ quello di resto.

Definizione 4.1. *Se* $r(x)$ *è nullo si dice che* $p(x)$ *è divisibile per* $g(x)$*.*

Se $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ allora la divisione di $f(x)$ per $g(x)$ corrisponde alla divisione dei due addendi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ per $g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_1(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) & gr(r_1) < gr(g) \\ f_2(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x) & gr(r_2) < gr(g) \end{array} \right. \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(x) = (q_1(x) + q_2(x))\, g(x) + (r_1(x) + r_2(x))$$

Osservazione 4.2. *La divisione fra polinomi, che produce un quoziente e un resto, è analoga a quella ben nota tra numeri naturali: così, ad esempio riferendosi a* 13 *e* 5 *si ha*

$$13 = 5\,.\,2 \,+\, 3$$

con $q = 2$ *ed* $r = 3 < 5$*.*

4.1. Una divisione semplicissima. Se il grado del divisore $g(x)$ é minore di quello del dividendo $f(x)$ allora riesce, ovviamente,

$$q(x) \equiv 0, \quad r(x) = f(x) \qquad \to \quad f(x) = 0.g(x) + f(x)$$

4.2. Una divisione semplice. Se il divisore $g(x)$ è il polinomio di primo grado $g(x) = x - \alpha$ allora riesce

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha)$$

4.3. Osservazioni utili. La divisione di $f(x)$ per $g(x) = \alpha\, x^m$ espresso da un solo monomio si ottiene facilmente:

- $q(x)$ é il polinomio somma dei quozienti dei monomi di $f(x)$ di grado maggiore o uguale al grado m dell'unico monomio di $g(x)$,
- $r(x)$ é la somma dei monomi di $f(x)$ di grado minore di m.

5. Il procedimento elementare

La divisione di $f(x) = f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0$ per $g(x) = g_n x^n + g_{n-1}x^{n-1} + \cdots + g_0$ con $m \geq n$ si esegue con il seguente algoritmo:

- si divide il monomio di grado maggiore del dividendo $f_m x^m$ per il monomio di grado maggiore del divisore $g_n x^n$ ottenendo il monomio $q_{m-n}x^{m-n}$,
- si valuta il resto $r(x) = f(x) - q_{m-n}x^{m-n}\, g(x)$, polinomio di grado minore del grado di $f(x)$,
- se il grado di $r(x)$ é minore di quello di $g(x)$ la divisione é completata $f(x) = q_{m-n}x^{m-n}\, g(x) + r(x)$,
- se il grado di $r(x)$ é ancora maggiore o uguale di quello di $g(x)$ si itera il procedimento prendendo $r(x)$ come dividendo e ancora $g(x)$ come divisore.

5.1. Qualche domanda.

- Cosa vuol dire dividere un polinomio per un altro ?
- Si può dividere $P(x) = x^2 + 1$ per $Q(x) = x + 1$?
- Quanto fa $P(x) = x^2 - 1$ diviso $Q(x) = x + 1$?
- Come si riconosce se un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x - \alpha$?

CAPITOLO 3

Successioni

1. Successioni aritmetiche

Una *successione aritmetica* è una fila, una successione, di numeri reali

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

tali che la differenza tra un qualunque elemento e quello che lo precede sia sempre la stessa: tale differenza d viene detta *ragione* della successione.
In ogni successione aritmetica riesce quindi

$$\begin{array}{lll} a_2 - a_1 = d & \rightarrow & a_2 = a_1 + d \\ a_3 - a_2 = d & \rightarrow & a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 - a_3 = d & \rightarrow & a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \\ \dots\dots & & \\ a_n - a_{n-1} = d & \rightarrow & a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{array}$$

Sono esempi di successioni aritmetiche la successione dei numeri naturali, la successione dei dispari, quella dei multipli di 3, ecc.

Esempio 1.1.

$$\{2, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -3, \dots, -33\}, \qquad d = -\frac{5}{3}$$

é una successione aritmetica con $d = -\frac{5}{3}$.

Esercizio 1.2. *Nella successione aritmetica* $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \dots\}$, *quale è il termine che occupa il 76° posto?*

Risposta: $(-\frac{29}{2})$

1.1. Le somme.

La somma

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \tag{1}$$

dei primi n termini di una successione aritmetica dipende, naturalmente,

- dal primo termine a_1
- dalla ragione d della successione,
- dal numero n di termini che si vogliono sommare.

La somma (1) si indica spesso anche con la notazione equivalente

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

L'espressione di S_n puó essere dedotta esplicitamente da $a_1,\ d,\ n$: basta scrivere la somma nelle due forme equivalenti

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n, \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

e sommare membro a membro.

$$2S_n = (a_1 + a_n)\ +\ (a_2 + a_{n-1})\ +\ \ldots\ +\ (a_n + a_1)$$

Tenuto conto che gli n addendi $(a_1 + a_n)$, $\quad (a_2 + a_{n-1})$, $\quad \ldots, (a_n + a_1)$ hanno tutti il medesimo valore si ottiene

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n} \tag{2}$$

Tenuto conto che

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

si ottiene la formula esplicita:

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] n}$$

Esempio 1.3. *La somma dei primi* 100 *numeri naturali*

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + ... + 100$$

si calcola con la formula (2)

$$S_{100} = \frac{101\,.\,100}{2} = 5050$$

In generale riesce per la successione aritmetica dei numeri naturali

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)\,.\,n}{2}$$

ovvero

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)\,.\,n}{2}$$

Esercizio 1.4. *Se* $d = \dfrac{3}{7}, a_1 = 2, S_n = 75$*, quanti sono i termini? Quale è l' ultimo?*

Risposta: *(n=15;* $a_n = 8$*)*

Somma delle potenze di numeri naturali

A fianco della successione aritmetica dei numeri naturali si possono considerare le successioni dei loro quadrati, dei loro cubi, ecc.

$$\begin{array}{llllllll} 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & \dots & n^2, & \dots \\ 1, & 8, & 27, & 64, & 125, & \dots & n^3, & \dots \\ \dots \end{array}$$

Esse non sono piú successioni aritmetiche: infatti le differenze tra termini successivi, sia dei quadrati, come dei cubi non é piú costante

$$\begin{array}{llll} 4-1=3, & 9-4=5, & 16-9=7, & \dots \\ 8-1=7, & 27-8=19, & 64-27=37, & \dots \end{array}$$

La somma dei quadrati

É interessante cercare l'espressione dipendente da n per la somma

$$S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2.$$

dei primi n quadrati.

Dalla nota formula del cubo di un binomio $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, si ottiene

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Riscriviamo i due membri di questa espressione, dando successivamente ad x i valori $x = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{array}{r|rcl}
x: & (x+1)^3 - x^3 & = & 3\,.\,x^2 + 3\,.\,x + 1 \\
\hline
0: & 1^3 - 0^3 & = & 3\,.\,0^2 + 3\,.\,0 + 1 \\
1: & 2^3 - 1^3 & = & 3\,.\,1^2 + 3\,.\,1 + 1 \\
2: & 3^3 - 2^3 & = & 3\,.\,2^2 + 3\,.\,2 + 1 \\
3: & 4^3 - 3^3 & = & 3\,.\,3^2 + 3\,.\,3 + 1 \\
4: & 5^3 - 4^3 & = & 3\,.\,4^2 + 3\,.\,4 + 1 \\
5: & 6^3 - 5^3 & = & 3\,.\,5^2 + 3\,.\,5 + 1 \\
... & & & \\
n: & (n+1)^3 - n^3 & = & 3\,.\,n^2 + 3\,.\,n + 1
\end{array}$$

Sommiamo membro a membro i risultati così ottenuti in corrispondenza alle $n+1$ scelte di $x:\ 0,\ 1, \dots,\ n$.
A primo membro si ottiene

$$(1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + ... + [6^3 - 5^3] + ... + [(n+1)^3 - n^3] = (n+1)^3,$$

avendo effettuato le dovute semplificazioni.
La somma dei termini a secondo membro nella tabella vale

$$3(0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 1 + \cdots + 1)$$

ovvero

$$3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + (n+1),$$

Si ha quindi la relazione

$$(n+1)^3 = 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + (n+1)$$

ovvero

$$(n+1)^3 - 3S_n^{(1)} - (n+1) = 3S_n^{(2)}$$

di qui, tenendo conto della espressione nota

$$S_n^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{[n(n+1)]}{2}; \tag{3}$$

si trae

$$3S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

da cui la formula esplicita della somma dei quadrati dei naturali da 1 ad n

$$\boxed{S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \tag{4}$$

Esempio 1.5. *La somma dei quadrati*

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$$

vale pertanto

$$\boxed{S_{100}^{(2)} = \frac{100(101)(201)}{6} = 338350}$$

mentre quella dei primi 200 *vale*

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + 200^2 = \frac{200(201)(401)}{6} = 2686700$$

.... assai piú del doppio !

$\boxed{\text{La somma dei cubi}}$

Le somme dei cubi

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$$

si trovano con un procedimento analogo a quello usato per determinare la somma dei quadrati.
Dalla potenza

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

si ricava

$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1;$$

Dando ad x i valori $0, 1, 2, \ldots, n$ si ricavano le $n+1$ relazioni seguenti

$$\begin{array}{r|rcl}
x: & (x+1)^4 - x^4 & = & 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
\hline
 & & & \\
0: & 1^4 - 0^4 & = & 4\,.\,0^3 + 6\,.\,0^2 + 4\,.\,0 + 1 \\
1: & 2^4 - 1^4 & = & 4\,.\,1^3 + 6\,.\,1^2 + 4\,.\,1 + 1 \\
2: & 3^4 - 2^4 & = & 4\,.\,2^3 + 6\,.\,2^2 + 4\,.\,2 + 1 \\
3: & 4^4 - 3^4 & = & 4\,.\,3^3 + 6\,.\,3^2 + 4\,.\,3 + 1 \\
4: & 5^4 - 4^4 & = & 4\,.\,4^3 + 6\,.\,4^2 + 4\,.\,4 + 1 \\
5: & 6^4 - 5^4 & = & 4\,.\,5^3 + 6\,.\,5^2 + 4\,.\,5 + 1 \\
... & & & \\
n: & (n+1)^3 - n^3 & = & 4\,.\,n^3 + 6\,n^2 + 4\,n + 1
\end{array}$$

Sommando membro a membro, fatte le dovute semplificazioni, si ottiene

$$(n+1)^4 = 4S_n^{(3)} + 6S_n^{(2)} + 4S_n^{(1)} + (n+1),$$

e di qui, avuto riguardo alle espressioni giá trovate di $S_n^{(1)}$ e di $S_n^{(2)}$, si trae

$$\boxed{S_n^{(3)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

E' ormai chiaro come si procede per calcolare le potenze successive; per $S_n^{(4)}$, si usa lo sviluppo della potenza $(x+1)^5$, e si giunge alla relazione

$$(n+1)^5 = 5S_n^{(4)} + 10S_n^{(3)} + 10S_n^{(2)} + 5S_n^{(1)} + (n+1),$$

da cui

$$\boxed{S_n^{(4)} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}.$$

Analogamente per le somme di potenze maggiori, approdando naturalmente a formule via via piú complesse.

Esempio 1.6. *La somma dei cubi dei primi* 100 *numeri naturali*

$$1 + 8 + 27 + \cdots + 1000000$$

vale pertanto

$$S_{100}^{(3)} = \frac{100^2(101)^2}{4} = 25502500$$

mentre la somma delle quarte potenze

$$1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + 100^4$$

vale

$$\frac{100(101)(201)(30000+300-1)}{30} = 20321233330$$

2. Somma delle potenze

Consideriamo la somma dei quadrati

$$S_{n(d)}^{(2)} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2$$

dei termini a_1, a_2, ..., a_n di una qualsiasi successione aritmetica.
Tenuto presente che $a_j = a_1 + (j-1)\,.\,d$ si ha

$$a_j^2 = a_1^2 + 2a_1d(j-1) + d^2(j-1)^2$$

e quindi, sommando su j

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = na_1^2 + 2a_1d\sum_{j=1}^{n}(j-1) + d^2\sum_{j=1}^{n}(j-1)^2$$

cioè

$$(5) \qquad S^{(2)}_{n(d)} = na_1^2 + 2a_1 d S^{(1)}_{n-1} + d^2 S^{(2)}_{n-1}$$

dove valgono per $S^{(1)}_{n-1}$ e $S^{(2)}_{n-1}$ le espressioni (3) e (4).

Esempio 2.1. *Consideriamo la successione aritmetica dei primi* 10 *numeri dispari* ($a_1 = 1, \quad d = 2$)

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19$$

la somma dei loro quadrati

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 15^2,\ 17^2,\ 19^2$$

vale pertanto

$$10 + 4 \times 45 + 4 \times 285 = 1330$$

valore che puó essere facilmente verificato anche a mano.

Naturalmente l'interesse della formula stabilita diviene evidente quando fosse richiesta la somma non dei primi 10 *quadrati dei dispari ma dei primi* 100 *o dei primi* 1000*, ecc.*

Esercizio 2.2. *Calcolare la somma*

$$S = 10^2 + 14^2 + 18^2 + \cdots + 126^2.$$

I termini 10,14,18,...,126, formano una successione aritmetica di $n = 30$ *termini, di ragione* $d = 4$*. Applicando la formula stabilita sopra si ha*

$$S = 30 * 10^2 + 80 S^{(1)}_{29} + 16 S^{(2)}_{29} = 30 * 100 + 80 * 435 + 16 * 8555 = 174680$$

Esercizio 2.3. *Le palle di un cannone siano disposte a piramide di base quadrata; se il lato di base ha n palle, quante sono le palle in tutto?*

Risposta:

$$S = n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Se la piramide è tronca e termina superiormente con un quadrato di lato $p \geq 1$*, quante palle ci sono in tutto?*

Risposta:

$$S = n^2 + (n-1)^2 + \cdots + p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(p-1).p(2p-1)}{6}$$

3. Successioni geometriche

Una *successione geometrica* è una successione di numeri

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

per i quali è costante il *rapporto* q tra ogni termine e quello che lo precede,

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \quad \Leftrightarrow \quad a_k = a_{k-1}\, q$$

Il numero reale q prende ancora il nome di *ragione* della *successione geometrica*.

Sono successioni geometriche

$$\{3, 6, 12, 24, \dots, 1536\} \qquad q = 2$$

$$\{-5, \frac{10}{3}, -\frac{20}{9}, \dots, \frac{1280}{6561}\} \quad q = -\frac{2}{3}$$

$$\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dots, 16\} \qquad q = \sqrt{2}$$

É evidente che

$$\forall k \geq 1 : \quad a_k = a_1\, q^{k-1}$$

Se i termini della successione geometrica

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

sono tutti positivi, i loro logaritmi, in una base qualunque b,

$$\log_b(a_1),\ \log_b(a_2),\ \dots,\ \log_b(a_n), \dots$$

formano una successione aritmetica di ragione $d = \log_b q$, infatti

$$\log_b a_k = \log_b a_{k-1} + \log_b q,$$

ovvero

$$\log_b a_k = \log_b a_1 + (k-1)\log_b q.$$

3.1. Somme.

Calcoliamo la somma S dei primi n termini di una successione geometrica di ragione q:

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Se $q = 1$ allora gli n termini sono tutti uguali e la somma vale, ovviamente na_1.
Nel caso $q \neq 1$ il calcolo della somma non é ovvio: moltiplicando membro a membro per q si ha

$$\begin{array}{ll} S & = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ Sq & = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \end{array}$$

da cui, sottraendo membro a membro, e semplificando

$$(1-q)S = a_1(1-q^n) \quad \rightarrow \quad S = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

formula che calcola la somma conoscendo il primo termine a_1, la ragione q, e il numero n degli addendi.

Esempio 3.1. *Calcoliamo la somma dei primi* 10 *termini della successione geometrica*

$$1,\, 2,\, 2^2,\, 2^3,\, 2^4,\, \ldots,\, 2^9$$

Tenuto presente che $a_1 = 1, \quad q = 2, \quad n = 9$ *si ha*

$$S = \frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

3.2. Prodotti.

Per quanto riguarda il prodotto

$$P = a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_n = a_1 \,.\, a_1 q \,.\, a_1 \,.\, q^2\, \ldots\, a_1 \,.\, q^{n-1} = a_1^n\, q^{1+2+3+\ldots(n-1)}$$

Tenuto conto che

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

si ottiene

$$P = a_1^n\, q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Esempio 3.2. La scacchiera *Si narra che un sultano, entusiasmato dal gioco degli scacchi, abbia voluto ricompensare il suo inventore promettendogli di esaudire qualunque suo desiderio, e che questi abbia chiesto un chicco di grano per la prima casella, due per la seconda, il doppio*

(4) per la terza, ancora il doppio (8) per la quarta, e cosí via, per tutte le 64 caselle della scacchiera.
All' iniziale sollievo del sultano, che pensó di essersela cavata con poco, subentró lo sgomento quando ci si rese conto dell'effettivo valore numerico della richiesta.

In effetti

- *il numero dei chicchi di grano richiesti è* $2^{64} - 1$, *e* $2^{64} \simeq 10^{19}$*;*
- *supponendo*
  - *che ogni spiga di grano produca 30 chicchi,*
  - *che ogni metro quadrato di terreno produca 100 spighe,*
  - *che il raggio terrestre sia* $6 \,.\, 10^6\, m$*, e quindi la superficie sia circa* $450 \,.\, 10^{12}\, m^2$

  L'intera superficie terrestre, inclusi (per assurdo) anche gli oceani, produce non piú di

  $$450 \,.\, 10^{12} \times 3 \,.\, 10^3 = 1350 \,.\, 10^{15}$$

- *Per produrre* 10^{19} *chicchi di grano occorrerebbe coltivare una superficie pari a quasi 10 volte quella della intera Terra !*

Esercizio 3.3. Il foglio piegato. *Si abbia inizialmente un foglio di spessore* l_0*; piegandolo una prima volta lo spessore raddoppia; poi raddoppia di nuovo se ulteriormente lo si piega, e cosí via.*

- *Dopo n piegature quale è lo spessore* l*?*

Risposta: $l = 2^n\, l_0$

- *Se* l_0*=1 mm., e la distanza Terra-Luna è 370000 Km., dopo quante piegature lo spessore oltrepassa la luna?*

Risposta: $n \geq 39$

Esercizio 3.4. *Un ricamo consiste di un quadrato di lato* l*, entro il quale è costruito un altro quadrato i cui vertici sono i punti medi dei lati del precedente; dentro quest'ultimo ne viene costruito un altro, con le medesime modalitá, e cosí via.*
Se i quadrati sono in tutto n*, quanto filo occorre per il ricamo?*

Risposta: L*= lunghezza del filo* $=4\, l\, \dfrac{1 - (1/\sqrt{2})^n}{1 - 1/\sqrt{2}}$.

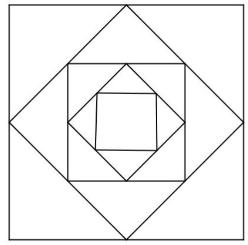


FIGURA 1. Successione di quadrati.

ESERCIZIO 3.5. *Un grave cade da un'altezza h_0, urta il suolo, e risale fino ad un' altezza $h_1 = E\,h_0$, con $0 < E < 1$; il fenomeno si ripete con le medesime modalitá, con l' intervento del medesimo fattore E.*
Dopo n urti al suolo,

- *a che altezza si arresta?*

  Risposta: $h_n = E^n\,h_0$
- *Quanto spazio ha percorso?*

  Risposta: $2h_0\,\dfrac{1-E^n}{1-E} - h_0$
- *Se sperimentalmente si verifica che $h_n > h_0/2$, a quale limitazione soddisfa E?*

  Risposta: $E > 1/\sqrt[n]{2}$
- *Fissato un numero ε, con la limitazione $0 < \varepsilon < 1$, dopo quanti urti è $h_n < \varepsilon\,h_0$?*

  Risposta: $n > \log\varepsilon/\log E$

4. La curva di Koch o il fiocco di neve

Partiamo da un triangolo equilatero, i cui lati abbiano lunghezza l_0.
Eliminiamo in ognuno dei tre lati, la terza parte centrale, e sostituiamola con due segmenti uguali disposti in modo tale da formare, con la parte eliminata, un nuovo triangolo equilatero, esterno a quello originario.
Il poligono che cosí si ottiene ha 12 lati ognuno di lunghezza $l_1 = l_0/3$.
Su ognuno di tali lati, ripetiamo la costruzione suddetta, pervenendo cosí a un nuovo poligono di 48 lati ognuno di lunghezza $l_1 = l_0/9$.
Immaginiamo di ripetere la costruzione una terza, una quarta, una $n-$esima volta.

La *curva di Koch*, detta anche il *fiocco di neve* é la curva limite cui si avvicinano al crescere di n i poligoni costruiti uno dall'altro con il procedimento descritto sopra.
Cominciamo con l'osservare che, se indichiamo con N_k il numero dei lati del poligono che si ottiene al k-simo passo, e con l_k la lunghezza di ogni lato, risulta $N_{k+1} = 4\, N_k$ e $l_{k+1} = l_k/3$ (si intende che $N_0 = 3$). Pertanto, se $\mathcal{P}_k$ denota il perimetro del poligono ottenuto al $k-$esimo intervento si ha

$$\mathcal{P}_k = N_k\, l_k, \qquad \mathcal{P}_{k+1} = N_{k+1}\, l_{k+1} = 4\, N_k \frac{1}{3}\, l_k,$$

cioé

$$\mathcal{P}_{k+1} = \frac{4}{3}\, \mathcal{P}_k.$$

Dunque, l'insieme dei perimetri forma una successione geometrica di ragione $q = 4/3$; ne viene

$$\mathcal{P}_1 = \frac{4}{3}\, \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_2 = \frac{4}{3}\, \mathcal{P}_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_3 = \frac{4}{3}\, \mathcal{P}_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \mathcal{P}_0, \ldots,$$

cioé

$$\mathcal{P}_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k \mathcal{P}_0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

E' chiaro che, al crescere indefinito di n, il perimetro cresce esso stesso indefinitamente.
Procediamo ora al calcolo dell'area racchiusa, osservando preliminarmente che, se σ_k denota l' area del triangolo di lato l_k, si ha

$$\sigma_k = \frac{\sqrt{3}}{4}\, l_k^2, \tag{7}$$

nonché

$$\sigma_{k+1} = \frac{1}{9}\, \sigma_k, \tag{8}$$

dato che $l_{k+1} = l_k/3$. Ció posto, indichiamo con $\mathcal{A}_k$ l'area racchiusa dal poligono costruito al k-simo passo, ed osserviamo che si ha

$$\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k + N_k\, \sigma_{k+1} = \mathcal{A}_k + \frac{1}{9}\, N_k\, \sigma_k, \tag{9}$$

dato che, nel passaggio dal k-simo poligono al successivo, si sono aggiunti N_k triangoli di lato l_{k+1}. Scriviamo per esteso le relazioni (9):

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 + \dfrac{1}{9}\, N_0\, \sigma_0 \\ \\ \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \dfrac{1}{9}\, N_1\, \sigma_1 \\ \\ \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 + \dfrac{1}{9}\, N_2\, \sigma_2 \\ \\ \dots \\ \mathcal{A}_{n-1} = \mathcal{A}_{n-2} + \dfrac{1}{9}\, N_{n-2}\, \sigma_{n-2} \\ \\ \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} + \dfrac{1}{9}\, N_{n-1}\, \sigma_{n-1}, \end{cases}$$

e sommiamo m.a m.; fatte le dovute semplificazioni, si ottiene

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{9}\,(N_0\,\sigma_0 + N_1\,\sigma_1 + N_2\,\sigma_2 \cdots + + N_{n-1}\,\sigma_{n-1}). \tag{10}$$

Nella parentesi si riconosce una successione geometrica di ragione $q = 4/9$, dato che si ha, per la (8),

$$N_{k+1}\,\sigma_{k+1} = 4\,N_k\,\frac{1}{9}\,\sigma_k = \frac{4}{9}\,N_k\,\sigma_k,$$

e quindi

$$N_k\,\sigma_k = \left(\frac{4}{9}\right)^k N_0\,\sigma_0, \qquad k = 1, 2, \dots, n-1; \tag{11}$$

dunque la (10) diviene

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{9}\left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] N_0\,\sigma_0$$

cioé

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{9}\,\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}\,N_0\,\sigma_0 = \mathcal{A}_0 + \frac{1}{5}\left[1-(4/9)^n\right] N_0\,\sigma_0.$$

Ma $\sigma_0 \equiv \mathcal{A}_0$, ed $N_0 = 3$, sicché la precedente diviene

$$\boxed{\mathcal{A}_n = \frac{1}{5}\left[8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]\mathcal{A}_0}; \tag{12}$$

essa esprime l' area delimitata dall'$n-$esimo poligono che approssima la curva di Koch.

Si noti come, contrariamente ai perimetri che crescono illimitatamente, le aree si mantengono limitate al crescere del numero n, tendendo al valore limite $\mathcal{A}_\infty = \frac{8}{5}\mathcal{A}_0$ per $n \to \infty$.
La curva di Koch quindi ha lunghezza infinita ma racchiude una regione limitata del piano: essa costituisce anche un notevole esempio di curva priva di tangente in ogni suo punto.
La curva di Koch ún frattale, un tipo di insieme del piano di cui la Matematica si occupa solo da pochi decenni, e che trova applicazioni in molti campi della scienza: fisica, biologia, botanica,. . . .

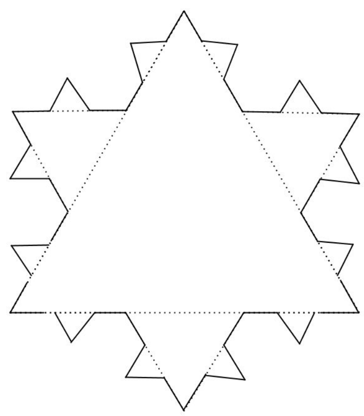


Figura 2. La curva di Koch.

CAPITOLO 4

Equazioni di primo o secondo grado

Le espressioni che consideriamo nel seguito sono

equazioni nell'incognita x

Il problema che le equazioni presentano è la ricerca del valore, o dei valori numerici, detti *radici*, da assegnare alla x affinchè l'equazione sia soddisfatta.

1. Equazioni di primo grado

Supponiamo di lavorare nell'ambito (almeno) dei numeri razionali:

qualunque siano a e b, purché sia $a \neq 0$ riesce

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

OSSERVAZIONE 1.1. *Se si lavora nell'ambito dei soli numeri interi il problema è piú difficile.*
... che significato dare infatti, avendo a disposizione solo gli interi, alla frazione $\frac{b}{a}$?

2. Equazioni di secondo grado

ESERCIZIO 2.1.

- *Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 = k$ ha due radici reali e distinte e indicarle, e per quali non ha alcuna radice reale.*
- *Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 = k$ ha una sola radice reale e indicarla.*
- *Tracciato il grafico della parabola $y = x^2$ impostare graficamente la ricerca delle radici dell'equazione $x^2 = k$.*
- *Trasformare l'equazione $a\,x^2 = h,\ a \neq 0$, nella forma precedente $x^2 = k$.*
- *Determinare per quali $a,\ k \in \mathbb{R}$ l'equazione $a\,x^2 = h$ non ha radici, ne ha una, ne ha due distinte.*

Teorema 2.2. *L'equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0,\ a \neq 0,$ *equivale a*

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}$$

Dimostrazione.

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0,\ a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2\frac{b}{2\,a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

da cui, aggiungendo e sottraendo lo stesso termine si ha

$$x^2 + 2\frac{b}{2\,a}\,x + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0;$$

riconoscendo nei primi addendi il prodotto notevole

$$x^2 + 2\frac{b}{2\,a}\,x + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2$$

si ottiene, di conseguenza,

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}$$

cioè la tesi. $\square$

Il termine

$$\triangle = b^2 - 4\,a\,c$$

si chiama discriminante dell'equazione $a\,x^2 + b\,x + c = 0$: è evidente che l'equazione ammette radici se e solo se riesce

$$\triangle \geq 0$$

In tal caso le radici sono

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$$

che coincidono se $\triangle = 0$.

Il grafico di $y = a\,x^2 + b\,x + c,\ a \neq 0$ corrisponde al grafico di

$$y = \left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\triangle}{4\,a^2}\right)$$

Esercizio 2.3.

- *Riconoscere che l'equazione* $x^2 + 10\,x = k$ *equivale, cioè ha le stesse soluzioni, della* $(x + 5)^2 = k + 25$.

- *Riconoscere che l'equazione* $x^2 + b\,x = k$ *equivale alla*
$$(x + b/2)^2 = \frac{b^2 + 4k}{4}$$
- *Determinare per quali* $b,\ k \in \mathbb{R}$ *l'equazione* $x^2 + b\,x = k$ *non ha radici, ne ha una sola, ne ha due distinte.*

Esercizio 2.4.
L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ *equivale a*
$$x^2 - 2\,\frac{5}{2}\,x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6$$
ovvero
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2 - 4\,.\,6}{2^2}$$
da cui segue
$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{5^2 - 4\,.\,6}}{2} \to \begin{cases} x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{5^2 - 4\,.\,6}}{2} = 3 \\ \\ x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{5^2 - 4\,.\,6}}{2} = 2 \end{cases}$$

Esercizio 2.5. *Tracciato il grafico della parabola* $y = x^2 + b\,x + c$ *impostare graficamente la ricerca delle radici dell'equazione*
$$x^2 + b\,x + c = 0.$$

3. Equazioni con parametri

Si incontrano frequentemente equazioni di secondo grado a coefficienti dipendenti da un parametro
$$a(k)x^2 + b(k)x + c(k) = 0$$
Problemi connessi sono, ad esempio:

- determinare per quali valori del parametro k l'equazione ha due, una o nessuna soluzione,
- determinare per quali valori del parametro k le radici dell'equazione appartengono ad un'intervallo assegnato.

Esercizio 3.1. *L'equazione* $x^2 + 4x + k = 0$ *ha soluzioni*
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,k}}{2}$$
da cui si riconosce che

- *se* $4^2 - 4\,k > 0$ *ovvero* $k < 4$ *si hanno due soluzioni,*

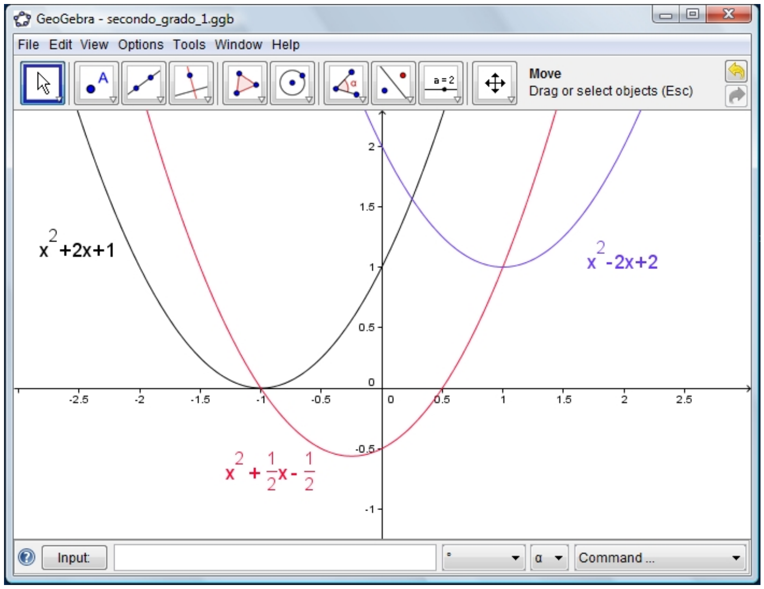


FIGURA 1. Equazioni di secondo grado e grafici delle funzioni $y = a\,x^2 + b\,x + c$

- *se* $4^2 - 4\,k = 0$ *ovvero* $k = 4$ *si ha una sola soluzione,*
- *se* $4^2 - 4\,k < 0$ *ovvero* $k > 4$ *non si hanno soluzioni.*

OSSERVAZIONE 3.2. *La classificazione delle equazioni di secondo grado (due radici distinte, una sola, nessuna) si capisce molto bene se si ha familiaritá con il grafico delle funzioni* $y = a\,x^2 + b\,x + c$*: il fatto che i grafici, vedi Figura 1, taglino o meno l'asse delle ascisse corrisponde esattamente all'avere l'equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ *due radici distinte, una sola, nessuna.*

4. Fattorizzazione di un polinomio

La parola *fattorizzare* vuol dire esprimere il polinomio assegnato sotto forma di *prodotto di altri polinomi*:

- La conoscenza di una radice α dell'equazione $f(x) = 0$ consente la fattorizzazione

$$f(x) = (x - \alpha)\,q(x)$$

- Tutti i polinomi di grado maggiore di 2 ammettono fattorizzazioni, ma non ci sono in genere algoritmi efficaci per determinarle.
- Fattorizzare un polinomio di grado maggiore di 2 è, quasi sempre, operazione molto difficile.

Esempio 4.1. *Il polinomio x^4+1 non ha radici, ma tenuto conto della formula del quadrato di un binomio e del prodotto notevole*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

si riconosce che

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

e quindi la fattorizzazione

$$x^4+1 = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

in due fattori di secondo grado che, ovviamente, non hanno radici reali.

Osservazione 4.2. *La fattorizzabilità, o meno, di un polinomio dipende naturalmente anche dall'ambiente numerico in cui si lavora:*

- *se si lavora nei razionali il polinomio $p(x) = x^2-2$ non è fattorizzabile...*
- *se si lavora nei reali lo è*

$$x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Esercizio 4.3.

- *Decomporre in fattori il polinomio x^2-5x+6,*
- *decomporre in fattori il polinomio $x^5-5x^4+6x^3$*
- *decomporre in fattori il polinomio x^4-16*

Esercizio 4.4. *Riconoscere che*

$$x^4+x^2+1 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

Esercizio 4.5. *Riconoscere che*

$$x^8+2x^4+4 = \left(x^2+\sqrt{2}-\sqrt{3\sqrt{2}x}\right)\left(x^2+\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}x}\right)$$

$$\left(x^2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}x\right)\left(x^2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}x\right)$$

CAPITOLO 5

Esponenziale e logaritmi

1. Potenze di 10

Molti numeri si scrivono come potenze di 10:

$$0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}, \quad 1 = 10^0, \quad 10 = 10^1, \quad 100 = 10^2, \quad 1000 = 10^3, \ldots$$

Il numero

$$3,162 \simeq \sqrt{10}$$

ha, per definizione di radice quadrata la proprietá

$$3,162 \times 3,162 \simeq 10^1$$

Quindi é ragionevole leggere $3,162$ all'incirca come $10^{1/2}$ che[1], infatti ha la stessa proprietá

$$10^{1/2} \times 10^{1/2} = 10^1$$

come pure

$$0.3162 = \frac{1}{10} \times 3.162 \simeq 10^{-1+1/2} = 10^{-1/2}$$

Con questa chiave di lettura é altrettanto ragionevole leggere

$$31,62 \simeq 10^1 \times 10^{1/2} = 10^{3/2}$$

come pure

$$3162 \simeq 10^{3,5}$$

Pensando a qualche altra radice, per esempio alla radice cubica

$$2,154 \simeq \sqrt[3]{10}$$

sará altrettanto ragionevole leggere

$$2,154 \simeq 10^{1/3}$$

come pure

$$21,54 \simeq 10^{1+1/3}, \quad 2154 \simeq 10^{3+1/3}, \quad 4,642 \simeq 2,154^2 \simeq 10^{2/3}$$

[1] I due numeri sono ovviamente diversi, uno razionale e l'altro irrazionale.

Come si vede si amplia la famiglia dei numeri che si possono leggere come potenze di 10:

$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 3,162 \quad 0.3162 \quad 31,62 \quad 2,154 \quad 21,54 \quad 4,642 \quad \dots$

Osservazioni matematiche abbastanza fini conducono a riconoscere che addirittura tutti i numeri positivi si possono esprimere esattamente come opportune potenze di 10:

- i numeri $0 < x < 1$ potenze di 10 con esponente negativo,
- il numero $x = 1$ potenza di 10 con esponente zero,
- i numeri $1 < x$ potenze di 10 con esponente positivo.

L'esponente da utilizzare per ciascun numero positivo x ha il nome di

logaritmo in base 10 *di quel numero* x

e si indica con $\log_{10}(x)$ o, piú brevemente con $\log(x)$, in altri termini

$$a = \log_{10}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^a$$

Gli esempi precedenti corrispondono pertanto a

$$\log_{10}(1) = 0,\ \log_{10}(10) = 1,\ \log_{10}(100) = 2,\ \dots \log_{10}(4,642) \simeq 2/3, \dots$$

Il calcolo del logaritmo di un numero non é un calcolo affidato ad operazioni aritmetiche: per molti anni esso é stato eseguito con l'ausilio di tavole numeriche preparate con grande cura da matematici celebri, attualmente il calcolo é affidato alle calcolatrici elettroniche di cui tutti dispongono.

É ragionevole attendersi che se

$$a \leq x \leq b \quad \to \quad \log_{10}(a) \leq \log_{10}(x) \leq \log_{10}(b)$$

Cosí, ad esempio

$$10 \leq x \leq 100 \quad \to \quad \log_{10}(10) \leq \log_{10}(x) \leq \log_{10}(100) \quad \to \quad 1 \leq \log_{10}(x) \leq 2$$

ovvero

$$x \in [10, 100] \quad \to \quad \log_{10}(x) \in [1, 2] \quad \leftrightarrow \quad \log_{10}(x) = 1, \dots.$$

Analogamente

$$x \in [100, 1000] \quad \to \quad \log_{10}(x) = 2, \dots.$$

ecc.

É quindi molto facile determinare la parte intera di $\log_{10}(x)$, basta riconoscere a quale intervallo $[1, 10]$, $[10, 100]$, $[100, 1000]$, … il numero x appartenga.

Molto meno facile é invece riconoscere la parte decimale, detta *mantissa*.

1.1. A cosa servono (servivano) i logaritmi ?

Il legame

$$\textit{numeri} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{logaritmi}$$

é servito (prima che le attuali macchine calcolatrici risolvessero i problemi per altra via) a calcolare

- prodotti,
- quozienti,
- radici,

almeno nel caso di numeri grandi tanto da scoraggiare l'esecuzione aritmetica tradizionale.

Moltiplicazioni:

Assegnati due numeri positivi a e b si debba calcolare il prodotto $p = a \,.\, b$:

$$a = 10^{\log(a)},\ b = 10^{\log(b)} \quad \to \quad p = 10^{\log(a)+\log(b)}$$

Il logaritmo di p é pertanto $\log(a) + \log(b)$: considerata *facile* la somma, $\log(p) = \log(a) + \log(b)$ la determinazione di p corrisponde alla lettura delle tavole in senso inverso, dato $\log(p)$ trovare il numero p cui corrisponde !

Divisione:

$$q = \frac{a}{b} \quad \to \quad \log(q) = \log(a) - \log(b)$$

Radici:

Sia $c = \sqrt[3]{a}$ allora

$$\log(c) = \frac{1}{3}\log(a)$$

Dalla conoscenza di $\log(c)$ si ricava c !

ESEMPIO 1.1. *Supponiamo di voler calcolare* $a = 2^{64}$*:*

$$\log(a) = 64 \,.\, \log(2) \simeq 64 \,.\, 0,301 = 19,266$$

Un logaritmo cosí alto fa riconoscere che

$$a \in [10^{19},\, 10^{20}]$$

informazione non banale sull'effettiva grandezza di 2^{64}*.*

Esempio 1.2. *Il simbolo* $n!$ *rappresenta il prodotto degli* n *numeri naturali da* 1 *a* n*: cosí* $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$*. La proprietá del logaritmo rispetto alla moltiplicazione permette di riconoscere che*

$$\log(n!) = \log(n) + \log(n-1) + \cdots + \log(2) + \log(1)$$

Esempio 1.3. *Consideriamo il polinomio* $x^2 - 5x + 6$*: cosa puó dirsi dell'espressione* $\log(x^2 - 5x + 6)$ *?*
Il logaritmo é definito solo per i numeri positivi: occorre quindi, prima di tutto, esaminare per quali valori di x *l'espressione* x^2-5x+6 *produca un numero positivo.*
Supponiamo di sapere che

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = (3-x)(2-x)$$

allora ha senso parlare di $\log(x^2 - 5x + 6)$ *se e solo se* $x < 2$ *oppure* $x > 3$*.*
La proprietá del logaritmo rispetto alla moltiplicazione permette di riconoscere che

$$\begin{cases} x > 3 & \rightarrow \quad \log(x^2 - 5x + 6) = \log(x-3) + \log(x-2) \\ x < 2 & \rightarrow \quad \log(x^2 - 5x + 6) = \log(3-x) + \log(2-x) \end{cases}$$

Le due formule si riassumono nei due casi $x < 2$ *oppure* $x > 3$ *nell'unica espressione*

$$\log(x^2 - 5x + 6) = \log(|x-3|) + \log(|x-2|)$$

2. Logaritmi in basi diverse

L'idea di rappresentare un numero positivo come opportuna potenza di base 10 puó essere generalizzata nell'analoga idea di rappresentarlo come un'altra opportuna potenza di un'altra base.
Pensando, ad esempio, alla base 100 i conti sono quasi immediati: considerato che

$$10 = 100^{1/2}$$

ne segue che

$$x = 10^{\alpha} \quad \rightarrow \quad x = 100^{\frac{\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad \log_{100}(x) = \frac{1}{2}\log_{10}(x)$$

ovvero

$$\log_{10}(x) = \log_{10}(100)\log_{100}(x)$$

La relazione osservata per la base 100 si conserva, analoga, per ogni altra scelta di base $b > 0$ e naturalmente $b \neq 1$:

$$\log_{10}(x) = \log_{10}(b)\log_{b}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_{b}(x) = \frac{1}{\log_{10}(b)}\log_{10}(x)$$

La precedente formula del cambiamento di base si mantiene, in forma analoga, tra i logaritmi in due basi a e b qualsiasi

$$\log_a(x) = \log_a(b)\log_b(a) \tag{13}$$

da cui in particolare, scelto $x = a$ si ricava la relazione

$$1 = \log_a(b)\log_b(a) \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \tag{14}$$

2.1. Esercizi.

Esempio 2.1. *Risolvere l'equazione*

$$\frac{1}{2}\log_{1/5}\sqrt{3x-2} = \log_{1/5}(3x-2) + \frac{3}{2};$$

E' chiaro anzitutto che l'eventuale soluzione va cercata per $x > 2/3$; l'equazione data equivale a

$$\frac{1}{4}\log_{1/5}(3x-2) = \log_{1/5}(3x-2) + \frac{3}{2},$$

da cui

$$\log_{1/5}(3x-2) = -2 \Rightarrow 3x-2 = (\frac{1}{5})^{-2} \quad \text{e quindi} \quad \mapsto \boxed{x=9}.$$

Esempio 2.2. *Risolvere l'equazione*

$$2\log_2(3x-7) = 3\log_{(3x-7)} 64.$$

Deve essere $x > 7/3$: osservato che $64 = 2^6$ l'equazione si può scrivere anche

$$2\log_2(3x-7) = 18\log_{(3x-7)} 2$$

e di qui, tenuto conto della (14)

$$2\log_2(3x-7) = \frac{18}{\log_2(3x-7)} \mapsto [\log_2(3x-7)]^2 = 9 \mapsto \log_2(3x-7) = \pm 3,$$

da cui

$$3x-7 = \begin{cases} 2^3 = 8 \\ \\ 2^{-3} = 1/8 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ \\ 19/8. \end{cases}$$

Esempio 2.3. *Risolvere l'equazione*

$$\log_3(x-2) + \log_9 x^2 = 1.$$

Anzitutto deve essere $x > 2$. L'equazione equivale a

$$\log_3(x-2) + 2\log_9 x = 1 \mapsto \log_3(x-2) + 2\log_9 3\ \log_3 x = 1,$$

ovvero

$$\log_3(x-2) + \log_3 x = 1 \Rightarrow \log_3(x-2)\,x = 1 \Rightarrow (x-2)x = 3,$$

che ammette le soluzioni $x = -1$ e $x = 3$; la prima non può essere accettata, e quindi rimane solo $x = 3$.

CAPITOLO 6

Funzioni

1. Prime definizioni

Tra i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno particolare importanza gli intervalli: per ogni coppia di numeri reali a e b con $a \leq b$ si definiscono

- l'intervallo chiuso $[a,\, b]: \; a \leq x \leq b$,
- l'intervallo aperto $(a,\, b): \; a < x < b$,
- i due intervalli semiaperti o semichiusi

$$[a,\, b): \; a \leq x < b, \quad (a,\, b]: \; a < x \leq b$$

Se $a = b$ l'intervallo chiuso $[a,\, a]$ si riduce al solo punto a, mentre gli altri intervalli aperti o semiaperti coincidono tutti con l'insieme vuoto.

Si includono nella famiglia degli intervalli anche

- gli insiemi costituiti da semirette contenute in $\mathbb{R}$, illimitate positivamente o negativamente,

$$x \leq k, \quad x < k, \quad x \geq k, \quad x > k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- l'intero asse reale $\mathbb{R}$.

Siano X ed Y due insiemi: si dice che f è una *funzione*, o *applicazione* di X in Y

$$f: \; X \to Y$$

se essa costituisce un procedimento, una legge, che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno ed un solo elemento y di Y.

L'elemento che corrisponde ad x viene indicato con $f(x)$, ed è detto *immagine* di x tramite f.
Il fatto che ad ogni x corrisponda *un solo* y si esprime dicendo che la corrispondenza definita da f è *univoca*.
L'insieme X si chiama *dominio* della funzione f, l'insieme Y dove la funzione assume i valori si chiama *codominio* .

Esempio 1.1.

(1) *Sia* $X = \mathbb{R} - \{0\}, \quad Y = \mathbb{R}$*; la corrispondenza* $f: X \to Y$ *definita da* $f(x) = 1/x$ *è una funzione;*

(2) *Sia* $X = [-1, 1], \quad Y = [0, 1]$*; la* $f : X \to Y$ *definita da* $f(x) = x^2$ *è una funzione;*
(3) *Sia* $X = [0, 1], \quad Y = [-1, 1]$ *ed* $f : X \to Y$ *la legge che associa ad ogni* x *la* y *tale che* $y^2 = x$*; la* f *non è una funzione, dato che, al medesimo* $x \neq 0$ *vengono associati due valori di* y*.*

La funzione $f : \ X \to Y$ è detta

- *suriettiva* se ogni $y \in Y$ è immagine di *almeno* un $x \in X$

$$f : X \to Y \text{ suriettiva se } \forall y \in Y, \quad \text{esiste} \quad x \in X : f(x) = y$$

- *iniettiva* se elementi distinti di X hanno immagini distinte in Y

$$f : X \to Y \text{ iniettiva se } \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

L'affermazione esiste $x \in X$ si indica anche con la grafia $\exists\, x \in X$.
Il simbolo $\exists$ si legge "*esiste*" , il simbolo analogo $\nexists$ si legge *non esiste.*

Se f è contemporaneamente suriettiva ed iniettiva, è detta *biettiva* o anche *corrispondenza biunivoca*:

- elementi distinti di X hanno per immagine punti distinti di Y,
- ogni elemento di $y \in Y$ é immagine di uno e uno solo elemento $x \in X$.

Esempio 1.2.

(1) *La funzione* $f : x \mapsto \sin(x)$*, nel dominio* $X = [0, 2\pi]$ *è suriettiva nel codominio* $Y = [-1, 1]$*, ma non iniettiva; è invece iniettiva se* $X = [-\pi/2, \pi/2]$*;*
(2) *La funzione* $f : X \to Y$*, ove* $X = Y = \mathbb{N}$*, che associa ad ogni numero naturale il suo quadrato non è suriettiva: esistono in* Y *numeri che non sono quadrati di numeri naturali;*
(3) *La corrispondenza tra i punti di un segmento verticale illuminato da una lampada, posta sufficientemente in alto, e la sua ombra è biunivoca (se la lampada non è sul prolungamento del segmento).*

Osservazione 1.3. *L'immagine dei punti* x *al variare di* x *in* X *è detta immagine di* X *tramite* f*, e si indica con* $f(X)$*; esso è un sottoinsieme di* Y*, sottoinsieme proprio se* f *non è suriettiva.*
A volte si indica come codominio di f *l'insieme* $f(X)$ *stesso: è chiaro che, con questa definizione,* f *è suriettiva.*

2. Grafico di una funzione

Se X ed Y sono sottoinsiemi dell'asse reale, la funzione f si dice *funzione reale di una variabile reale.*
Si chiama *grafico* della funzione il sottoinsieme G del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$G = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}.$$

In linea di massima, il grafico può essere tracciato, disegnando in un piano una coppia di assi ortogonali con origine in un punto O, ed individuando in tale piano i punti di coordinate $(x, f(x))$.

A volte un opportuno cambiamento di riferimento consente di rappresentare il grafico di una funzione con una espressione piú semplice.

Una *traslazione* di assi è un cambiamento di riferimento che sostituisce gli assi x, y con altri due, ξ, η, paralleli e concordi ai precedenti, con origine in un punto Ω di coordinate x_Ω, y_Ω.
Un punto P, che nel precedente sistema aveva coordinate x, y, ha nel nuovo sistema coordinate ξ, η, e i legami sono espressi da

$$(15) \qquad \begin{cases} x = x_\Omega + \xi \\ \\ y = y_\Omega + \eta, \end{cases} \quad \text{cioé} \quad \begin{cases} \xi = x - x_\Omega \\ \\ \eta = y - y_\Omega. \end{cases}$$

1. ***Parabola***. La funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, che associa ad ogni x reale un valore reale y :

$$y = f(x) = ax^2$$

ha come grafico, vedi Figura 1, una parabola passante per l'origine e con la concavitá rivolta

- verso l'*alto*, cioè la parte positiva dell'asse y, se $a > 0$,
- verso il *basso* , se $a < 0$.

Variando il valore della costante a, si ha una famiglia di parabole, tanto piú strette attorno all'asse y, quanto piú è grande a in valore assoluto.

Consideriamo ora la funzione

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \varphi(x) \ = \ ax^2 + bx + c$$

il suo grafico è ancora una parabola la cui equazione può essere ricondotta al tipo precedente con un'opportuna traslazione.
Basta osservare che

$$ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}] = a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta \ = \ b^2-4ac;$$

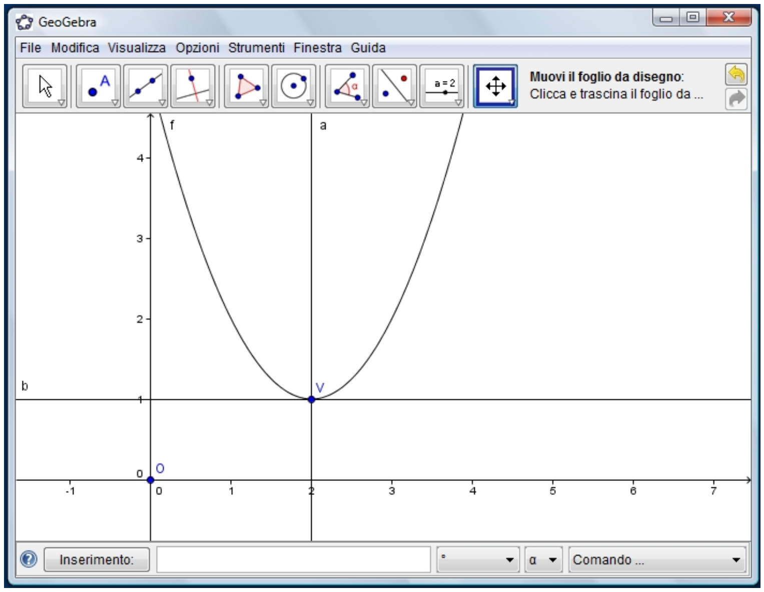


FIGURA 1. Parabola

ovvero

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Se allora si pone

$$\begin{cases} \xi = x + b/(2a) \\ \\ \eta = y + \Delta/(4a), \end{cases} \tag{16}$$

l'equazione del grafico: $y = ax^2 + bx + c$ si muta in

$$\eta = a\xi^2$$

Il confronto con la $(15)_2$ mostra che l'origine Ω dei nuovi assi ξ, η ha, nel vecchio riferimento, coordinate $(x_\Omega, y_\Omega) = (-b/2a, -\Delta/4a)$.

2. ***Iperbole***. La funzione $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tale che

$$y = a/x \tag{17}$$

ha per grafico, vedi figura 2, un'iperbole, avente per asintoti gli assi del riferimento, e contenuta nel primo e terzo quadrante se $a > 0$, nel secondo e quarto se $a < 0$.
Anche l'equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{18}$$

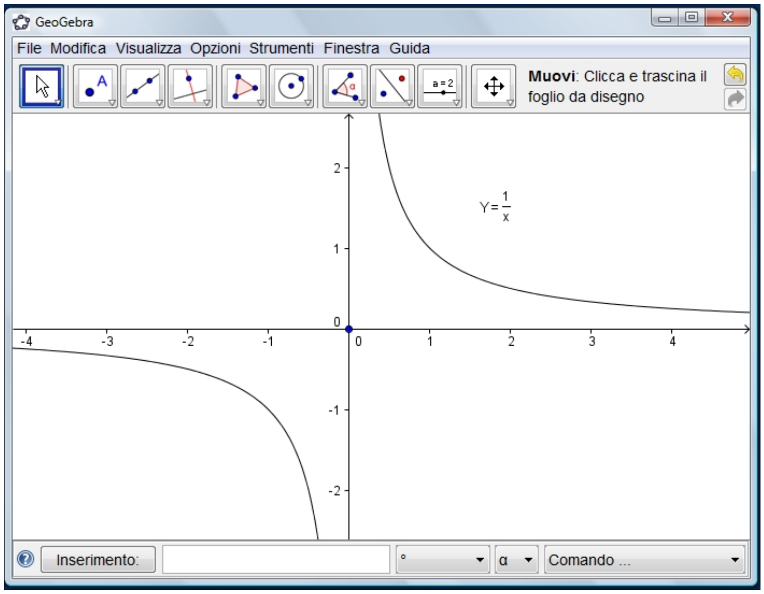


FIGURA 2. Iperbole $y = 1/x$

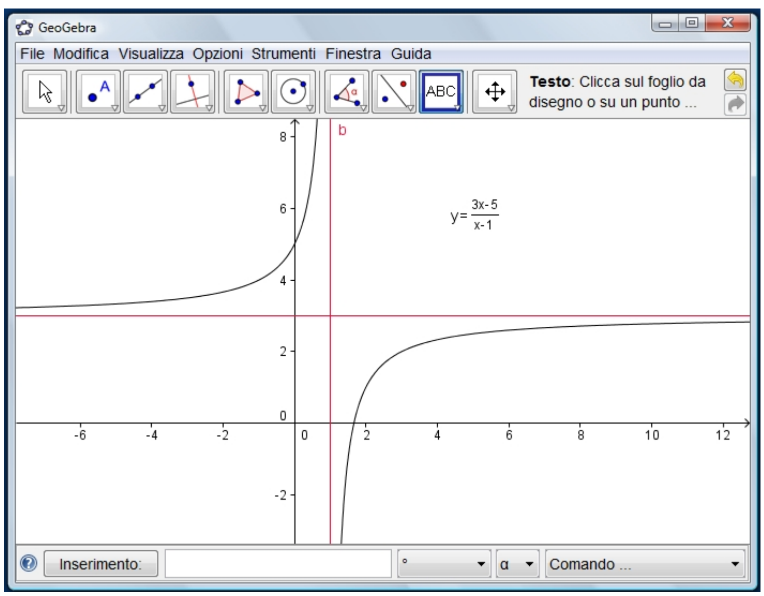


FIGURA 3. Iperbole traslata

con $ad - bc \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, rappresenta, vedi figura 3, un'iperbole di equazione riconducibile al tipo precedente. Basta tenere conto che

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\,\frac{x+b/a}{x+d/c} = \frac{a}{c}\,\frac{x+d/c+b/a-d/c}{x+d/c} = \frac{a}{c} - \frac{\mathcal{D}/c^2}{x+d/c}$$

con

$$\mathcal{D} \,=\, a\,d \,-\, b\,c.$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad y - \frac{a}{c} = -\frac{\mathcal{D}/c^2}{x + d/c}$$

Ponendo

$$\begin{cases} \xi = x + d/c \\ \\ \eta = y - a/c, \end{cases} \tag{19}$$

la (18) si trasforma in

$$\eta = A/\xi, \qquad A \,=\, -\mathcal{D}/c^2; \tag{20}$$

pertanto, nel riferimento ξ, η, con origine nel punto $\Omega = (-d/c, a/c)$, l'equazione è del tipo (17): gli asintoti sono i nuovi assi del riferimento: $\eta = 0$ e $\xi = 0$, cioè le rette

$$y = a/c, \quad x = -d/c$$

In altri termini,

- annullando il denominatore della (18) si trova l'asintoto verticale,
- mentre il rapporto a/c tra i coefficienti della x fornisce l'asintoto orizzontale,
- il segno di A è opposto a quello di $\mathcal{D}$, e cosí si può stabilire in quali quadranti il grafico si trova, vedi Figura 3.

3. ***Una particolare traslazione***

Conoscendo il grafico della funzione $f(x)$, come si ottiene il grafico della funzione $y = g(x) \,=\, f(x+\alpha)$?
Basta eseguire il cambiamento di variabili

$$\xi = x + \alpha, \quad \eta = y \tag{21}$$

per trasformare la funzione $y = g(x)$ in $\eta = f(\xi)$.
Dunque, il grafico della funzione $g(x)$ è il medesimo della funzione $f(x)$, con riferimento ai nuovi assi ξ, η, aventi origine nel punto $\Omega = (-\alpha, 0)$.
In altri termini, per avere il grafico di $y = f(x+\alpha)$, basta traslare rigidamente il grafico di $y = f(x)$ di un segmento $|\alpha|$, nel verso positivo

delle x se $\alpha < 0$, negativo se $\alpha > 0$, vedi figura 4 riferita alla $f(x) = \sqrt{x}$[1] e, figura 5, riferita alla $f(x) = \sin(x)$.

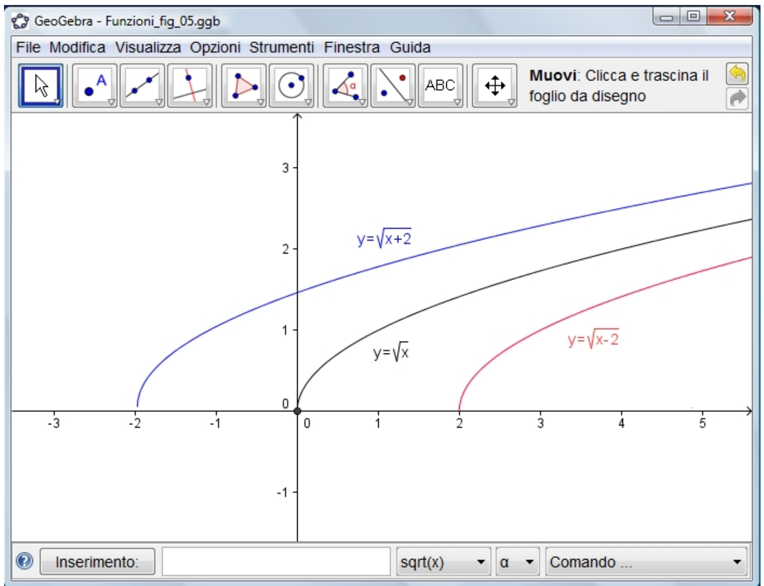


FIGURA 4. I grafici delle funzioni $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-2}$, tutti dedotti dal grafico della parabola $x = y^2$

[1] I tre archi presenti in figura 4 non sembrano, ad occhio, uno il traslato dell'altro: il motivo é semplicemente che si tratta di porzioni diverse di un unico grande arco. Osservando le tre porzioni relative rispettivamente a $[-2, 2]$, $[0, 4]$, $[2, 6]$ la sovrapponibilitá risulta evidente.

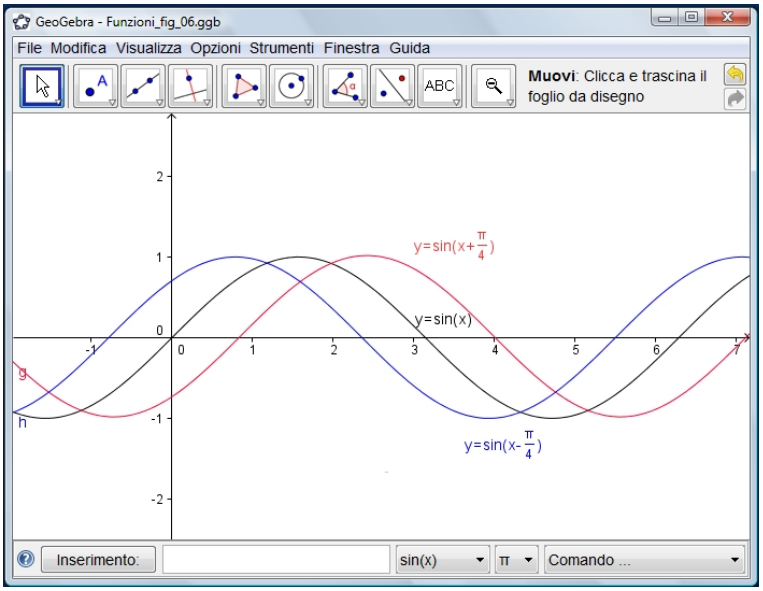


FIGURA 5. Sinusoidi traslate

4. ***Cambiamento di scala***
Conoscendo il grafico della funzione $y = f(x)$, come si ottiene il grafico della funzione $y = g(x) = f(mx)$ con $m \in \mathbb{R}^+$?

Osserviamo che, se in un punto x_0 la funzione $f(x)$ assume il valore $f(x_0)$, la $g(x)$ assume il medesimo valore nel punto $\bar{x} : m\bar{x} = x_0$, cioè in $\bar{x} = x_0/m$; se $m > 1$ allora $|\bar{x}| < |x_0|$ e viceversa, $|\bar{x}| > |x_0|$ se $m < 1$.

Pertanto, i valori che $f(x)$ assume in un intervallo $[a, b]$ sono tutti assunti da $g(x)$ nell'intervallo $[a/m, b/m]$, avente ampiezza minore o maggiore del precedente a seconda che sia $m > 1$ o $m < 1$.

Nel primo caso si ha una *contrazione* della curva grafico, nel secondo una *dilatazione*.

Il passaggio dalla funzione $f(x)$ alla $f(mx)$ è detto *cambiamento di scala*, vedi Figure 6 e 7, riferite a $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

3. Funzioni monotone

DEFINIZIONE 3.1. *Una funzione $f(x)$ si dice crescente in un intervallo $[a, b]$ se comunque si prendano $x, y \in [a, b]$ con $x < y$ riesce, di conseguenza, $f(x) < f(y)$.*

Viceversa

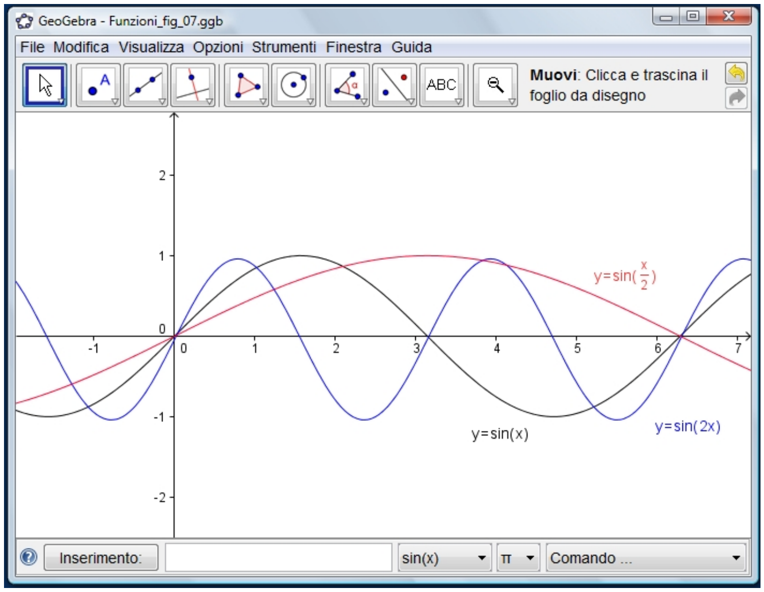


FIGURA 6. Cambiamento di scala per $\sin(x)$

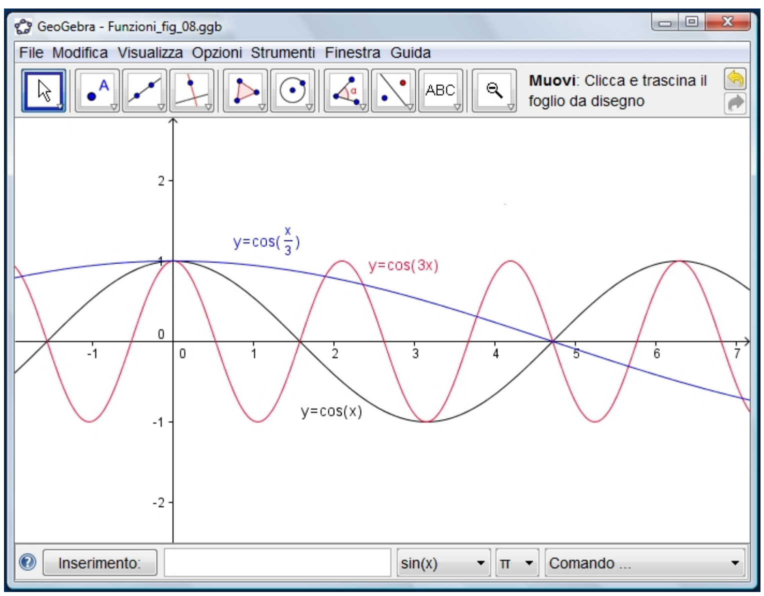


FIGURA 7. Cambiamento di scala per $\cos(x)$

DEFINIZIONE 3.2. *Una funzione $f(x)$ si dice decrescente in un intervallo $[a, b]$ se comunque si prendano $x, y \in [a, b]$ con $x < y$ riesce, di conseguenza, $f(x) > f(y)$.*

DEFINIZIONE 3.3. *Le funzioni crescenti e le funzioni decrescenti si* *dicono, entrambe, funzioni monotone*[2].

In Figura 8 il grafico della funzione decrescente $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$.

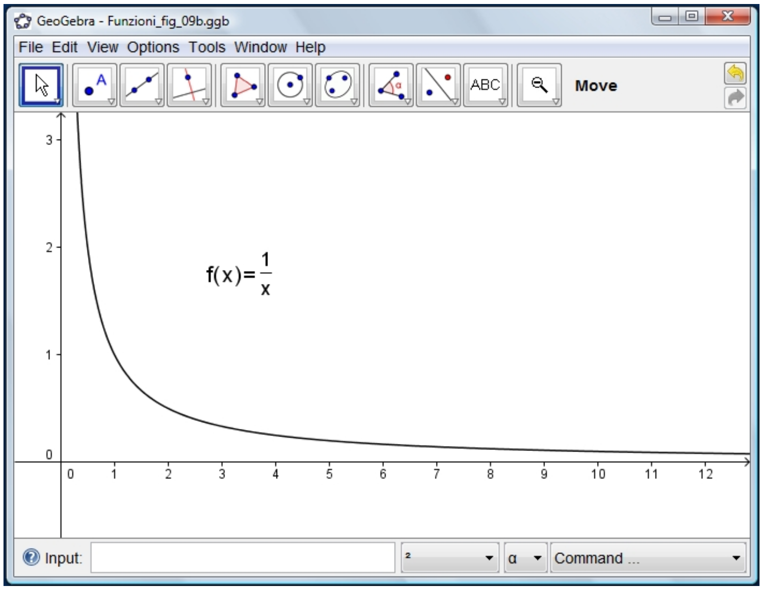


FIGURA 8. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

4. Massimo e minimo

DEFINIZIONE 4.1. *Il numero reale M si dice massimo della funzione $f : A \to \mathbb{R}$ se*

- *per ogni $x \in A$ riesce $f(x) \leq M$*
- *ed esiste almeno un punto $x_0 \in A$ nel quale riesce $f(x_0) = M$.*

Analogamente il numero reale m si dice minimo se

- *per ogni $x \in A$ riesce $f(x) \geq m$*
- *ed esiste almeno un punto $x_1 \in A$ nel quale riesce $f(x_1) = m$.*

ESEMPIO 4.2.

- *La funzione $f(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ ha massimo $M = 0$ e non ha minimo,*
- *la funzione $f(x) = x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$ non ha massimo e ha minimo $m = 1$,*

[2] L'accento della parola "monotòne" è posto sull'ultima vocale "o", diversamente dalla parola monòtone del linguaggio comune che significa ripetitive, noiose,...

- *la funzione* $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ *non ha nè massimo nè minimo.*

I punti $x_0 \in A$ in cui f prende il valore massimo M si dicono

punti di massimo.

Analogamente i punti $x_1 \in A$ in cui f prende il valore minimo m si dicono

punti di minimo.

Mentre il massimo M e il minimo m sono due valori unici, possono esistere più punti di massimo e/o più punti di minimo.

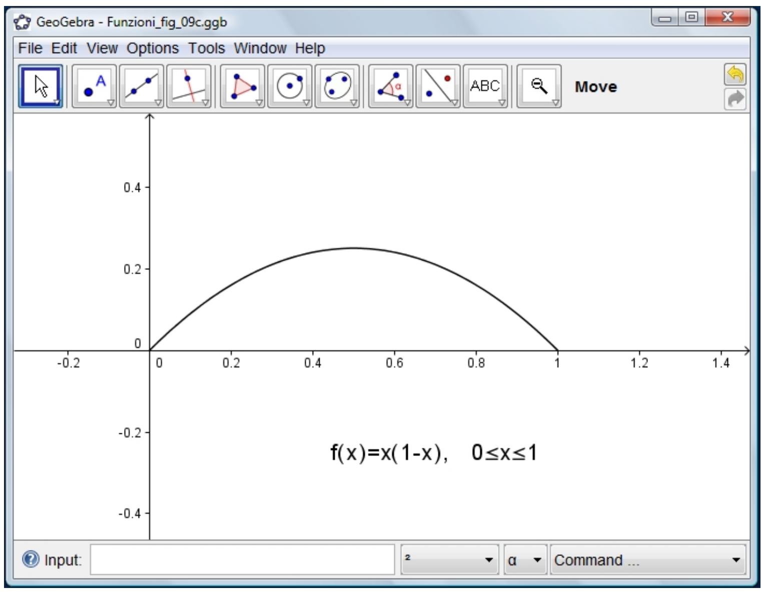


FIGURA 9. $f(x) = x(1-x), \quad 0 \le x \le 1$

Nell'esempio in Figura 9 si considera la funzione

$$f: \; [0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = x(1-x)$$

che ha

$$M = \frac{1}{4}, \quad m = 0$$

Il punto $x_0 = \frac{1}{2}$ è punto di massimo, i punti 0 e 1 sono entrambi punti di minimo.

5. Funzioni pari, dispari, modulo

Una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se

$$x \in X \; \Leftrightarrow \begin{cases} -x \in X \\ f(-x) = f(x); \end{cases}$$

dispari se la seconda condizione è sostituita da $f(-x) = -f(x)$.
Pertanto, se la funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; se dispari, è simmetrico rispetto all'origine: vedi figura 10

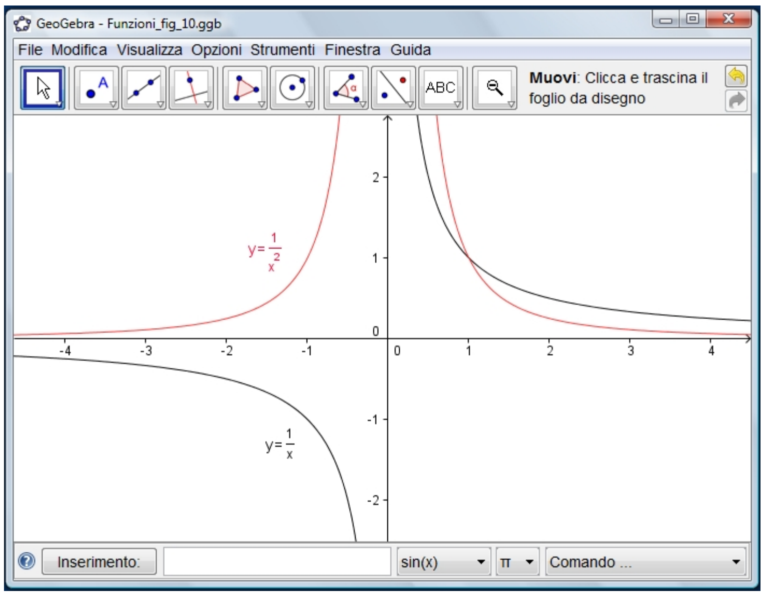


FIGURA 10. Funzioni pari (rosso) e dispari (nero).

Il ***modulo*** di una funzione $f(x)$ è definito da

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se} \quad f(x) \leq 0. \end{cases} \tag{22}$$

Perció, conoscendo il grafico della funzione $f(x)$, si ottiene quello di $|f(x)|$ conservando il grafico precedente nelle regioni in cui $f(x) \geq 0$, e ribaltando mediante una simmetria rispetto all'asse delle ascisse quello in cui $f(x) < 0$.

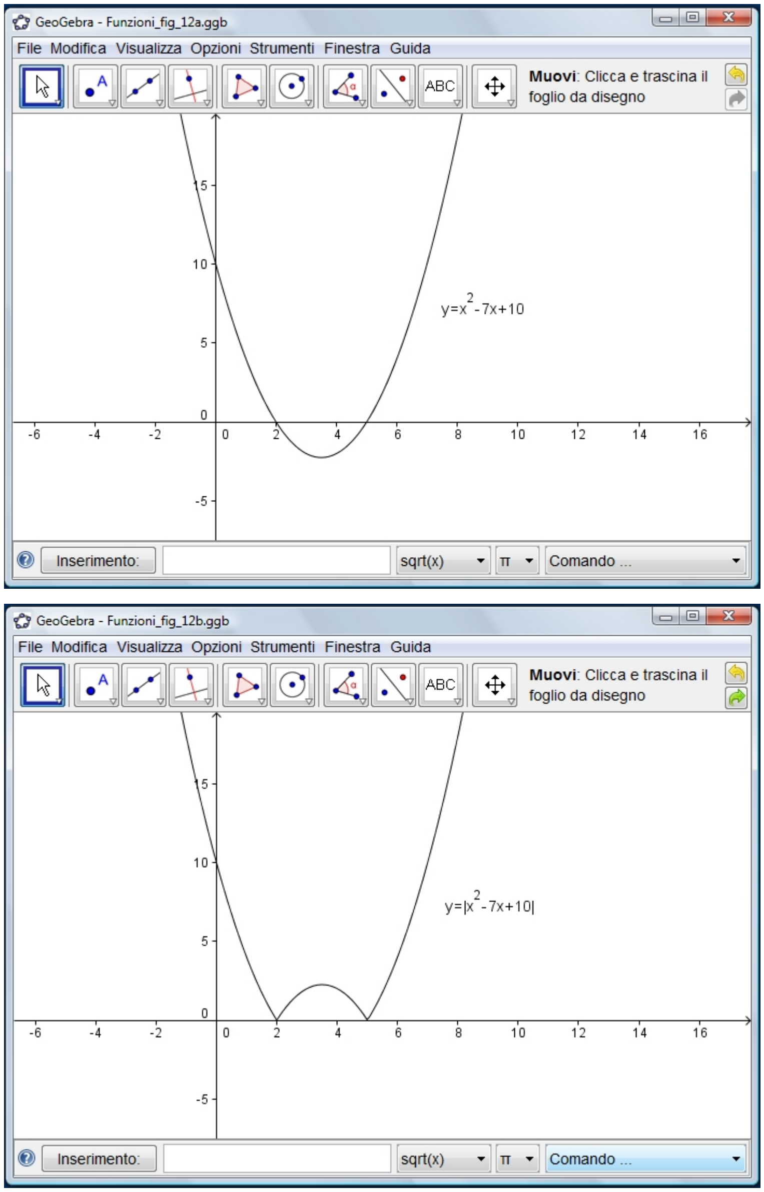


FIGURA 11. La $f(x) = x^2 - 7x + 10$ e il suo modulo.

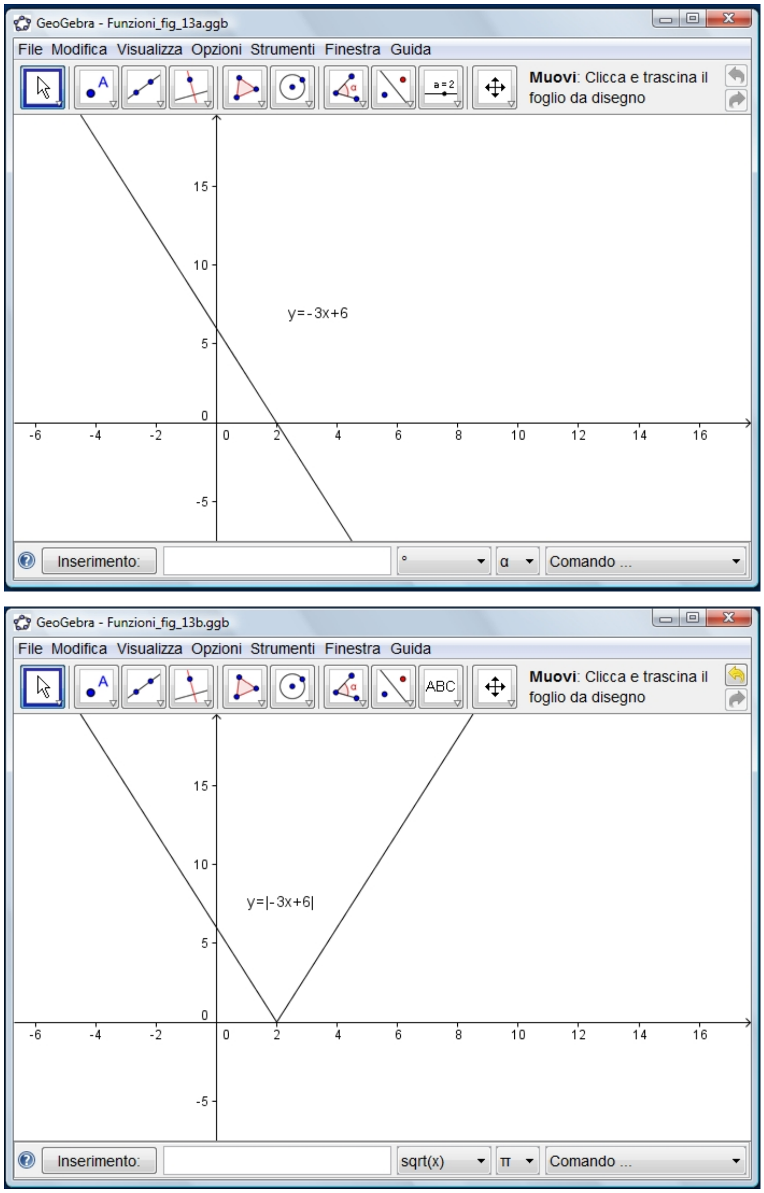


FIGURA 12. La $f(x) = -3x + 6$ e il suo modulo.

Si osservino a tal proposito gli esempi riportati nelle figure di pagine 53, 54.

5.1. Funzioni pari.

Osserviamo anche che, se una funzione $f(x)$ ha una parte del dominio contenuta in $\mathbb{R}^+$, e se ne conosce il grafico, si può costruire il grafico della funzione $f(|x|)$, osservando che questa è pari, e che per $x \geq 0$ è $|x| = x$, vedi Figura 13 riferita al caso $f(x) = -\frac{x}{x^2-4}$, pagina 55.

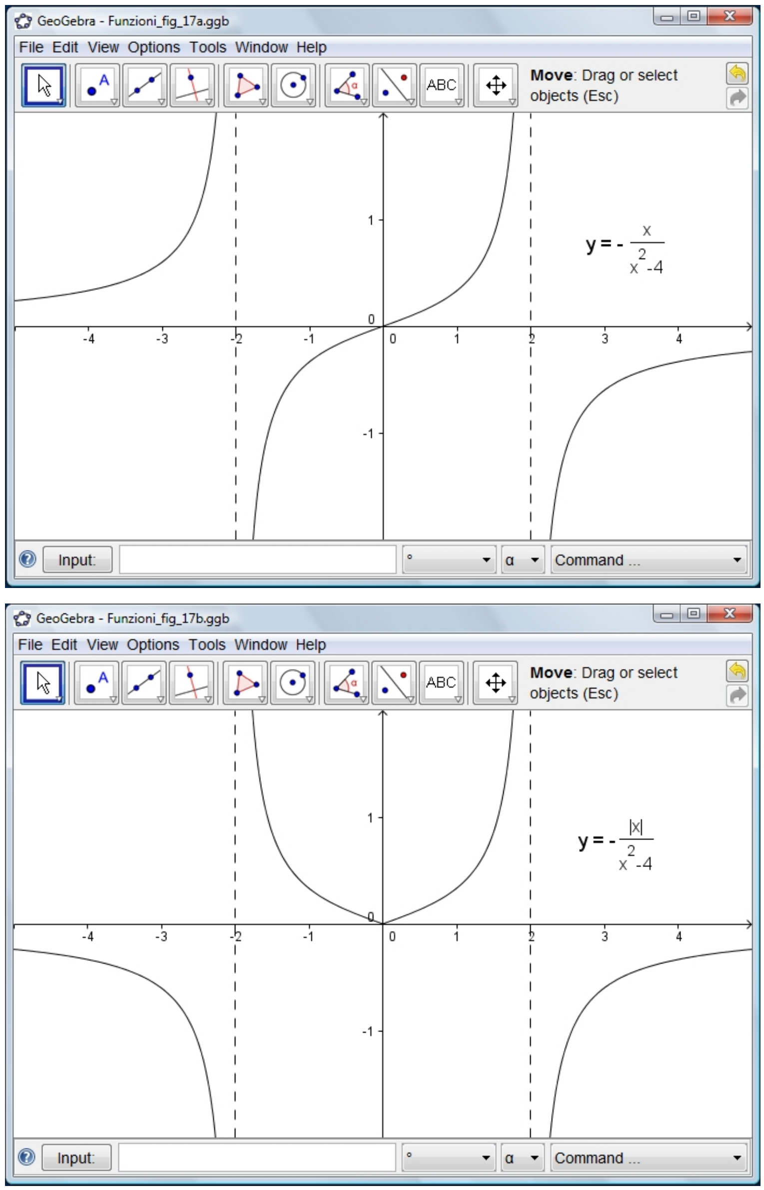


FIGURA 13. la $f(x) = -\frac{x}{x^2-4}$ e la $f(|x|) = -\frac{|x|}{x^2-4}$.

5.2. Funzioni dispari.

Analogamente:
la funzione $y = f_1(x) = x\sqrt{x^2-1}$ è dispari ed ha il grafico di figura 14;

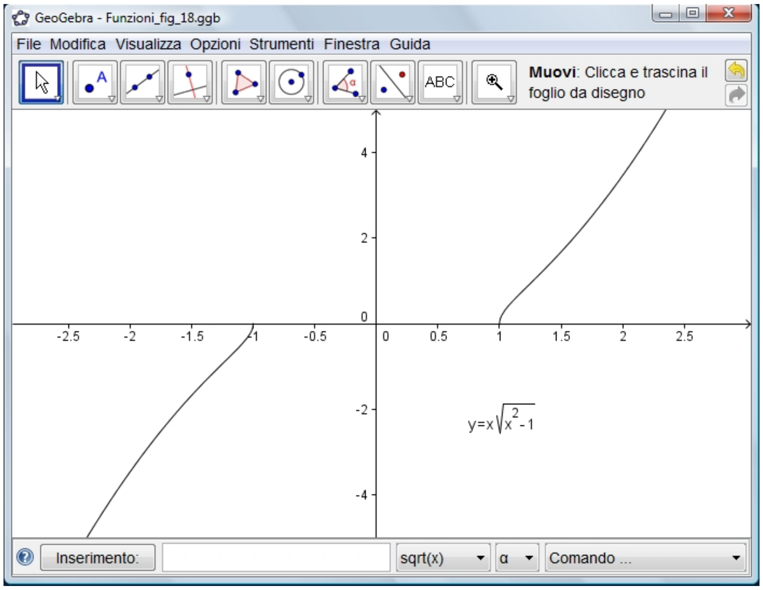


FIGURA 14. $y = f_1(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

la funzione $y = f_2(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ è dispari, grafico in figura 15;

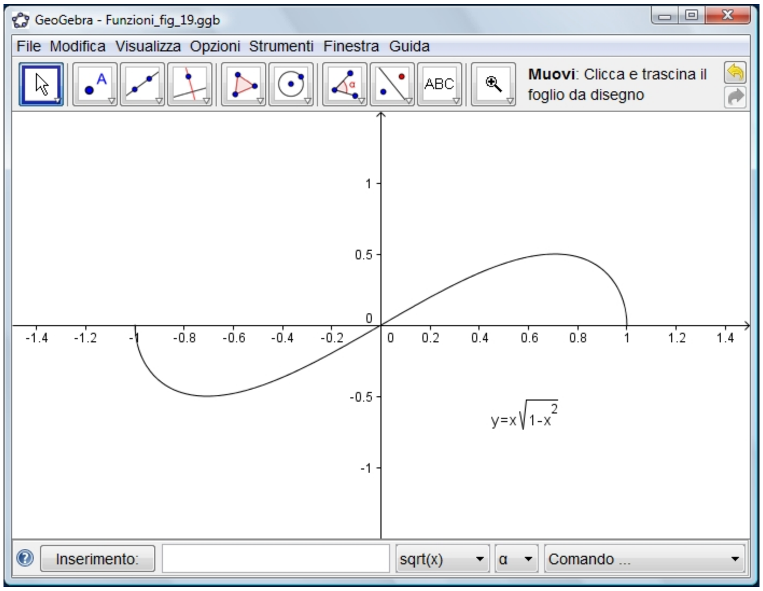


FIGURA 15. $y = f_2(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

se allora consideriamo la funzione $y = f(x) = x\sqrt{|x^2 - 1|}$ essa è dispari e

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se} \quad |x| \geq 1 \\ f_2(x) & \text{se} \quad |x| \leq 1, \end{cases}$$

pertanto il suo grafico è quello di figura 16.

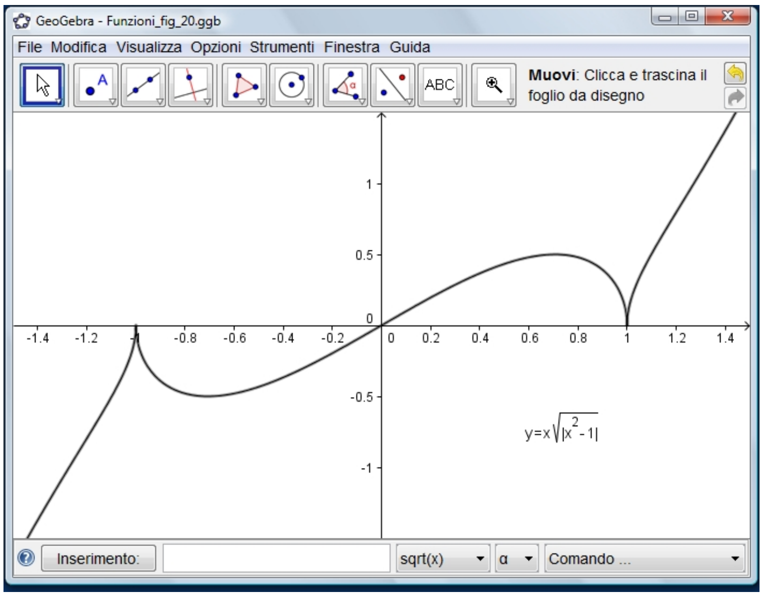


FIGURA 16. $y = f(x) = x\sqrt{|x^2 - 1|}$

La funzione $f(x) = x^2 + |3 - 4x|$ non è né pari né dispari e vale

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 - 4x = f_1(x) & \text{se} \quad x \leq 3/4 \\ x^2 - 3 + 4x = f_2(x) & \text{se} \quad x \geq 3/4, \end{cases}$$

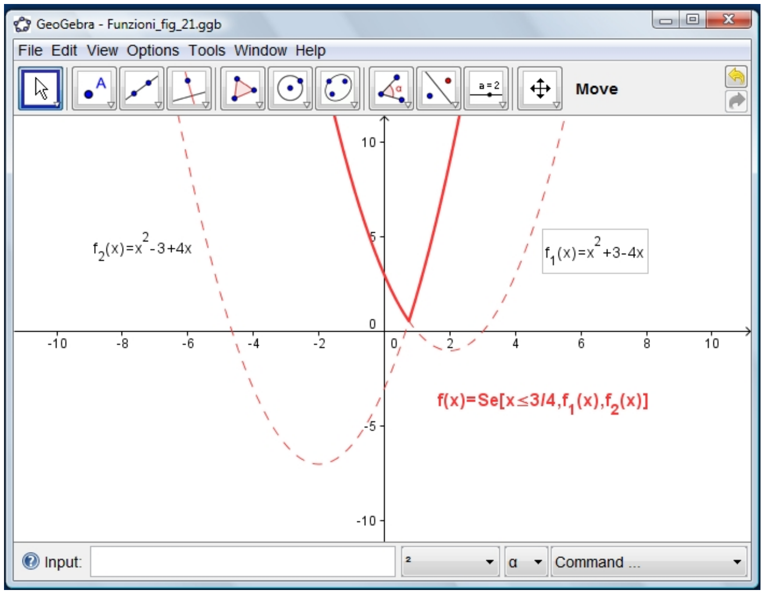


FIGURA 17. $f(x) = x^2 + |3 - 4x|$.

e pertanto ha il grafico indicato in figura 17.

ESERCIZIO 5.1.

- *Verificare che* $f(x) = x^2 - 3x^4$ *è una funzione pari, mentre* $x^3 - \sin x$ *è dispari.*
- *La funzione* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *è pari o dispari ?*
- *E le funzioni* $\dfrac{\cos x}{x - \sin x}$, $\dfrac{\tan x}{x^3}$, $x + \dfrac{1}{x}$ *?*

6. Qualche equazione con il modulo

ESEMPIO 6.1. . *Risolvere l'equazione*

$$|x - 1| = |3x - 2|.$$

Prepariamo i grafici delle due funzioni

$$y = x - 1, \quad y = 3x - 2$$

e tramite essi quelli dei loro moduli $|x - 1|$, $|3x - 2|$, vedi Figura (18). Le soluzioni delle equazioni sono le ascisse dei punti in cui i due grafici si intersecano. É evidente che

- non si hanno intersezioni a destra di $x = 1$,
- se ne hanno due a sinistra di $x = 1$: una tra $2/3$ e 1 e un'altra a sinistra di $x = 2/3$.

Le due soluzioni corrispondono alle soluzioni delle due equazioni

$$3x - 2 = 1 - x, \quad 2 - 3x = 1 - x$$

Le soluzioni dell'equazione sono pertanto:

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

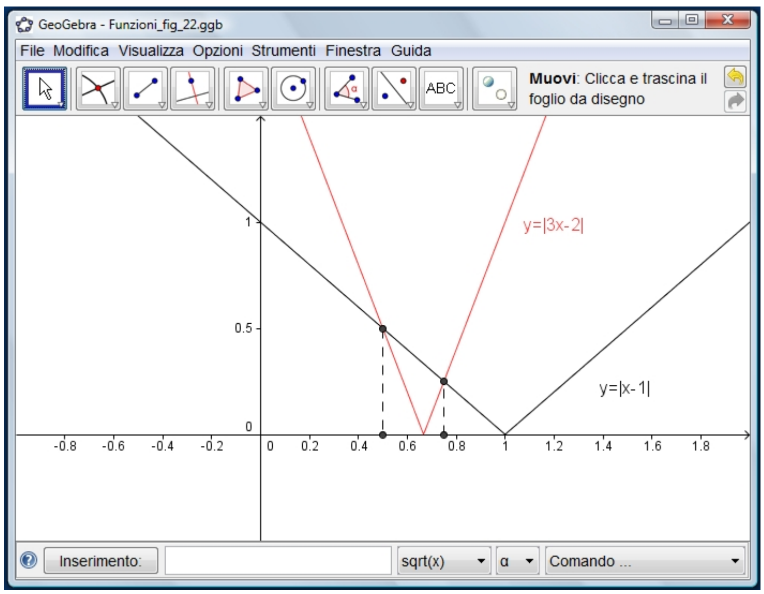


FIGURA 18. $f(x) = |x - 1|, g(x) = |3x - 2|$.

ESEMPIO 6.2. *Risolvere l'equazione*

$$|x + 1| + |2x - 3| = |x - 5|$$

Diviso l'asse reale negli intervalli

$$(-\infty, -1], \quad (-1, 3/2], \quad (3/2, 5], \quad (5, +\infty)$$

si avrá:

a)

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ (x + 1) + (2x - 3) = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} \leq x \leq 5 \\ (x + 1) + (2x - 3) = 5 - x \end{cases} \Rightarrow x = 7/4$$

c)

$$\begin{cases} -1 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ \\ (x+1) - (2x-3) = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

d)

$$\begin{cases} x \le -1 \\ \\ -(x+1) - (2x-3) = 5 - x \end{cases} \Rightarrow x = -3/2$$

Si conclude che le uniche soluzioni sono $x = -3/2, \quad x = 7/4$.
Anche qui si può procedere per via grafica, vedi figura 19, disegnando i vari tratti di retta che rappresentano il primo membro dell'equazione nei vari intervalli, ed intersecando con il grafico del secondo membro.

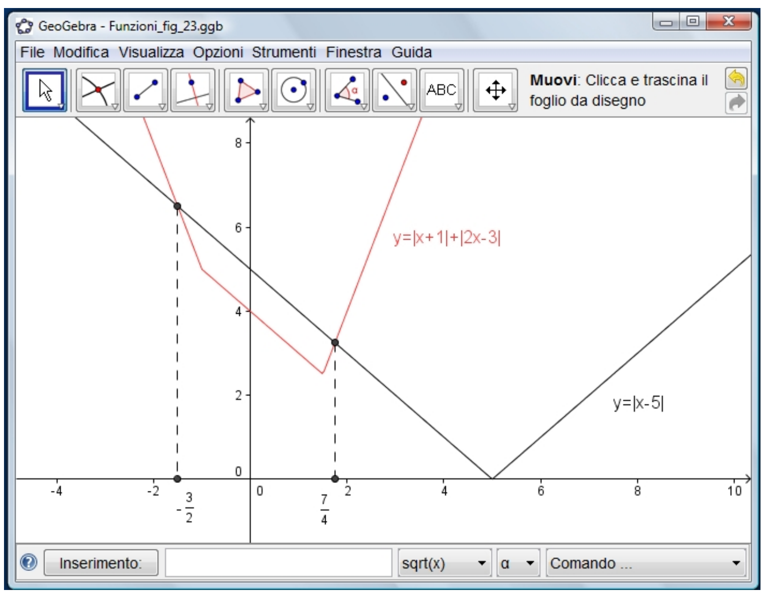


FIGURA 19. $y = |x+1| + |2x-3|$.

ESEMPIO 6.3. *Mostrare che l'equazione*

$$|x-1| + |2x-5| = |3-x|$$

non ha soluzioni.

ESEMPIO 6.4. *Quante soluzioni ha l'equazione*

$$3|x^2 + 2x - 3| = |x+4| \ ?$$

Esempio 6.5. *Al variare del parametro a, quante soluzioni ha l'equazione*

$$|x^2 - 4x + 3| = a \ ?$$

7. Parte positiva, negativa

Dati due numeri, α e β, il minimo e il massimo tra essi sono dati rispettivamente da

$$\begin{cases} \min\{\alpha, \beta\} \ = \ \alpha \wedge \beta = \dfrac{\alpha + \beta}{2} - \dfrac{|\alpha - \beta|}{2} \\ \\ \max\{\alpha, \beta\} \ = \ \alpha \vee \beta = \dfrac{\alpha + \beta}{2} + \dfrac{|\alpha - \beta|}{2} \end{cases} \tag{23}$$

Infatti, $(\alpha + \beta)/2$ è il valore medio di α e β, e $|\alpha - \beta|/2$ la distanza del valore medio dagli estremi: sommando si ottiene il massimo, sottraendo si ottiene il minimo, tanto se $\alpha < \beta$, quanto se $\alpha \geq \beta$.
Date ora due funzioni, f e $g : X \to \mathbb{R}$, poniamo

$$\begin{cases} f(x) \wedge g(x) = \dfrac{f(x) + g(x)}{2} - \dfrac{|f(x) - g(x)|}{2} \\ \\ f(x) \vee g(x) = \dfrac{f(x) + g(x)}{2} + \dfrac{|f(x) - g(x)|}{2}; \end{cases} \tag{24}$$

per ogni $x \in X$, $f(x) \wedge g(x)$ sceglie il valore minimo, e $f(x) \vee g(x)$ il valore massimo tra $f(x)$ e $g(x)$.
Le figure di pagina 62 si riferiscono al caso di $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 - 2x - 8$

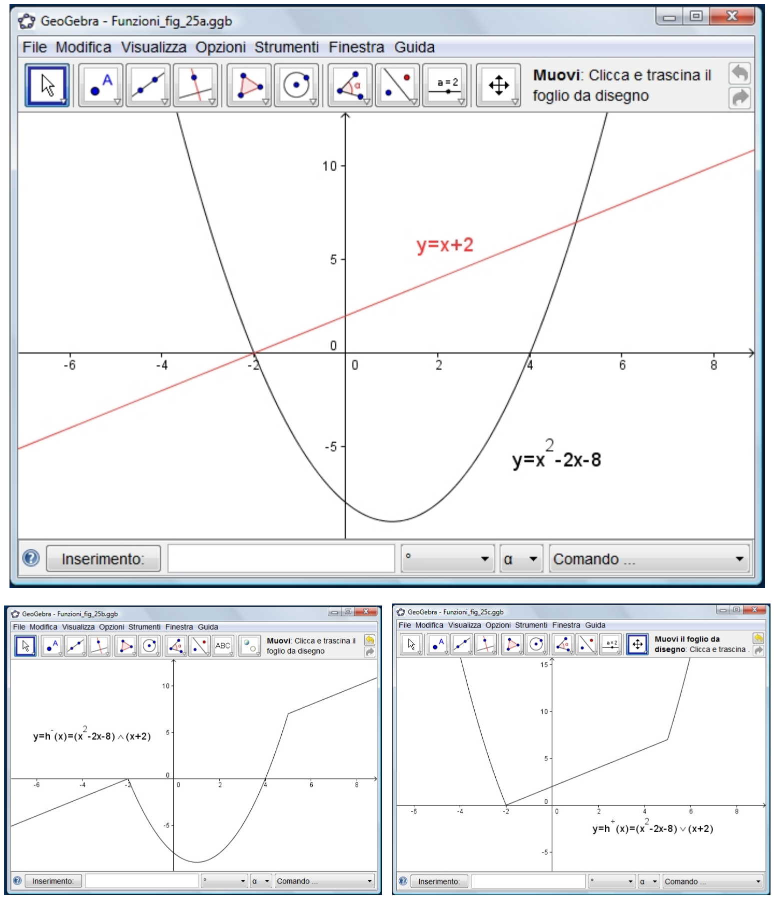


FIGURA 20. Minimo e massimo tra due funzioni.

Assumendo $g(x) = 0$, si hanno le funzioni

$$
\left\{
\begin{aligned}
f^-(x) &= -(f(x) \wedge 0) = (-f(x)) \vee 0 = \frac{|f(x)|}{2} - \frac{f(x)}{2} \\
f^+(x) &= f(x) \vee 0 = \frac{|f(x)|}{2} + \frac{f(x)}{2},
\end{aligned}
\right.
\tag{25}
$$

dette rispettivamente la *parte negativa* e la *parte positiva* di $f(x)$; la $f^-(x)$ è nulla nei punti in cui $f(x) \geq 0$, e coincide con $-f(x)$ dove $f(x) \leq 0$; viceversa la $f^+(x)$, cioè

(26)

$$
f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0, \end{cases} \qquad f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0, \end{cases}
$$

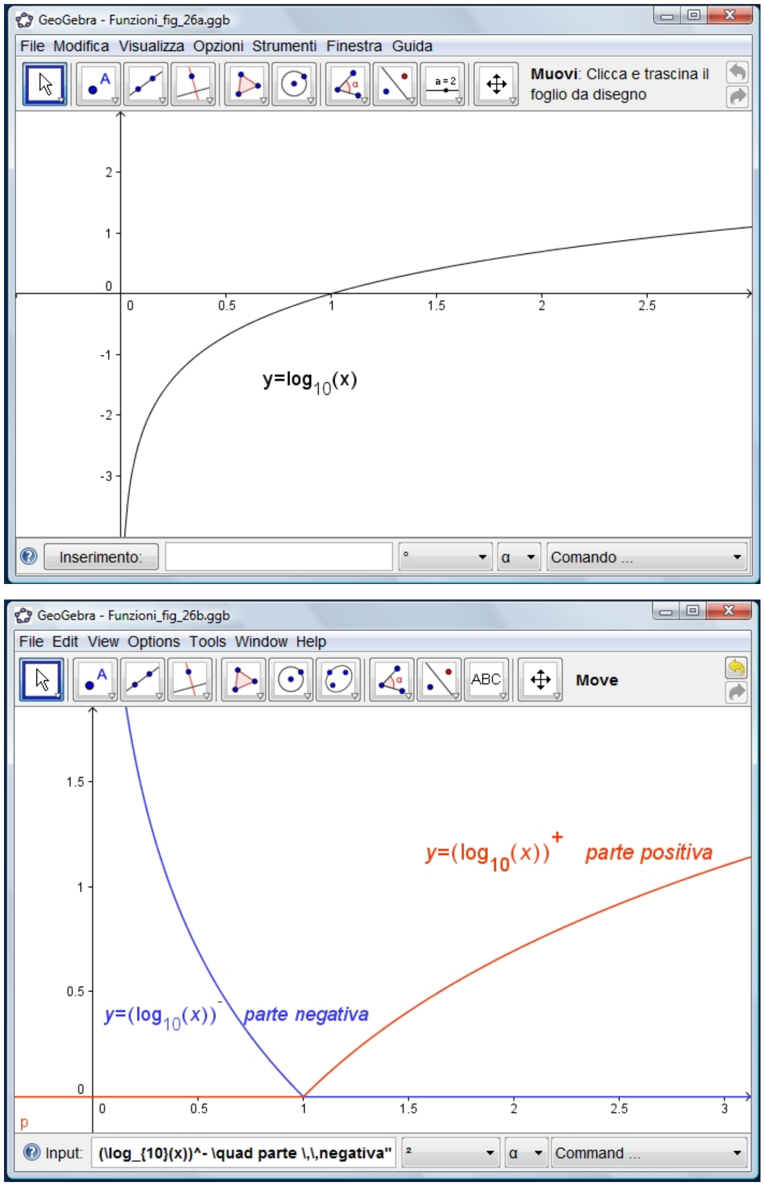


Figura 21. Parte positiva e negativa di una funzione.

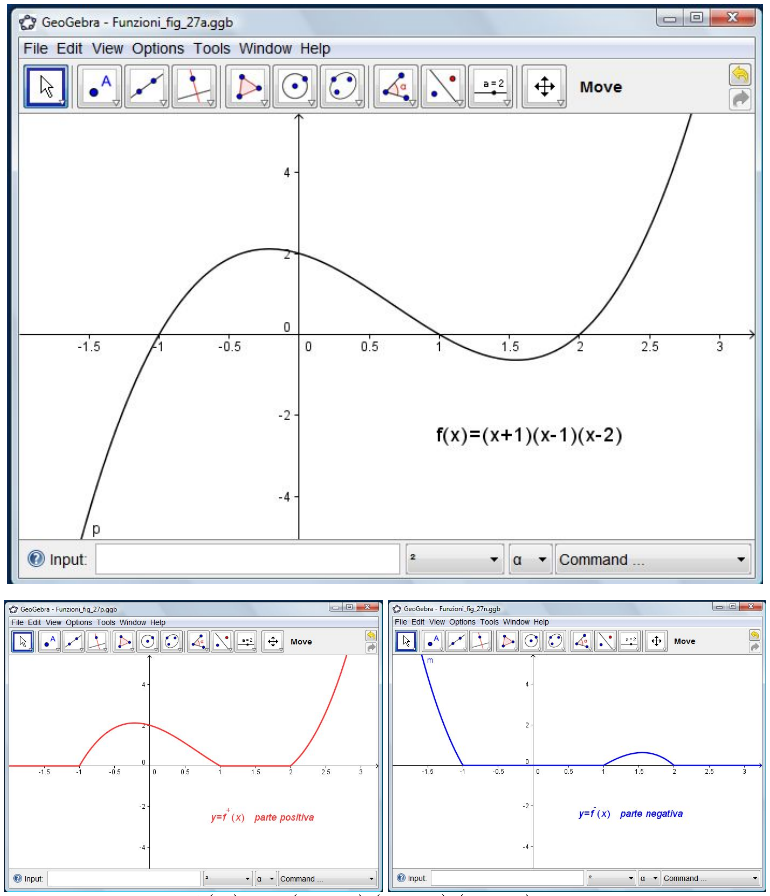


FIGURA 22. $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$, la parte positiva e quella negativa.

Le figure di pagina 63 e 64 si riferiscono a $f(x) = \log_{10}(x)$ e $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$.
E' chiaro che

$$f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x), \quad |f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x) \quad \forall x \in X$$

8. Funzione composta

Siano $f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$ due applicazioni: la prima associa ad ogni elemento $x \in X$ un elemento $y \in Y$; la seconda associa ad ogni $y \in Y$ un elemento $z \in Z$.
Restringendo il dominio di g all'immagine $f(X)$ si può allora interpretare z come risultato dell'applicazione successiva di f e g ad x; viene cosí a definirsi una nuova funzione:

$$\varphi = g \circ f$$

composta di f e g, e si scrive $z = g \circ f(x)$ o, piú spesso, $g(f(x))$, dato che, per avere z, si applica dapprima la funzione f ad x e successivamente g ad $f(x)$.

- Se f e g sono entrambe iniettive altrettanto è la funzione composta;
- se monotone nello stesso verso $g \circ f$ è crescente;
- se monotone in verso contrario la funzione composta è decrescente.

E' da osservare inoltre che, se hanno senso entrambe le funzioni: $g \circ f$ e $f \circ g$, esse generalmente non coincidono, cioè la composizione di funzioni *non è commutativa*.
Ad esempio, se

$$f(x) = 2x + 3\sin x, \quad g(x) = (x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(g(x)) = 2(x-1)^2 + 3\sin(x-1)^2 \\ \\ g(f(x)) = (2x + 3\sin x - 1)^2. \end{cases}$$

.

9. Funzione inversa

Se $f : X \to Y$ è biettiva, ogni $y \in Y$ è immagine di uno e un solo $x \in X$; ha senso allora considerare la funzione inversa

$$f^{-1} : Y \to X$$

la quale associa ad ogni $y \in Y$ il punto $x \in X$ tale che $f(x) = y$; si scrive

$$x = f^{-1}(y).$$

Pertanto, nella corrispondenza inversa, è la y che fa da variabile indipendente, mentre la x funge da variabile dipendente.
Consideriamo ora il grafico di $f(x)$: è chiaro che se ad esso appartiene il punto di coordinate (a, b), nel senso che, al valore a dell'ascissa, la f fa corrispondere il valore b dell'ordinata, il punto di coordinate (b, a) appartiene al grafico dell'inversa $f^{-1}(x)$.
Si possono rappresentare i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ nel *medesimo* piano cartesiano:

> *il grafico di $f^{-1}(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ operando una simmetria rispetto alla bisettrice suddetta.*

A titolo di esempio, riportiamo i grafici di

- $f(x) = x^2$ e di $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, per $x \geq 0$ ove la $f(x)$ è invertibile, vedi figura 23 di pagina 66.

- di $f(x) = \log_a x, \quad a > 1$ e di $f^{-1}(x) = a^x$, vedi figura 24 di pagina 66.

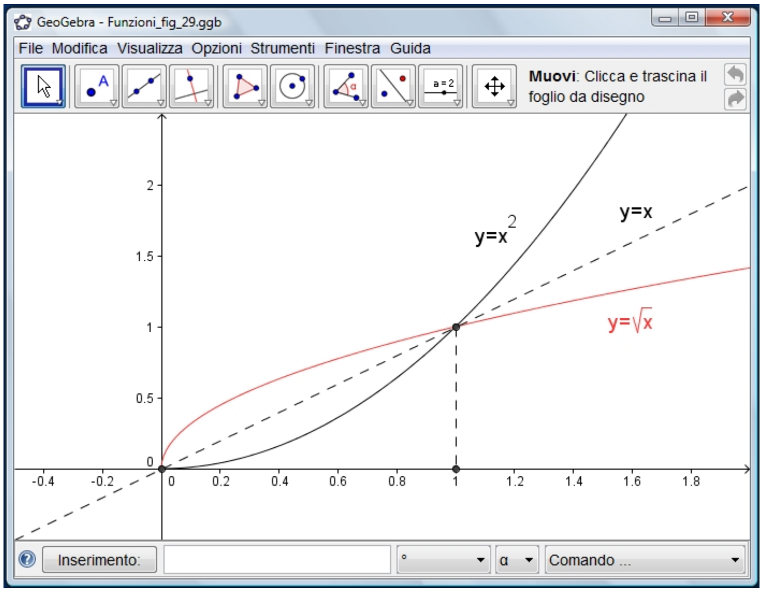


FIGURA 23. $f(x) = x^2, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

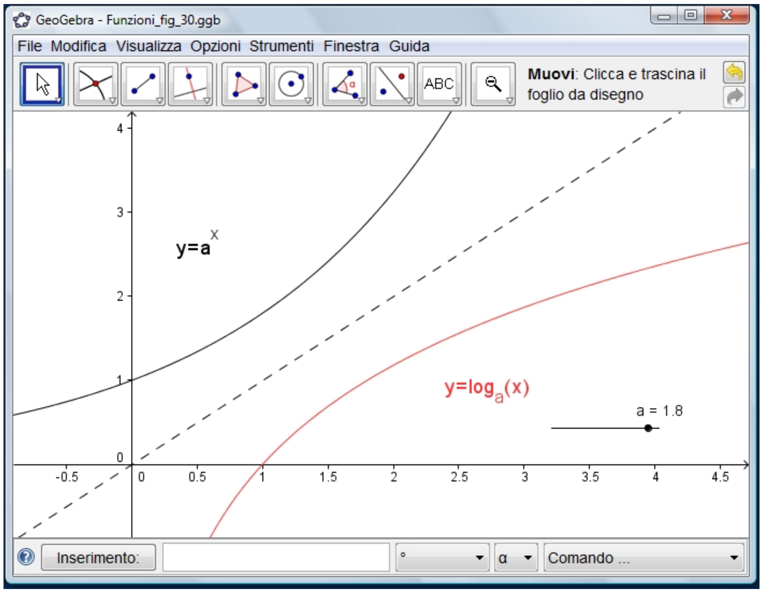


FIGURA 24. $f(x) = \log_a x, \quad a > 1, \quad f^{-1}(x) = a^x$.

La funzione $f(x) = \sin x$ è invertibile in ogni intervallo di ampiezza π ove è crescente, o decrescente; si conviene di assumere come intervallo di invertibilità l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$; la funzione inversa è detta arcoseno: $f^{-1}(x) = \arcsin x$ ed ha il grafico rappresentato in figura 25 di pagina 67.

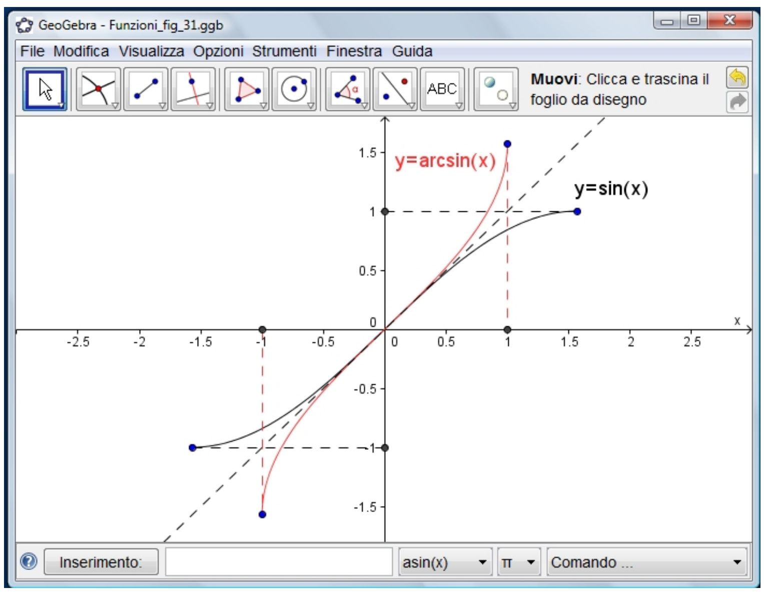


FIGURA 25. $f(x) = \sin x, \quad f^{-1}(x) = \arcsin x.$

Analogamente, la funzione arcocoseno: $\arccos x$ si ottiene invertendo la funzione $\cos x$ nell'intervallo $[0, \pi]$: il grafico è rappresentato in figura 26 di pagina 68.

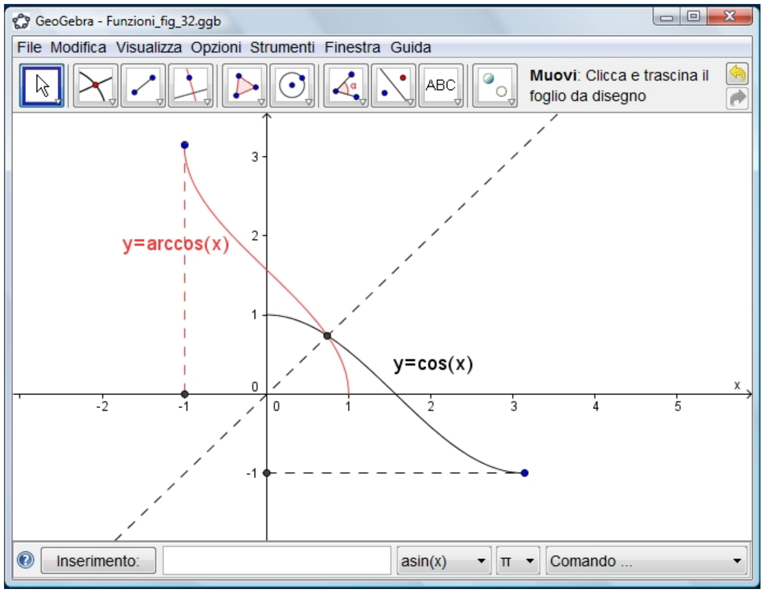


FIGURA 26. $f(x) = \cos x, \quad f^{-1}(x) = \arccos x.$

Infine, la funzione arcotangente : $\arctan x$ inverte la funzione $\tan x$ nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$: il grafico è rappresentato in figura 27 di pagina 68.

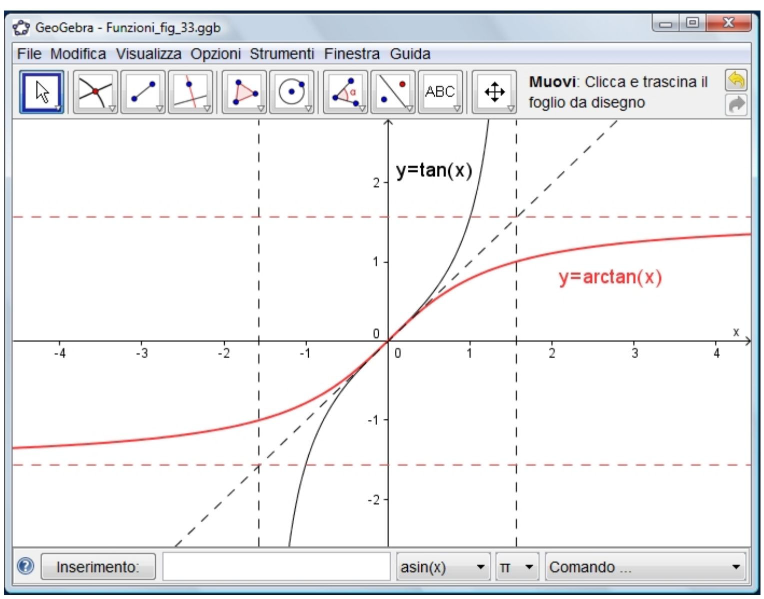


FIGURA 27. $f(x) = \tan x, \quad f^{-1}(x) = \arctan x.$

10. Funzioni periodiche

Una funzione $f(x)$ da X in Y è detta *periodica* se esiste un numero positivo T tale che

$$x \in X \Leftrightarrow \begin{cases} x+T \in X \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Ne viene che anche $x + nT \in X, \forall n \in \mathbb{Z}$, con la conseguenza che X deve essere illimitato.
Si chiama *periodo* il piú piccolo numero positivo T che realizza la proprietà di cui sopra, nell'ipotesi che un minimo effettivamente esista.
Sono periodiche le comuni funzioni trigonometriche, ma non è semplice verificare il periodo (se c'è) delle loro combinazioni.

A parte tali funzioni, è periodica con periodo $T = 1$

- la funzione $[x]$ è detta *parte intera* di x ed associa ad ogni x reale il più grande numero intero che non supera x;
- la funzione *mantissa*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni numero x la sua parte non intera, cioè la differenza $x - [x]$.

Rappresentiamo in figura 28 di pagina 69 e figura 29 di pagina 70 i grafici rispettivamente di $[x]$ e della mantissa: $x - [x]$.

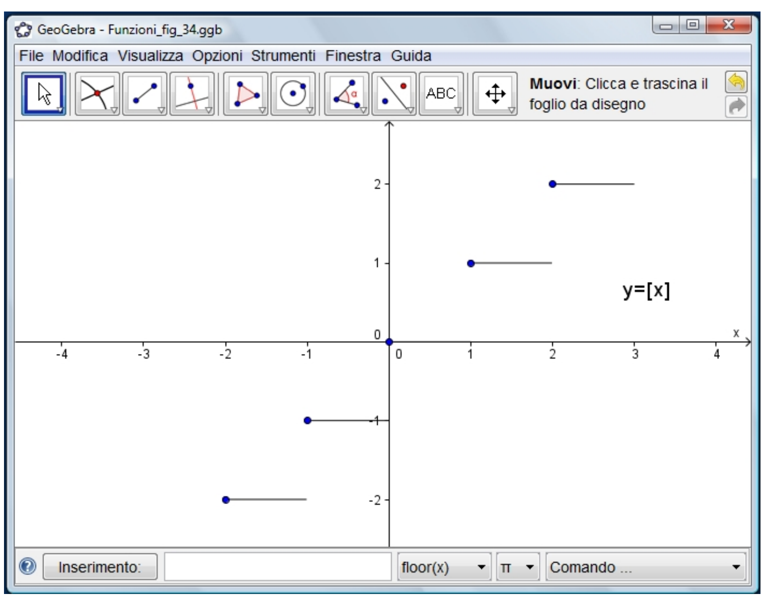


FIGURA 28. La parte intera: $[x]$.

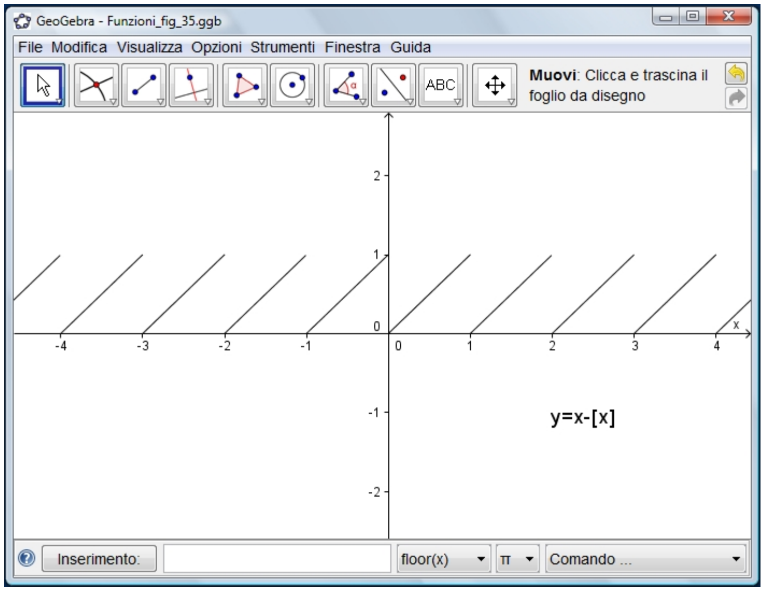


FIGURA 29. La mantissa: $x - [x]$.

ESEMPIO 10.1. *Sia* $x = 7.35$ *riesce*

$$\textit{parte} \quad \textit{intera}: \quad [x] = 7, \quad \textit{mantissa}: \; x - [x] = 0.35$$

CAPITOLO 7

Richiami sulle funzioni trigonometriche

1. Seno e coseno

Si tratta di due funzioni definite in modo geometrico tramite, vedi Figura 1, le coordinate dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$

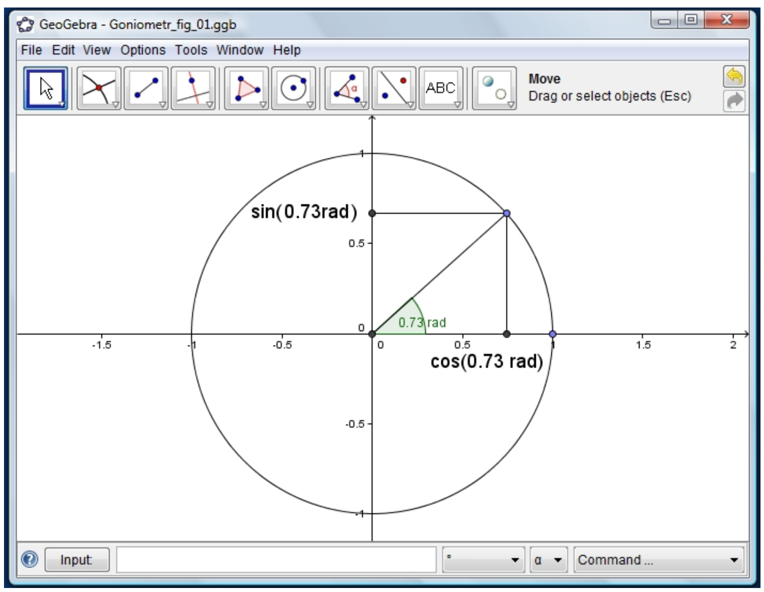


FIGURA 1. Seno, coseno, circonferenza di raggio $r = 1$

Le principali questioni collegate a tali funzioni sono

- il riferimento all'angolo e alla sua misura x in radianti,
- i valori di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ inevitabilmente appartenenti all'intervallo $[-1, 1]$,
- il legame tra cateti ed ipotenusa nei triangoli rettangoli.

ESERCIZIO 1.1.

(1) *Determinare le misure in radianti di angoli che misurino in gradi rispettivamente* 90^0, 270^0, 30^0

(2) *Calcolare i valori delle seguenti espressioni trigonometriche*

$$\sin(\pi),\ \cos(\pi/3),\ \sin^2(\pi)+\cos^2(\pi/2),\ \sin(5\pi/3)$$

(3) *Tabulare i valori numerici di* $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ *in corrispondenza a* $x = 0^0$, 90^0, 180^0, 270^0.
(4) *Determinare i cateti di un triangolo rettangolo che abbia l'ipotenusa lunga* 10 *e uno dei due angoli acuti di* 30^0 *gradi.*
(5) *Determinare l'altezza di un triangolo isoscele che abbia uno dei due lati uguali lungo* 16 *e gli angoli alla base di* 60^0 *gradi.*

2. Angoli e triangoli

Sia $\triangle_{ABC}$ un triangolo rettangolo, di lati 3, 4, 5:

- quanto vale il seno dell'angolo tra i lati di lunghezza 3 e 4 ?
- quanto vale il coseno dell'angolo tra i lati di lunghezza 4 e 5 ?
- quanto vale la tangente dell'angolo tra i lati di lunghezza 3 e 5 ?

Le misure degli angoli tra i lati di lunghezza 4 e 5 e tra quelli di lunghezza 3 e 5 possono essere dedotte ricorrendo a

- goniometro,
- calcolatrice tascabile,
- teoremi sui triangoli.

Se tutte le domande precedenti fossero rivolte analogamente al caso di un triangolo di lati 15, 20, 25 le risposte sarebbero cambiate ?
In un triangolo si hanno 3 lati e 3 angoli: quali delle due terne determina l'altra ?
Come può essere fatto un triangolo che abbia i lati 1, 2, 3 ?
E come può essere fatto un triangolo che abbia gli angoli α, 2α, 3α ?

2.1. Gradi e radianti.

Disegnata una circonferenza ogni angolo al centro individua un arco di circonferenza:

- che legame passa tra la misura in gradi dell'angolo al centro e la lunghezza dell'arco di circonferenza corrispondente ?
- qual'è il ruolo del raggio della circonferenza ?
- si può stabilire un algoritmo che consenta di trasformare i due valori uno nell'altro ?

La definizione geometrica di *seno, coseno, tangente* può essere data attraverso la circonferenza goniometrica: l'opzione è per le misure *in radianti*.

La relazione $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ è il teorema di Pitagora: costruire, a partire da essa altre tre, almeno, relazioni altrettanto valide, quale, ad esempio elevando al quadrato

$$\sin^4(x) + 2\sin^2(x)\ \cos^2(x) + \cos^4(x) = 1$$

Seno, coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π: si possono costruire funzioni periodiche di altri periodi ?
Oggetto di riflessione possono essere le seguenti questioni:

- Come si potrebbe approssimare il valore di $\sin(12345)$, supponendo che 12345 sia la misura di un angolo in gradi ?
- É piú grande $\cos(523)$ o $\cos^2(523)$ o $\cos(523^2)$?
- Cosa pensare di $\tan(90)$ se 90 fosse la misura di un angolo in radianti ?

3. Formule goniometriche

É sempre vero che

$$f(2x) = 2\,f(x) \quad ?$$

Esplorare come, su esempi particolari possano riuscire vere ciascuna delle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sin(2x) = 2\sin(x) \\ \sin(2x) > 2\sin(x) \\ \sin(2x) < 2\sin(x) \end{cases}$$

Servendosi delle formule di addizione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(\beta) + \sin(\beta)\ \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \sin(\beta)\ \sin(\alpha)$$

ricavare le formule per

$$\sin(2x),\ \cos(2x),\ \sin(3x),\ \cos(3x), \ldots.$$

Tenuto presente che

$$\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \cos(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

esaminare che forma di numeri reali producano espressioni del tipo

$$\sin(m\frac{\pi}{3}), \quad \cos(n\frac{\pi}{3}), \quad \sin^r(m\frac{\pi}{3}) + \cos^s(n\frac{\pi}{3})$$

relative a m, n, r, s numeri naturali.

Per le applicazioni é opportuno osservare che, data l'espressione

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

sono determinati univocamente un numero A e un $\varphi \in [0, 2\pi)$ tali che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$$

In effetti sviluppando il secondo membro e confrontando con l'espressione di $f(x)$ si ricava

$$a = A\cos(\varphi), \quad b = -A\sin(\varphi), \quad \sqrt{a^2 + b^2} = A$$

Il valore φ é determinato dall'equazione

$$\tan(\varphi) = -\frac{b}{a}$$

4. Grafici trigonometrici

Ricavare dai grafici di $\sin(x)$ e di $\cos(x)$ quelli di

$$\sin(-x), \ \cos(2x), \ \sin(3x - 3), \ \sin(x) + \cos(x)$$

Ricavare dal grafico di $\sin(x) + \cos(x)$ le soluzioni dell'equazione

$$\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Ricavare dai grafici di $\sin(x)$ e di $\cos(x)$ quello di $\tan(x)$ e quello di

$$\tan(x + 1)$$

Esaminare le differenze che si incontrano tra i grafici di $\sin(x)$ e $\sin(|x|)$ e tra quelli di $\cos(x)$ e $\cos(|x|)$

I grafici di

$$\sin(\frac{1}{x}), \quad x\,\sin(\frac{1}{x}), \quad x^2\,\sin(\frac{1}{x})$$

Problemi:

Risolvere le seguenti equazioni

$$\sin(x) = \frac{1}{2}, \quad \sin(x) + \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}$$

5. Trigonometria

- **Teorema della corda**: un segmento assegnato può essere visto, da punti diversi, sotto angolazioni diverse, tutte uguali se ci si muove su uno dei due archi di una circonferenza passante per gli estremi del segmento. Che legame intercorre tra
  - lunghezza del segmento,
  - raggio della circonferenza,
  - funzioni goniometriche dell'angolo di vista ?

- **Teorema dei seni**: in un triangolo a lato maggiore si oppone angolo maggiore. Che legame intercorre tra la lunghezza del lato e le funzioni goniometriche dell'angolo opposto ?

- **Teorema di Carnot**: in un triangolo di lati a, b, c non sempre accade che $a^2 + b^2 = c^2$, dipende dall'angolo tra a e b ! Come si modifica, in generale tale formula ?

- Come si possono ricavare dai lati di un triangolo misure dei suoi angoli ?

6. I numeri complessi

Quali radici ha l'equazione

$$x^2 + 1 = 0 \quad ?$$

e quali, in generale, le equazioni di secondo grado

$$x^2 + p\,x + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R} \quad ?$$

I numeri reali si disegnano come punti di una retta:

... e i numeri complessi ?

L'aritmetica dei numeri complessi:

- somme,
- prodotti,
- quozienti.

confronti con

- regola del parallelogramma per sommare vettori,
- rotazione e/o dilatazioni del piano.

L'esponenziale Indicato con

$$e^{i\,\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\,\sin(\vartheta)$$

riesce, provare per credere,

$$e^{i\,\vartheta} \,.\, e^{i\,\varphi} = e^{i\,(\vartheta+\varphi)}$$

Dalla definizione di $e^{i\,\vartheta}$ si possono dedurre tutte le formule trigonometriche:

- dal sistema

$$\begin{cases} e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\,\sin(\vartheta) \\ e^{-i\vartheta} = \cos(\vartheta) - i\,\sin(\vartheta) \end{cases}$$

  si ricavano le espressioni di $\cos(\vartheta)$ e $\sin(\vartheta)$

$$\cos(\vartheta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}\right), \quad \sin(\vartheta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\right)$$

- dalla relazione

$$\left(e^{i\vartheta}\right)^2 = e^{2i\vartheta}$$

  si ricava

$$\cos^2(\vartheta) + 2i\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) = \cos(2\vartheta) + i\sin(2\vartheta)$$

  da cui

$$\begin{cases} \cos(2\vartheta) & = \cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) \\ \sin(2\vartheta) & = 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \end{cases}$$

- ecc. ecc.

Esempio 6.1. *Si voglia ricavare l'espressione di*

$$\cos(3\vartheta + \varphi)$$

in termini di seni e coseni di ϑ e di φ.
Ricordando che

$$\cos(3\vartheta + \varphi) = \frac{1}{2}\left\{e^{i(3\vartheta+\varphi)} + e^{-i(3\vartheta+\varphi)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))^3(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + (\cos(\vartheta) - i\sin(\vartheta))^3(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))\right\}$$

...poi si tratta di eseguire i prodotti...!

CAPITOLO 8

Disequazioni

1. Regole generali

É opportuno avere presenti le seguenti regole:

(1) $a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$; ne segue che si può portare un termine da un membro all'altro, cambiando segno.

(2) $a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} ac \leq bc \text{ se } c > 0 \\ \\ ac \geq bc \text{ se } c < 0 \end{cases}$

In particolare $a \leq b$ se e solo se $-a \geq -b$.

(3) $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0, \qquad a < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0.$

(4) $(a \neq 0, b \neq 0, a < b) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b} \text{ se } a \text{ ed } b \text{ sono concordi} \\ \\ \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \text{ se } a \text{ ed } b \text{ sono discordi} \end{cases}$

(5) $|b| > |a| \Leftrightarrow b^2 > a^2 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) > 0.$

2. Soluzioni di disequazioni

Le soluzioni di una disequazione in una variabile o di un sistema di disequazioni in una variabile costituiscono un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ generalmente formato da un numero finito di intervalli e/o un numero finito di punti di $\mathbb{R}$.

Esempio 2.1. *Consideriamo la disuguaglianza $x^2(x^2-1) \geq 0$: è facile riconoscere che l'espressione assegnata si annulla in tre punti*

$$x_{-1} = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

Quindi almeno tali tre punti sono soluzioni della disuguaglianza. Dei tre intervalli da essi determinati

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, +\infty)$$

soddisfano la disuguaglianza il primo e il terzo.

Pertanto l'insieme delle soluzioni di $x^2(x^2-1) \geq 0$ *è*

$$(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$$

unione di due intervalli e un punto isolato.

3. Disequazioni irrazionali

Si dicono irrazionali le disequazioni che coinvolgono espressioni sotto radice. Consideriamo

$$\sqrt{A(x)} < B(x).$$

Anzitutto, deve essere $A(x) \geq 0$; inoltre, nelle regioni in cui $B(x) \leq 0$, la disequazione non può essere soddisfatta; nelle regioni in cui $B(x) > 0$, essendo entrambi i membri positivi, equivale a ciò che si ottiene elevando al quadrato.
Pertanto

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x). \end{cases}$$

Analogamente si ha

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^2(x). \end{cases}$$

Per quanto riguarda la disequazione opposta:

$$\sqrt{A(x)} > B(x),$$

premesso che deve essere $A(x) \geq 0$, essa è vera nelle regioni in cui $B(x) < 0$; nelle regioni in cui $B(x) \geq 0$, equivale a ciò che si ottiene elevando al quadrato; in tal caso la disuguaglianza $A(x) \geq 0$ è implicita in $A(x) > B^2(x)$, e può essere omessa.
Pertanto

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x). \end{cases} \right)$$

Analogamente

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ \\ B(x) < 0 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ \\ A(x) \geq B^2(x). \end{cases} \right)$$

4. Equazioni e disequazioni goniometriche

- Risolvere l'equazione $\tan(x) = 1$:
  - in quali triangoli si trovano angoli che soddisfino tale equazione ?
  - quanti numeri reali $x \in [0, 1]$ soddisfano l'equazione ?
  - quanti numeri reali $x \in [0, 2\pi]$ soddisfano l'equazione ?
  - quanti numeri reali $x \in \mathbb{R}$ soddisfano l'equazione ?
- Risolvere l'equazione $\tan\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ è problema molto diverso dal precedente ?
- Cosa rappresentano le funzioni

$$\arcsin(t), \quad \arccos(t), \quad \arctan(t) \quad ?$$

- Le soluzioni dell'equazione $\sin(x) = 0.7$ sono fornite da $\arcsin(0.7)$?
- L'equazione

$$3\sin(t) + 4\cos(t) = 5$$

  è molto diversa da un'equazione della forma $\sin(t) = m$?
- Che legame intercorre tra il problema

$$3\sin(t) + 4\cos(t) \geq 5$$

  e quello nel piano

$$3x + 4y \geq 5, x^2 + y^2 = 1, \quad ?$$

5. La verifica

Risolta (o creduto di aver risolta) una disequazione é sempre consigliabile eseguire una verifica.
La disequazione, di qualunque tipo, prevede un primo e un secondo membro, almeno uno dei due dipendente dalla x, che devono produrre, se calcolati in corrispondenza alle x soluzioni, valori ordinati nel modo previsto dalla disequazione

- il primo maggiore del secondo, o viceversa,
- oppure ancora il primo maggiore o uguale del secondo, o viceversa.

La verifica quindi consiste nel

- scegliere almeno un x in ciascuno degli intervalli soluzione trovati,

- calcolare in corrispondenza ad essi i valori del primo e secondo membro della disequazione,
- verificare che i valori ottenuti soddisfino l'ordinamento previsto nella disequazione.

É invece quasi sempre inefficace verificare la correttezza della soluzione trovata ribattendo i passaggi eseguiti per ottenerla: é infatti molto probabile infatti che, rieseguendo i passaggi, si faccia lo stesso errore, algebrico o concettuale, eventualmente fatto prima.
In altri termini la verifica, ovvero il collaudo della risposta ottenuta, deve essere fatta per una strada diversa per contare sulla sua efficacia.

6. Esercizi proposti

(1) Risolvere le disequazioni

$$\begin{aligned}&x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0,\\ &13x^3 + x^2 - 41x + 27 < 0,\\ &x^3 + x - 30 > 0\end{aligned}$$

cercando radici delle equazioni corrispondenti e quindi fattorizzando.

(2) $\dfrac{x-1}{x^2+x} > 0$

Si considerino gli intervalli in cui il numeratore e il denominatore sono concordi: le soluzioni della disequazione proposta sono l'unione delle soluzioni di ciascuno dei due sistemi

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x^2+x>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-1<0 \\ x^2+x<0 \end{cases}$$

(3) $\dfrac{2x+1}{x-2} \leq 3$

Si porti il 3 a primo membro e si riduca a un'unica frazione.

(4) $\dfrac{2(x+1)}{x^2-8x+15} - \dfrac{x+5}{x^2-6x+5} \geq \dfrac{3(x+1)}{x^2-4x+3}$

Stesso suggerimento dell'esercizio precedente, conservando la fattorizzazione del denominatore comune.

(5) $1 + \dfrac{8}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} \geq 0.$

(6) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1} > \dfrac{x-3}{x+3} \\ \\ \dfrac{4x^2-1}{3+x} < 0 \end{cases}$

(7) Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la radice $\bar{x}$ dell' equazione

$$2x + 1 = 3\lambda$$

è tale che $-1 \leq \bar{x} \leq 3$?

(8) Studiare la la funzione $y = ax^2 + bx + c$. Che relazioni ci sono fra i coefficienti e le radici?

(9) Fissato λ, sotto quali condizioni per i coefficienti dell' equazione $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ risulta
a)$x_1 < \lambda < x_2$?
b)$x_1 < x_2 < \lambda$?

(10) Per quale limitazione su k, l' equazione

$$x^2 + 5x - (2k - 1) = 0$$

ammette due radici: x_1, x_2, con $x_1 < 3 < x_2$?

(11) Per quale limitazione su k, l' equazione

$$x^2 + (2 - 3k)x - (k - \frac{5}{4}) = 0$$

ammette due radici: x_1, x_2, con $x_1 < x_2 < 2$?

(12) $|x - 1| \leq x^2 - 3$

(13) $|x^2 - 3x + 2| < x + 1.$

(14) $x|x| + |2x - 1| > 0$

(15) $|x + 3| - |x - 1| \leq 0.$

(16) $\sqrt{x - 2} > x - 5.$

(17) $\log_2 x > 3.$

(18) $\log_3(x^2 + 5x + 3) > 2.$

(19) $\cos x < 1/2.$

(20) $\sin x < \sqrt{3}/2.$

(21) $\sqrt{3}\cos x - \sin x > 1.$

(22) $4\cot x > \dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}.$

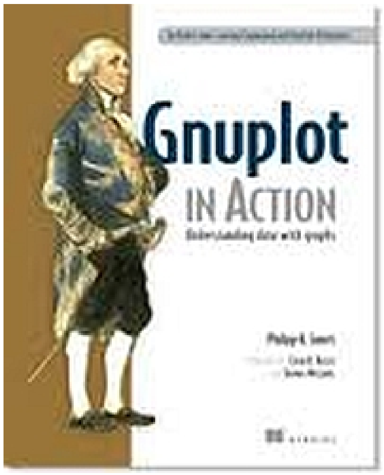
CAPITOLO 9

Software matematico

Il software piú semplice adatto al primo ingresso nell'universitá é attualmente GeoGebra: si tratta di un prodotto

- gratuito, http://www.geogebra.org/cms/it
- utilizzabile su Windows, Mac OS-X, Linux, ecc.
- continuamente aggiornato

che soddisfa le esigenze dei primi corsi di Analisi, di Geometria, di Algebra.
Le figure di questa Dispensa sono state realizzate con GeoGebra



Un altro prodotto, ancora gratuito, in grado di produrre ottimi grafici in due o tre dimensioni é

GNUPLOT

L'indirizzo Web é

http://www.gnuplot.info/

WolframAlpha
computational knowledge engine

Consulenze matematiche varie, dalla soluzione di equazioni a precisazioni su formule e non solo, si possono rivolgere al sito della Wolfram all'indirizzo

http://www.wolframalpha.com/

CAPITOLO 10

Alfabeto greco

minuscola	Maiuscola	*nome*
α	A	*alpha*
β	B	*beta*
γ	Γ	*gamma*
δ	Δ	*delta*
$\epsilon\ \varepsilon$	E	*epsilon*
ζ	Z	*zeta*
η	H	*eta*
$\theta\ \vartheta$	Θ	*theta*
ι	I	*iota*
$\kappa\ \varkappa$	K	*kappa*
λ	Λ	*lambda*
μ	M	*mi (mu)*
ν	N	*ni (nu)*
ξ	Ξ	*xi*
o	O	*omicron*
$\pi\ \varpi$	Π	*pi*
$\rho\ \varrho$	P	*ro*
$\sigma\ \varsigma$	Σ	*sigma*
τ	T	*tau*
υ	Υ	*ipsilon*
$\phi\ \varphi$	Φ	*phi*
χ	X	*chi*
ψ	Ψ	*psi*
ω	Ω	*omega*