Soluzione Compito A

1. Per ricavare la velocità di uscita dobbiamo scrivere le due equazioni per il proiettile:
   a. In questo caso il proiettile si muove di moto uniforme lungo x e uniformemente accelerato lungo y si ha dunque:
      $x_P(t)= v_0t$
      $y_P(t)= -1/2gt^2$
      Dalla prima equazione si può ricavare il tempo di impatto sul bersaglio $t_I=d/v_0$ e sostituendo nella seconda si ha:
      $y_P(t_I)=-1/2g\ d^2/v_0^2= -y_I$ da cui $v_0^2= gd^2/2y_I$ quindi $v_0= (gd^2/2y_I)^{1/2}= 482$ m/s
   b. Nel secondo caso si deve considerare l'angolo α e le equazioni diventano:
      $x_P(t)=v_0\cos\alpha t$
      $y_P(t)=v_0\sin\alpha t-1/2gt^2$
      Come nel caso precedente dalla prima si può ricavare $t_I=d/(v_0\cos\alpha)$ e sostituendo nella seconda si ottiene ponendo $y(t_I)=0$:
      $v_0\sin\alpha\ t_I-1/2gt_I^2=0$ da cui: $v_0\sin\alpha\ d/(v_0\cos\alpha)\ -1/2g\ d^2/(v_0\cos\alpha)^2=0$ da cui raccogliendo a fattor comune:
      $d/(v_0\cos\alpha)\ (v_0\sin\alpha-gd/(2v_0\cos\alpha))=0$ da cui azzerando il termine in parentesi:
      $v_0^2\sin\alpha\ \cos\alpha= g/2d$ ma ricordando che $2\sin\alpha\ \cos\alpha= \sin 2\alpha$ si ottiene:
      $\sin 2\alpha = gd/v_0^2$ da cui $\alpha=1/2\text{asin}(gd/v_0^2)=6.3\text{x}10^{-4}$ rad
      coerente con la considerazione intuitiva che basta sparare 1.9cm più in alto per colpire il bersaglio e che quindi $\alpha = \text{atan}(y_I/d) = \text{atan}(0.019/30) = 6.3\text{x}10^{-4}$ rad.

2. Applicando il secondo principio della dinamica alle masse m_1 e m_2, e proiettando sugli assi parallelo (X) e perpendicolare al piano inclinato (Y) si può scrivere:
   asse y: $N = m_1\ g\ \cos\alpha$;
   asse x: $m_1a_1 = F_0 - T - m_1g\ \sin\alpha - \mu_d\ m_1\ g\ \cos\alpha$
   (avendo orientato l'asse X come F_0);
   asse y: $N = m_2\ g\ \cos\alpha$;
   asse x: $m_2a_2 = T - m_2\ g\ \sin\alpha - \mu_d\ m_2\ g\ \cos\alpha$.
   Le due masse procedono con la stessa accelerazione (il filo non si piega e non si spezza). Mettendo a sistema le due equazioni lungo il piano si ottiene:
   $a = F_0/(m_1+m_2) - g\ \sin\alpha - \mu_d\ g\ \cos\alpha = 14.81\ m/s^2$.
   Dallo stesso sistema si ottiene il valore di T:
   $T = m_2a + m_2\ g\ \sin\alpha + \mu_d\ m_2\ g\ \cos\alpha = 60$ N.
   Dopo che il filo si è spezzato l'energia meccanica non si conserva per effetto del lavoro compiuto dalla forza di attrito F_A ma possiamo scrivere:
   $E^m_i=E_K^f+W$n.c. da cui $m_2gh=1/2m_2v_f^2+F_As$
   in cui $s=h/\sin\alpha$ è lo spazio percorso da m_2 per scendere dal piano. Allora
   $m_2gh=1/2m_2v_f^2 + \mu_d\ m_2\ g\ \cos\alpha\ h/\sin\alpha$ da cui
   $v_f = \sqrt{(2gh(1-\mu_d/tg(\alpha))} = 2.97$ m/s

3. Il moto del pendolo composto è di pura rotazione intorno all'asse di sospensione. Pertanto l'equazione del moto è $M=I_Z\alpha$ con I_Z momento d'inerzia rispetto al punto di sospensione $I_Z=I_{CM}+md^2$. Se si sposta il sistema dall'equilibrio la forza peso assume momento non nullo pari a $M =mg_P\ d\sin\theta$. Allora si può scrivere:
   $I_Zd^2\theta/dt^2 + mg_P\ d\sin\theta = 0$. Per piccoli angoli $\sin\theta\sim\theta$ e scrivendo l'equazione in forma canonica si ha:

$d^2\theta/dt^2 + mg_P d/I_Z\ \theta = 0$
da cui si può ricavare che $\omega = (mg_P d/I_Z)^{1/2}$. Essendo $T=2\pi/\omega$ si ha che
$T^2=4\pi^2 I_Z/(mg_P d)$ da cui si deduce infine che:
$\mathbf{g_P = 4\pi^2 I_Z/(mT^2 d) = 4\pi^2(I_{CM}+md^2)/(mdT^2) = 12.2\ m/s^2}$

4. Per la legge di Stevino la pressione nel liquido alla profondità H è:
   $P=P_{Atm} + \rho_{H2O}gH$ =101325+1000*9.801*15= 248340 Pa
   Da P=F/S si ricava che la forza agente sull'oblo:
   $F_{Ext}= PS = (P_{Atm} + \rho_{H2O}gH)*\pi R^2 = 7802$ N
   La pressione interna al sottomarino 0.9 Atm esercita a sua volta una forza sull'oblo diretta in direzione opposta a quella dell'acqua e di modulo:
   $F_{In}=P_{In}S=0.9*101325*\pi R^2 = 2865$ N
   Da cui la forza risultante vale $F_{Ris}= F_{Ext}-F_{In}$=7802-2865 = 4937 N
5.
   a. Dalla relazione $P_0V_0 = nRT_0$ ricavo $n= P_0V_0/RT_0$ = n numero di moli.
      La massa del gas vale allora $M_G=nP_m=P_m\ P_0V_0/RT_0$
      Facendo attenzione con le unità di misura V_0 =2L=2E-3 m^3 e T_0=27 °C=300.15 K
      P_0 = 1 atm = 101325 Pa
      R = 8.31 J $moli^{-1}\ K^{-1}$ = 0.082 atm litri $moli^{-1}K^{-1}$
      M_G=101325*2E-3/(8.314*(273.15+27))*28E-3=0.00227 Kg = 2.27 g
   b. n= 2.27/28 = 0.0811 moli
      Essendo il peso del pistone trascurabile il gas si espande sotto la sola pressione atmosferica cioè compie una espansione isobara a $P = P_0$ = 1 atm. Allora possiamo scrivere che il lavoro compiuto è pari a dW=pdW e quindi $W=P_0*(V_1-V_0)$.
      Sempre con la dovuta attenzione alle unità di misura delle variabili si ha:
      $W=P_0*\Delta V$=101325*(2.5E-3-2E-3) = 50.66 J >0 gas in espansione compie lavoro.
   c. La trasformazione è isobara ed il gas è biatomico. Dal primo principio:
      $\Delta Q=\Delta U+W=nc_v\Delta T+p\Delta V= nc_v(T_2-T_1)+p(V_2-V_1)$
      è necessario quindi ricavare il valore di T_1 che si può dedurre dall'equazione dei gas perfetti essendo note ($P_1=P_0$ V1 e n) quindi $T_1=P_1V_1/nR$ = 375.7 K
      $\Delta Q=nc_v(T_2-T_1)+p(V_2-V_1)$ = 127.1+50.7 = 177.8 J

Soluzione Compito B

1. Per dimostrare che la scimmia viene colpita dobbiamo analizzare il moto della scimmia e della freccia e verificare che esiste un istante in cui entrambe occupano le stesse coordinate x,y. Il **moto della freccia** è dato dalle seguenti equazioni:
   $x_F(t)=v_0\cos\theta t$
   $y_F(t)=v_0\sin\theta t-1/2gt^2$
   Il moto della scimmia
   $x_S(t)=d$
   $y_S(t)=H-1/2gt^2$
   Eguagliamo prima le coordinate y e otteniamo:
   $v_0\sin\theta t-1/2gt^2 = H-1/2gt^2$
   da cui si può ricavare il valore del tempo di impatto $t_I=H/v_0\sin\theta$ ora a $t=t_I$ scimmia e freccia debbo occupare entrambe la coordinata x=d quindi vogliamo:
   $x_F(t_I)=v_0\cos\theta t_I=v_0\cos\theta*H/v_0\sin\theta=H/tg\theta=H/(H/d)=d$ esattamente la coordinata x_S della scimmia!
   In tale istante la scimmia si trova ad una quota:
   $y_S= H - 1/2gt_I^2 = H-1/2g\, H^2/(v_0\sin\theta)^2= 4.01$ m

2. Le equazioni del moto si scriveranno per i due corpi: ma = mg - T (per la massa m) e Ma = T - N μ ; N - Mg = 0 (per la massa M). Risolvendo il sistema si ottiene a =(mg - μ Mg)/(m + M) = 0.2 m/s^2.
   La tensione del filo si ricava da una delle due equazioni della dinamica dei corpi 1 e 2: T = m (g-a) = 4.32 N. (avendo utilizzando l'equazione del moto del corpo m).
   Partendo da fermo, ed accelerando per 2 secondi con accelerazione a, il blocco M percorre **$d = 1/2\ at^2 = 0.4$ m**. Quando si stacca la fune il corpo M procede decelerando per via dell'effetto dell'attrito dinamico con decelerazione pari a $-\mu_d g$. La velocità al distacco della fune sarà v = at = 0.4 m/s. La distanza percorsa per annullare la velocità (x) si ricava dalla relazione ΔE_K=Wnc da cui $-1/2mv^2_i = -\mu mg\ x$ (essendo $v_f = 0$).
   Si ricava quindi $x = 1/2v^2_i/(\mu_d g) = 0.041$ m.
   La distanza totale D = (x + d) = 0.441 m.

3. Per ottenere la condizione di puro rotolamento deve sussistere la relazione $a_{CM}=a_T$ in cui a_T può essere messa in relazione con l'accelerazione angolare $a_T=\alpha R$. Le due equazioni possono essere ottenute tramite le due equazioni:
   $R^{(E)}=m\ a_{CM}$ e $M = I\alpha = Ia_T/R$
   Dalla prima equazione si ottiene essendo presenti solo forza di gravità ed attrito:
   $ma_{CM} = mg \sin\theta -\mu_s mg \cos\theta$ da cui $a_{CM}= g \sin\theta - \mu_s g \cos\theta$
   calcolando i momenti rispetto al centro della sfera l'unica forza a momento non nullo è la forza di attrito da cui:
   $\mu_d mg \cos\theta\ R = I_S a_T/R = 2/5mR^2\ a_T/R$ da cui $a_T=5/2\ \mu_d g \cos\theta$
   eguagliando a_T ed a_{CM} si ottiene:
   $g \sin\theta - \mu_s g \cos\theta = 5/2\ \mu_s g \cos\theta$ $7/2\ \mu_s\cos\theta = \sin\theta$ da cui infine:
   $\mu_s=2/7\ tg\theta= 2/7=0.29$

4. Per la legge di Stevino le superfici nei punti A e C hanno la stessa pressione (isobare) $P_A=P_C$. Se chiamiamo $S=\pi R^2$ la superficie di una sezione del tubo abbiamo:
   $P_A = P_{Atm} + m_A g/S$ mentre $P_B = P_{Atm} + m_B g/S + \rho g h$ eguagliando si ottiene:
   $\mathbf{m_A - m_B = \rho S h = \rho \pi R^2 h = 11.31\ Kg}$
5. Soluzione :
   a. Dalla relazione $P_0V_0 = nRT_0$ ricavo $n= P_0V_0/RT_0$ = n numero di moli.
      La massa del gas vale allora $M_G=nP_m=P_m\ P_0V_0/RT_0$
      Facendo attenzione con le unità di misura $V_0 = 5L=5E\text{-}3\ m^3$ e $T_0=-30°C = 243.15\ K$
      $P_0 = 1\ atm = 101325\ Pa$
      $R = 8.31\ J\ moli^{-1}\ K^{-1} = 0.082\ atm\ litri\ moli^{-1}K^{-1}$
      M_G=101325*5E-3/(8.314*(273.15-30))*32E-3)=0.008 Kg = 8 g
      n= 8/32 = 0.25 moli
   b. Il calcolo delle coordinate termodinamiche dello stato finale passa per il calcolo di V_1 che può essere ottenuto usando il valore della variazione di h.
      $V_1=V_0+h*S = 5+0.4 = 5.4\ dm^3$
      conoscendo ora T_1 e V_1 ed n posso ricavare il valore della pressione finale P_1 che contiene l'informazione sulla forza elastica e quindi sul valore di k richiesto.
      $P_1=nRT_1/V_1=115529.95\ Pa$
      La pressione extra sul pistone fornita dalla molla è pari a $P_E=(P_1-P_{Atm})$ e si ha:
      $P_E=-Kh/S$ da cui $K=(P_1-P_{Atm})S/h=1.42\times10^4\ N/m$
   c. $L = 1/2Kh^2 + P_0\Delta V = 47.3\ J$