Compito A

1) Per un osservatore solidale con il suolo, la palla parte dal punto P e ricade nel punto P, compiendo un moto rettilineo accelerato (con accelerazione data dalla forza peso). E' quindi conveniente studiare il moto da questo sistema di riferimento (inerziale), fermo e centrato in P. Al fine di trovare la velocità v' nel sistema di riferimento del carrello scriveremo quindi $v' = v - v_c$ ove v è la velocità nel sistema di riferimento solidale al suolo e v_c è la velocità del carrello, parallela all'asse x. Il moto della palla nel sistema fisso (v) deve avvenire solo lungo y e non lungo x, da cui: $v_x = v'_x + v_c = 0$ e quindi $v'_x = -v_c$. Per determinare $v'_y = v_y - v_{c,y} = v_y$ bisogna studiare il moto verticale della palla, che avviene nel tempo t_V pari al tempo che impiega il carrello a spostarsi di L: $t_V = L/v_c$. In tale tempo la palla si muove di moto uniformemente accelerato ed avremo che la quota in funzione del tempo è pari a: $y(t) = v_y t - 1/2gt^2$ imponendo $y(t) = 0$ si ottiene la relazione $t_V = 2v_y/g$ da cui è possibile misurare v_y. Numericamente si ottiene dunque: $v_y = v'_y = 8.5$ m/s e $v'_x = -4.9$ m/s, da cui $v' = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} = 9.8$ m/s formante un angolo $\theta = \arctan(v'_y/v'_x) = 60°$ con l'asse orizzontale. La quota massima si ottiene rapidamente considerando che il moto verticale è simmetrico rispetto alla salita e la discesa e quindi che $t_{salita} = t_V/2 = v_y/g$. allora $H = y(t_{salita}) = v_y^2/2g = 3.7$ m

2) L'unica forza in azione è la gravità che è conservativa. La reazione vincolare non può compiere lavoro quindi si conserva l'energia meccanica. L'energia meccanica iniziale è tutta potenziale e vale $E_m^i = mgh = mgL(1-\cos\theta_0)$. L'energia meccanica finale è tutta potenziale e vale $E_m^F = mgh'$ egualiando per la conservazione dell'energia meccanica: $E_m^i = E_m^F$ $mgh = mgh'$ da cui $h' = h = L(1-\cos\theta_0) = 3.04$ cm. Il filo misura ora $L_F = (L-d)$ Esplicitando $mgL(1-\cos\theta_0) = mg(L-d)(1-\cos\phi_0)$ da cui: $(1-\cos\phi_0) = L(1-\cos\theta_0)/(L-d)$ quindi $\phi_0 = \mathrm{acos}((L\cos\theta_0 - d)/(L-d)) = 12.41°$.

3) Il momento della tensione del filo rispetto al centro della ruota vale $M = TxR = TR$
Da $M = I\alpha$ si ottiene $I\alpha = TR$ e quindi $\alpha = TR/I$ dove $I = 1/2M_DR^2 = 1$ Kg*m^2 .
Per ricavare T possiamo usare la II legge di Newton per la caduta del corpo m.
$mg - T = ma$ da cui $a = (mg-T)/m$.
La relazione che lega a ad α è data da: $a = R\alpha$ quindi:
$a = R\alpha = TR^2/I = (mg-T)/m$ da cui
$T = mg/(1+mR^2/I) = mg/(1+2m/M_D) = 8.17$ N.
$\alpha = TR/I = 8.17$ m/s^2

4) L'urto e' completamente anelastico quindi si conserva solo la quantità di moto:
$mv = (M+m)v_F$.
Dopo l'urto il sistema proiettile/blocco procede frenato dall'azione dell'attrito.
Dal teorema dell'energia cinetica otteniamo la reazione:
$\Delta Ek = L_{att}$ e quindi $0 - 1/2(M+m)v_F^2 = -\mu_d g(M+m)d$.
Tale relazione può essere espressa in funzione di v usando v_F dalla prima relazione:
$1/2\,(M+m)\,m^2/(M+m)^2 v^2 = \mu_d g\,(M+m)\,d$.
Si ricava quindi $v = (M+m)/m\,\sqrt{(2\mu_d g d)} = 1123$ m/s.

5) Considerando un intervallo Δt di tempo, il lavoro svolto ΔL, il calore assorbito ΔQa e ceduto ΔQc saranno indicati da:

$\Delta L = P\Delta t$; $\Delta Qa = Pa\Delta t$ e $\Delta Qc = Pc\Delta t$.

Il calore ceduto nell'unità di tempo e il rendimento saranno dati da:

$Pc = Pa - P$

$\eta = \Delta L/\Delta Q_a = P/Pa = 0.59$.

Se ne deduce essendo $\eta=1-T_f/T_c$ che la temperatura della sorgente fredda T_f è data da:

$T_f = T_c\,(1- \eta) = 242$ K.

Essendo il ciclo reversibile la variazione di entropia nell'unità di tempo per la sorgente fredda sarà quindi: $\Delta S/\Delta t = \Delta Q_{rev}/T_f = Pc/T_f = 2.28$ kW/K

Compito B

1) Per semplificare la descrizione del moto converrà porsi nel sistema di riferimento solidale con l'ascensore, scegliendo l'asse z rivolto verso l'alto. Il sistema di riferimento è non inerziale, in quanto accelera con accelerazione costante $A = g/3$ diretta verso il basso. L'accelerazione della palla in tale sistema di riferimento sarà dunque: ottenibile tramite $F - ma_T = ma'$ dove a_T è l'accelerazione di trascinamento. a' si ricava dunque pari a $-(2/3)\ g$.
All'istante iniziale $t = 0$ l'altezza della palla è H e l'equazione del moto diviene: $z(t) = H -1/2a't^2$. Il tempo di caduta si ottiene quindi imponendo $z(t_C) = 0$ ricavando: $t_C=\sqrt{(2H/a')}= 0.6$ s.
La velocità v_F del corpo quando tocca il pavimento è pari a $v_F=a't_C = -2/3gt_C$, ed in seguito all'urto elastico, tale velocità diverrà $2/3gt_C$. Dopo l'urto l'equazione del moto diviene $z(t) = v_F\Delta t-1/2a'\Delta t^2=2/3gt_C\ (t-t_C)-1/2*(2/3)g(t-t_C)^2$, che calcolata per $t = 1$s dà la quota richiesta $D = 1.06$ m

2) Sulla sfera agiscono solo la forza peso P e la tensione del filo T. $ma=P+T$.
Scomponendo sui due assi si ha:
$a_c=T\text{sen}\ \theta$ mentre sull'asse verticale si ha $T\cos\theta = mg$.
Quindi: $T = mg/\cos\theta= 10.15$ N.
Usando $a_c=\omega^2/r$ ed $r=L\text{sen}\ \theta$ si ottiene:
$\omega = \sqrt{g/(L\cos\theta)} = 2.58$ rad/ s

3) Non essendo presenti forze non conservative posso applicare la conservazione dell'energia meccanica. Quando il punto si trova alla quota $h=x\sin\theta$ la sua energia è tutta potenziale gravitazionale e vale: $E_p^i=Mg(h+R)$. Alla base del piano inclinato l'energia si è trasformata in energia cinetica:
$E_K^F= 1/2Mv^2+1/2I\omega^2$ con $I=2/5MR^2$ e per effetto del puro rotolamento $v=\omega R$
$E_K^F=(1/2+1/5)Mv^2=7/10Mv^2$ a cui va aggiunta l'energia potenziale per la quota del CM
$E_P^F = MgR$ da cui usando $E_m^i=E_m^F$ si ha
$Mg(h+R) = 7/10Mv^2 + MgR$ $\quad v=(10/7gh)^{1/2}= (10/7g\ x\sin\theta)^{1/2}= 6.63$ m/s
Si può anche trascurare il termine MgR in tutte le equazioni in quanto la sfera è rigida.

4) Essendo l'urto elastico si conservano la quantità di moto e l'energia cinetica.
Dopo l'urto le velocità di m ed M (con M>m) sono:
$v_1 = (m - M)/(m + M)\ v$ e
$v_2 = 2m\ v\ /(m + M)$.
Dai dati del problema si ricava $v_1 = -v_2$ ed imponendo tale relazione si ottiene: $M/m = 3$.
La velocità del centro di massa è calcolabile sempre utilizzando la quantità di moto totale del sistema in quanto $P_{Tot}=v_{CM}M_{Tot}$ cioe' $mv=v_{CM}(M+m)$:
$v_{CM} = v\ m/(M+m) = v/4 = 1$ m/s.
L'energia cinetica totale nel sistema di riferimento del CM sarà:
$E^* = 1/2\ m\ v_1^{*2} + 1/2\ M\ v_2^{*2}$. Si avrà quindi:
$v_1^* = v-v_{CM} = Mv/(M+m) = (3/4)v$
$v_2^* = 0-v_{CM} = -v/4$.
In totale $E^*=3/8mv^2 = 0.45$ J.

5) Il calore ceduto al fiume si può ricavare una volta noti il Lavoro (L) ed il calore assorbito (Qa) ed è calcolabile tramite: $\eta = L/\ Qa$ quindi $Qa=L/\eta$;
Dalla relazione $L=Qc+Qa$ si ha $Qc = -Qa + L= L\ (1-1/\eta)$.
Considerando che in un'ora nel fiume scorre una massa d'acqua $m = \Phi \times \Delta t = 1.0^8 \times 10^8$ kg si avrà $Qc = mc_{H2O}(\Delta T)$ da cui $\Delta T = L(1- 1/\ \eta) / mc_{H2O} = 9.29$ K.