

Cinematica Relativistica

riccardo.paramatti@roma1.infn.it

17 aprile 2011

1 Richiami sulla Relatività Ristretta

I principi sui quali si fonda la Teoria della Relatività Ristretta sono i seguenti:

- qualunque esperimento fornisce gli stessi risultati se eseguito in due sistemi di riferimento dei quali uno sia in moto rettilineo ed uniforme rispetto all'altro; in altre parole le leggi della fisica sono le stesse in ogni riferimento inerziale,
- l'energia, la quantità di moto totale ed il momento angolare totale di un sistema fisico isolato sono costanti nel tempo,
- la velocità con cui si propaga nel vuoto la luce, così come ogni onda elettromagnetica, è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale e vale¹:

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (1)$$

questa velocità è un limite insuperabile,

- il tempo non è un invariante relativistico.

I primi due sono principi su cui si basa anche la meccanica classica; nella relatività ristretta, la conservazione dell'energia assume, in virtù dell'equivalenza tra massa ed energia, un significato più generale. In meccanica classica vale anche il principio di relatività associato alle trasformazioni di Galileo ed il principio di invarianza del tempo rispetto al sistema di riferimento.

Le trasformazioni di Galileo vengono sostituite, nella meccanica relativistica, dalle trasformazioni dello spazio-tempo di Lorentz (richiamate nel paragrafo 3) che si riducono, come vedremo, alle trasformazioni di Galileo nel limite $v \ll c$.

¹Il valore di c è privo di errore; il metro, dal 1983, è definito come *la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/299792458 di secondo*.

2 L'esperimento di Michelson-Morley

Le equazioni dell'elettromagnetismo di Maxwell contengono esplicitamente la velocità della luce nel vuoto $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ e non sono quindi invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Nella visione classica, la luce ha velocità c nel sistema di riferimento solidale con il mezzo nel quale la luce stessa si propaga (*etere*) e avrà di conseguenza velocità diversa in qualsiasi sistema di riferimento che si muova rispetto all'etere. Per individuare il sistema di riferimento solidale con l'etere, nel quale la luce avesse proprio velocità c , e verificare la variazione della velocità della luce dovuta al movimento della Terra rispetto ad esso, sono stati eseguiti diversi esperimenti il più importante dei quali è l'esperimento di Michelson-Morley (1887).

L'apparato sperimentale, schematizzato in figura 1, è un interferometro nel quale la luce emessa da una sorgente attraversa uno specchio semiriflettente nel punto B. Parte della luce viene riflessa verso C in direzione perpendicolare alla direzione del moto della Terra lungo la sua orbita e parte continua a viaggiare lungo la direzione BE parallela a quella del moto della Terra. Le due componenti vengono riflesse dagli specchi in C e in E e si ricongiungono in B per poi venir raccolte su uno schermo dove eventuali differenze di fase danno luogo a frange di interferenza. Sia L la distanza tra il punto B e gli specchi in C ed E.

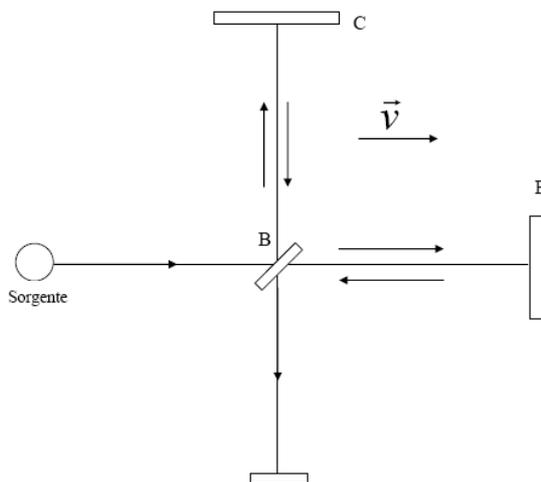


Figura 1: Schema dell'apparato sperimentale di Michelson e Morley.

Supponendo che l'apparato sperimentale e la Terra si muovano con velocità \vec{v} rispetto all'etere, lo spazio percorso dalla luce per andare dal punto B al punto E è la lunghezza L aumentata della distanza percorsa dallo specchio in E nel tempo impiegato dalla luce per raggiungerlo: $ct_1 = L + vt_1$. Per tornare indietro invece la luce percorre uno spazio minore $ct_2 = L - vt_2$.

$$t_1 + t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

La velocità della luce rispetto all'apparato è infatti, secondo le trasformazioni di Galileo, $(c-v)$ andando da B a E e $(c+v)$ andando da E a B. Inoltre se $v \ll c$ si ha $t_1 + t_2 \simeq 2L/c$.

Analogamente lo spazio percorso dal secondo raggio di luce per andare da B a C (in un tempo che chiamiamo t_3) è dato da:

$$ct_3 = \sqrt{L^2 + (vt_3)^2} \quad (3)$$

e per simmetria la luce torna indietro da C a B nello stesso tempo t_3 . Complessivamente quindi la luce viaggia per un tempo:

$$2t_3 = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

Quindi, se v non è nulla, il tempo che la luce impiega per andare da B e E e ritorno risulta maggiore del tempo necessario per andare da B a C e ritorno ($t_1 + t_2 - 2t_3 > 0$). Sperimentalmente però le frange di interferenza osservate erano sempre le stesse, sia ruotando l'apparato di 90° sia effettuando la misura in diversi periodi dell'anno. Tra le diverse interpretazioni, la soluzione avanzata da Lorentz prevedeva che un oggetto in moto si contraesse lungo la direzione del moto stesso di un fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$; secondo questa ipotesi la lunghezza del braccio BE è minore della lunghezza di BC e:

$$2t_3 = \frac{2L_{BC}}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L_{BE}}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2} = t_1 + t_2 \quad (5)$$

Le trasformazioni di Lorentz, generalizzazione di questa ipotesi, saranno introdotte nel paragrafo successivo.

3 Quadrivettori e Trasformazioni di Lorentz

Un quadrivettore \mathbf{A} è definito dalle sue quattro componenti:

$$\mathbf{A} = [a_0, a_1, a_2, a_3] = [a_0, \vec{a}] \quad (6)$$

In questa notazione si è evidenziata la separazione tra la prima componente del quadrivettore (componente temporale) dalle altre 3 (componenti spaziali); ad esempio la prima componente del quadrimpulso di una particella è la sua energia, mentre le altre tre rappresentano la quantità di moto.

La metrica dei quadrivettori utilizzata nel seguito non è una metrica Euclidea, bensì di Minkowski. Il prodotto tra due quadrivettori è dato dal prodotto delle componenti temporali dei due quadrivettori meno i 3 prodotti delle rispettive componenti spaziali, vale a dire:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (7)$$

Dati due sistemi di riferimento inerziali ($Oxyz$ e $O'x'y'z'$) in moto relativo tra di loro, si assuma per semplicità che i loro assi siano coincidenti a due a due al tempo $t = t' = 0$ e che il moto sia traslatorio uniforme lungo l'asse x ; si definiscono quindi $\beta = v_x/c$, con v_x velocità di O' rispetto a O , e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Applicando una trasformazione di Lorentz $L(\beta)$ ad un quadrivettore \mathbf{A} nel sistema di coordinate $Oxyz$, si ottiene \mathbf{A}' , l'espressione del quadrivettore nel sistema $O'x'y'z'$:

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_0 - \beta\gamma a_1 \\ -\beta\gamma a_0 + \gamma a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Nel caso del quadrivettore posizione, definito come $\mathbf{X} = [ct, x, y, z]$ affinché tutte le componenti abbiano le dimensioni fisiche di una lunghezza, si ha:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (9)$$

Se la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento è molto minore della velocità della luce ($\beta \ll 1$ e quindi $\gamma \simeq 1 + \beta^2/2$), si riottengono al prim'ordine

in β le trasformazioni di Galileo e l'invarianza del tempo:

$$\begin{aligned} ct' &\simeq (1 + \beta^2/2)(ct - \beta x) \implies t' \simeq t + \beta^2(t/2 - x/v_x) \simeq t \\ x' &\simeq (1 + \beta^2/2)(x - \beta ct) \simeq x - v_x t \end{aligned}$$

L'espressione generale delle relazioni (9), nel caso in cui la direzione del moto del sistema $O'x'y'z'$ rispetto al sistema $Oxyz$ non sia lungo un particolare asse di riferimento ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$), diventa:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} &= \gamma(x_{\parallel} - \beta ct) \\ \vec{x}'_{\perp} &= \vec{x}_{\perp} \end{aligned} \tag{10}$$

dove $x_{\parallel} = \vec{x} \cdot \vec{\beta} / \beta$ è la proiezione di $\vec{x} = [x, y, z]$ lungo la direzione del moto e \vec{x}_{\perp} è la proiezione sul piano perpendicolare.

La trasformazione di Lorentz (8) è una rotazione nello spazio-tempo; il determinante della matrice di Lorentz L è dato da $\det(L) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ e inoltre $L^{-1}(\beta) = L(-\beta)$. La trasformazione inversa $\mathbf{A} = L^{-1}(\beta) \cdot \mathbf{A}' = L(-\beta) \cdot \mathbf{A}'$ è quindi:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a'_0 + \beta\gamma a'_1 \\ \beta\gamma a'_0 + \gamma a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Il prodotto tra due quadrivettori, così come il prodotto di un quadri-vettore per se stesso, è un invariante relativistico; infatti applicando una trasformazione di Lorentz:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= a'_0 b'_0 - a'_1 b'_1 - a'_2 b'_2 - a'_3 b'_3 = \\ &= \gamma^2(a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2(a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)(a_0 b_0 - a_1 b_1) - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \tag{12}$$

Un esempio di invariante di Lorentz è il prodotto del quadri-vettore spostamento infinitesimo $[cdt, dx, dy, dz]$ per se stesso:

$$d\mathbf{S}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{13}$$

che viene anche indicato come $d\tau^2$ se pensato nel sistema di riferimento nel quale la parte spaziale dello spostamento è nulla.

Conseguenza delle trasformazioni di Lorentz sono:

- Contrazione delle lunghezze.

Si consideri una sbarra solidale con il sistema di riferimento $O'x'y'z'$ e disposta parallelamente all'asse x' , e si supponga il sistema $O'x'y'z'$ in moto rettilineo ed uniforme, lungo l'asse x , rispetto al sistema $Oxyz$; la lunghezza misurata in O' è pari a $L' = x'_2 - x'_1$ che, applicando la trasformazione di Lorentz, equivale a $L' = \gamma(x_2 - x_1) - \beta c \gamma(t_2 - t_1)$, con x_2, x_1, t_1 e t_2 grandezze relative ad un osservatore che misura la lunghezza della sbarra nel sistema $Oxyz$. Questo osservatore però, vedendo la sbarra in movimento rispetto al suo riferimento, deve misurarne i due estremi contemporaneamente cioè $t_2 = t_1$ e quindi $L' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$. Si conclude che un oggetto in moto rispetto ad un osservatore risulta contratto ($L < L'$) nella direzione del moto rispetto a quanto misurato da un osservatore solidale con l'oggetto.

- Dilatazione dei tempi.

Sia $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ l'intervallo di tempo tra due eventi che accadono nello stesso punto del sistema di riferimento $O'x'y'z'$, come ad esempio il battere 60 secondi di un orologio fisso in O' . Un osservatore solidale con il sistema $Oxyz$ misura $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) + \beta \gamma(x'_2 - x'_1)/c$ e quindi, essendo $x'_2 = x'_1$, $\Delta t = \gamma \Delta t'$. Un evento, visto da un osservatore in movimento rispetto all'evento stesso, ha una durata maggiore dello stesso evento osservato nel proprio sistema di riferimento; l'osservatore in O vede l'orologio in O' andare più lentamente del proprio orologio². Il tempo misurato nel sistema di riferimento solidale con un oggetto è detto *tempo proprio* di quell'oggetto ed è indicato con τ ³.

Un esempio caratteristico di contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi è rappresentato dal muone, particella elementare instabile con i numeri quantici dell'elettrone ma molto più pesante, che ha una vita media $\tau_\mu \simeq 2.2 \mu s$. I raggi cosmici abbondano di muoni che, prodotti nel decadimento di altre particelle negli strati superiori dell'atmosfera terrestre, arrivano fino al suolo, dopo aver percorso molti chilometri, ad una velocità prossima a quella della luce senza decadere nel tragitto. Dal punto di vista del muone, la lunghezza percorsa, cioè lo spessore di atmosfera attraversata, si è contratto di un fattore $1/\gamma$, perchè quest'ultima è in movimento rispet-

²Ovviamente anche l'osservatore in O' vede l'orologio in O andare più lentamente del proprio orologio; se così non fosse i due sistemi di riferimento inerziali non sarebbero equivalenti. L'ordine nel quale si succedono due eventi, ad esempio lo scoccare del minuto nei due orologi, può invertirsi passando da un sistema di riferimento all'altro (il prima, il dopo e la simultaneità in relatività ristretta non sono concetti assoluti).

³Per un fotone, che ha massa nulla e velocità c in qualsiasi sistema di riferimento, non è possibile definire il tempo proprio.

to ad esso; la lunghezza del percorso dal punto di vista del muone è infatti minore⁴ di $c\tau_\mu \simeq 660$ m. Per l'osservatore solidale con la terra invece, la vita media del muone si è dilatata di un fattore γ diventando molto maggiore dei $2.2 \mu s$, permettendogli quindi di arrivare al suolo prima di decadere; l'orologio solidale con il muone, che misura il tempo proprio del muone, scorre per l'osservatore molto più lentamente dell'orologio del laboratorio.

4 Cono di luce e simultaneità di due eventi

Consideriamo il diagramma spazio-temporale di figura 2; abbiamo ommesso per semplicità gli assi y e z ma le considerazioni seguenti valgono anche se si considera un diagramma tridimensionale o quadridimensionale.

Ogni punto del piano xt (o dello spazio xyt o dell'iperspazio $xyzt$) rappresenta un evento puntuale, cioè un evento che accade in un dato luogo e in un preciso istante; il luogo dei punti $t=0$ vale a dire i punti della retta x (o del piano xy o dell'iperpiano xyz) rappresentano il presente. Un corpo che si muove nello spazio-tempo descrive una traiettoria o *linea di universo*; nella figura è riportata una linea di universo passante per l'origine. Un raggio di luce emesso nel punto $x=0$ all'istante $t=0$, viaggiando alla velocità della luce è rappresentato da $(ct)^2 - x^2 = 0$, quindi dalle due bisettrici del piano; in tre dimensioni si ha un cono (da qui la definizione di *cono di luce*) ed in quattro un ipercono.

Analogamente, un raggio di luce che passa per l'origine, necessariamente è stato emesso in un punto, del semipiano $t < 0$, appartenente al cono di luce, rappresentato in figura dalla linea tratteggiata.

Dati due eventi $P_1 = (t_1, \vec{x}_1)$ e $P_2 = (t_2, \vec{x}_2)$ dello spazio-tempo, la *distanza invariante* che li separa è definita come:

$$S_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \quad (14)$$

Si presentano quindi tre diverse possibilità:

- $S_{12}^2 > 0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo tempo e sono quindi connessi causalmente vale a dire che esiste una linea di universo che li connette uno all'altro. Esiste inoltre una trasformazione di Lorentz

⁴ $c\tau$ è un limite superiore alla distanza percorsa da una particella in un tempo τ e quindi, nella visione classica di tempo invariante, alla distanza media percorsa da una particella, con vita media τ , prima di decadere. A causa della dilatazione dei tempi e dunque anche della vita media, la distanza media percorsa prima di decadere dipende però dal sistema di riferimento ed è pari a $c\tau$ solo nel riferimento in cui $p = mc$ (si dimostri questa affermazione dopo aver letto il paragrafo 6).

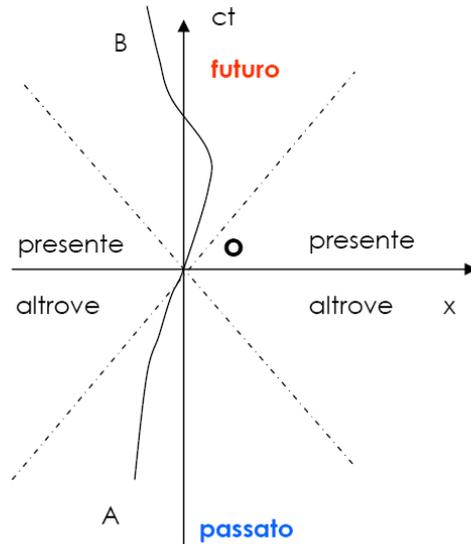


Figura 2: Piano xt degli eventi; sono rappresentati il cono di luce passante per l'origine ed una possibile linea di universo passante anch'essa per l'origine.

ad un nuovo sistema di riferimento nel quale i due eventi coincidono spazialmente ($\vec{x}'_1 = \vec{x}'_2$) ma non temporalmente.

- $S_{12}^2 < 0$: tra i due eventi c'è una separazione di tipo spazio. Questi eventi non sono connessi perchè nessuna linea di universo può metterli in connessione (a meno di violare il limite rappresentato dalla velocità della luce). In questo caso esiste una trasformazione di Lorentz ad un sistema di riferimento nel quale i due eventi si verificano in punti diversi dello spazio ma nello stesso tempo ($t'_1 = t'_2$).
- $S_{12}^2 = 0$: il primo evento si trova sul cono di luce generato dal secondo e viceversa.

Sottolineamo ancora quanto detto per due eventi separati da una distanza di tipo spazio, e cioè che soltanto in un determinato sistema di riferimento si osservano questi due eventi essere simultanei; questo fatto è in contrapposizione con la meccanica classica, dove la simultaneità di due eventi non dipende dal sistema di riferimento⁵.

⁵Illustriamo la perdita di simultaneità con un esempio: si consideri un osservatore posto nell'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$ che, ad un dato istante $t = 0$, osserva

5 Composizione delle velocità

Consideriamo ancora i due sistemi di riferimento inerziali (Oxyz e O'x'y'z') in moto relativo tra di loro, con la velocità v_0 di O' rispetto a O diretta lungo l'asse x. Un oggetto con velocità v_x rispetto al sistema Oxyz secondo la legge di composizione della meccanica classica avrebbe velocità $v'_x = v_x - v_0$ nel sistema O'x'y'z'. Applicando le trasformazioni di Lorentz (9) si ha invece:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma_0(\Delta x - \beta_0 c \Delta t)}{\gamma_0(\Delta t - \beta_0 \Delta x/c)} = \frac{v_x - v_0}{1 - v_0 v_x/c^2} \\ \beta'_x &= \frac{\beta_x - \beta_0}{1 - \beta_0 \beta_x} \end{aligned} \quad (15)$$

che per basse velocità si approssima alla composizione della meccanica classica. Nel caso limite se $\beta_x = 1$, si ha che $\beta'_x = 1$ qualunque sia la velocità relativa β_0 dei due sistemi di riferimento. Analogamente:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + v_0}{1 + v_0 v'_x/c^2} \\ \beta_x &= \frac{\beta'_x + \beta_0}{1 + \beta_0 \beta'_x} \end{aligned} \quad (16)$$

La velocità non si trasforma secondo le (9) e non rappresenta quindi la componente spaziale di un quadrivettore.

Supponiamo ora che l'oggetto si muova lungo l'asse y nel sistema Oxyz ($\Delta x = 0$) e vediamo come si trasforma la velocità: $v'_y = \Delta y'/\Delta t' = \Delta y/(\gamma_0 \Delta t) = v_y/\gamma_0$. Si noti che i due sistemi di riferimento non sono equivalenti perchè, a differenza del caso precedente, qui stiamo assumendo che $v_x = 0$ nel sistema Oxyz e quindi $v'_x \neq 0$. Nel caso generale invece:

$$v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma_0(\Delta t - \beta_0 \Delta x/c)} = \frac{v_y}{\gamma_0(1 - v_0 v_x/c^2)} \quad (17)$$

due eventi A e B, ad esempio l'accensione di due luci, nei punti $\vec{x}_A = [-\alpha, 0, 0]$ e $\vec{x}_B = [\alpha, 0, 0]$, con $\alpha = 2997924580$ metri = 10 secondi-luce. L'osservatore concluderà che i due eventi sono contemporanei ed avvenuti 10 secondi prima.

Si consideri ora un osservatore sull'origine di un sistema O'x'y'z' in moto traslatorio uniforme lungo l'asse x, rispetto ad Oxyz, con $\beta = \frac{3}{5}$; se O' passa per O proprio nell'istante in cui il primo osservatore vede le due luci accendersi, anche il secondo osservatore vedrà le due luci accendersi nello stesso momento, ma concluderà che i due eventi non sono simultanei avendo avuto luogo 5 (evento A) e 20 (evento B) secondi prima (lo si verifichi applicando le trasformazioni di Lorentz dello spazio-tempo). Chiaramente, essendo la velocità della luce pari a c anche in O'x'y'z', le distanze degli eventi A e B, per il secondo osservatore, sono rispettivamente 5 e 20 secondi-luce.

Sostituendo (16) in (17) si ottiene l'equivalente:

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma_0(1 + v_0 v'_x/c^2)} \quad (18)$$

6 Il quadrivettore energia-impulso

Il quadrimpulso (o quadrivettore energia-impulso) è definito come:

$$\mathbf{P} = [E/c, \vec{p}] = [m\gamma c, m\gamma \vec{v}] \quad (19)$$

\mathbf{P} , come tutti i quadrivettori, non è invariante rispetto al sistema di riferimento utilizzato. Il prodotto di un quadrivettore per se stesso è invece, come abbiamo visto, un invariante relativistico; il prodotto del quadrimpulso per se stesso è legato alla massa della particella:

$$\sqrt{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}} = \sqrt{E^2/c^2 - |\vec{p}|^2} = \sqrt{(m\gamma c)^2 - (m\gamma |\vec{v}|)^2} = m\gamma \sqrt{1 - \beta^2} c = mc \quad (20)$$

da cui la relazione tra massa, impulso ed energia di una particella:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (21)$$

che spesso è riportata come $E^2 = p^2 + m^2$, avendo indicato con p il modulo di \vec{p} e posto $c=1$.

Dalla definizione di quadrimpulso, seguono le relazioni:

- $\gamma = E/mc^2 = \frac{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}}{mc}$
- $\beta = |\vec{p}|c/E$
- $\gamma\beta = |\vec{p}|/mc$
- $K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$

Nell'ultima relazione si è introdotta l'energia cinetica di una particella, vale a dire la differenza tra l'energia totale e l'energia a riposo; si verifica facilmente come, in regime non relativistico ($\beta \ll 1$), K si riduca all'espressione classica dell'energia cinetica:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \simeq (1 + \beta^2/2 - 1)mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

7 Sistemi di riferimento e massa invariante

I due sistemi di riferimento più convenientemente utilizzati sono il sistema del laboratorio ed il sistema del centro di massa.

7.1 Sistema del laboratorio

Il sistema di riferimento del laboratorio è solidale con l'osservatore e con i rivelatori; nel caso di una particella contro un bersaglio, quest'ultimo si trova generalmente in quiete rispetto al sistema del laboratorio. Quindi i quadrimpulsi della particella incidente e della particella del bersaglio sono rispettivamente $\mathbf{P}_1 = [E_1/c, \vec{p}_1]$ e $\mathbf{P}_2 = [m_2c, \vec{0}]$; inoltre il quadrimpulso totale vale $\mathbf{P}_{tot} = [E_1/c + m_2c, \vec{p}_1]$.

7.2 Sistema del centro di massa

Il sistema del centro di massa è definito come il sistema nel quale l'impulso totale è nullo, cioè nel quale sono nulle le tre componenti vettoriali della somma dei quadrimpulsi delle particelle interagenti:

$$\sum_k \vec{p}_k = \vec{p}_{tot} = \vec{0} \quad (22)$$

Nel caso di un sistema isolato costituito da due particelle di ugual massa che si muovono una contro l'altra con uguale velocità, come ad esempio in un collider, il sistema del laboratorio coincide con il sistema del centro di massa. Generalmente però i due riferimenti sono differenti.

Si adotta nel seguito la convenzione per la quale una grandezza riferita al centro di massa porta un asterisco come apice. Nel caso precedente di una particella incidente su un bersaglio, i due quadrimpulsi nel centro di massa sono $\mathbf{P}_1^* = [E_1^*/c, \vec{p}^*]$ e $\mathbf{P}_2^* = [E_2^*/c, -\vec{p}^*]$ mentre il quadrimpulso totale è $\mathbf{P}_{tot}^* = [(E_1^* + E_2^*)/c, \vec{0}]$.

7.3 Massa invariante

Si consideri un sistema di N particelle ognuna con quadrimpulso $\mathbf{P}_k = [E_k/c, \vec{p}_k]$ e sia $\mathbf{P}_{tot} = \sum_k \mathbf{P}_k$ il quadrimpulso totale. L'invariante relativistico legato al prodotto di \mathbf{P}_{tot} per se stesso è definito *massa invariante* del sistema di N particelle ed è indicato con \sqrt{s} :

$$\sqrt{s} = \sqrt{c\mathbf{P}_{tot} \cdot c\mathbf{P}_{tot}} = \sqrt{\left(\sum_k E_k\right)^2 - \left|\sum_k \vec{p}_k\right|^2 c^2} = \sum_k E_k^* = E_{tot}^* \quad (23)$$

perchè nel centro di massa, per definizione, l'impulso totale è nullo. La massa invariante del sistema è anche denominata *energia nel centro di massa*.

Ritornando all'esempio precedente di una particella che incide su un bersaglio, nel quale quindi la particella interagente del bersaglio è ferma rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, la massa invariante delle due particelle è data da:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 c^2} = \sqrt{(E_1 + m_2 c^2)^2 - |\vec{p}_1|^2 c^2} = \\ &= \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 m_2 c^2}\end{aligned}\quad (24)$$

dove abbiamo usato energie ed impulsi riferiti al laboratorio. Nell'ipotesi in cui le masse m_1 ed m_2 siano molto minori di E_1/c^2 , si ha che:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_1 m_2 c^2} \quad (25)$$

Supponiamo ora invece che entrambe le particelle siano in movimento; in questo caso la massa invariante è:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 c^2} = \\ &= \sqrt{E_1^2 - |\vec{p}_1|^2 c^2 + E_2^2 - |\vec{p}_2|^2 c^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2)} = \\ &= \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2(E_1 E_2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| c^2 \cos\theta_{12})}\end{aligned}\quad (26)$$

Facendo di nuovo l'ipotesi che due particelle siano relativistiche, cioè che le masse siano molto minori delle loro energie, la (26) diventa:

$$\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_1 E_2 (1 - \cos\theta_{12})} \quad (27)$$

Se infine le due particelle si scontrano frontalmente, come avviene in un collider, e le loro energie sono uguali, la massa invariante è $\sqrt{s} = 2E$.

La differenza tra un esperimento a bersaglio fisso ed uno a fasci incidenti è evidente; nel caso di un fascio di protoni da 100 GeV su un bersaglio di idrogeno ($m_p \sim m_H \sim 938 \text{ MeV}/c^2$) si ha che $\sqrt{s} \simeq 14 \text{ GeV}$; se il fascio di protoni ha energia 400 GeV, la massa invariante protone-protone è solo 28 GeV, infatti secondo la (25) per raddoppiare l'energia nel centro di massa, e quindi la massa invariante del sistema, occorre un incremento di quattro volte dell'energia della particella incidente. La gran parte dell'energia del protone non è disponibile nell'interazione ma serve a dare impulso al centro di massa delle due particelle. Nel caso invece di urto protone-protone al collider, se i due protoni hanno energie uguali, il centro di massa del sistema resta fermo e

tutta l'energia è disponibile per l'interazione; per avere una massa invariante doppia, è sufficiente raddoppiare l'energia delle particelle incidenti.

Ricaviamo infine l'espressione della velocità del sistema di riferimento del centro di massa rispetto al sistema del laboratorio. Il quadrimpulso totale nel laboratorio è $\mathbf{P}_{tot} = [(\sum_k E_k)/c, \sum_k \vec{p}_k]$ mentre nel centro di massa vale $\mathbf{P}_{tot}^* = [(\sum_k E_k^*)/c, \vec{0}] = [\sqrt{s}/c, \vec{0}]$. Scriviamo quindi la trasformazione di Lorentz (8) dopo aver fissato l'asse x in corrispondenza della direzione di moto del centro di massa in modo che le componenti y e z di $\sum_k \vec{p}_k$ siano nulle.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{s}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{c.m.} & -\beta_{c.m.}\gamma_{c.m.} & 0 & 0 \\ -\beta_{c.m.}\gamma_{c.m.} & \gamma_{c.m.} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\sum_k E_k)/c \\ |\sum_k \vec{p}_k| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$\beta_{c.m.} = \frac{|\sum_k \vec{p}_k|c}{\sum_k E_k} = \frac{|\vec{p}_{tot}^{lab}|c}{E_{tot}^{lab}} \quad (29)$$

e quindi, sostituendo la (29) nella definizione di γ ed utilizzando la (23)⁶:

$$\gamma_{c.m.} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{c.m.}^2}} = \frac{E_{tot}^{lab}}{\sqrt{s}} \quad (30)$$

7.4 Momento trasverso e trasformazione degli angoli

Si consideri il quadrimpulso di una particella nel passaggio dal sistema del centro di massa al sistema del laboratorio, ipotizzando per semplicità che il centro di massa si muova parallelamente all'asse z come in figura 3 e che quindi la trasformazione di Lorentz sia lungo quest'asse; si ha quindi:

$$\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ |\vec{p}| \sin\theta \cos\phi \\ |\vec{p}| \sin\theta \sin\phi \\ |\vec{p}| \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^* \\ |\vec{p}^*| \sin\theta^* \cos\phi^* \\ |\vec{p}^*| \sin\theta^* \sin\phi^* \\ |\vec{p}^*| \cos\theta^* \end{pmatrix} \quad (31)$$

⁶Nel caso di un decadimento di una particella in volo nel laboratorio, le (29) e (30) sono evidenti considerando che il sistema di riferimento del centro di massa coincide con il riferimento solidale alla particella prima che essa decada e che la sua massa coincide con la massa invariante del sistema.

dove β e γ sono relative al centro di massa ($\beta_{c.m.}$ e $\gamma_{c.m.}$ introdotte nel paragrafo precedente).

Il *momento trasverso*, cioè la componente del momento perpendicolare all'asse z , è un invariante relativistico. Infatti elevando al quadrato ambo i membri delle componenti x ed y del sistema (31) e sommando si ha:

$$|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = |\vec{p}^*|^2 \sin^2 \theta^* (\cos^2 \phi^* + \sin^2 \phi^*) \quad (32)$$

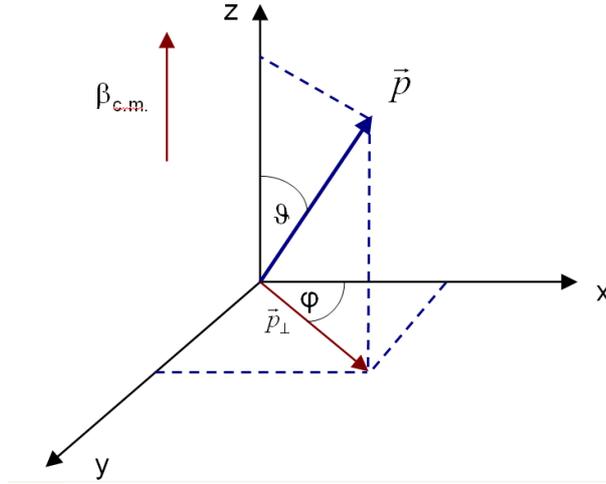


Figura 3: Rappresentazione dell'angolo polare θ e dell'angolo azimutale ϕ relativi all'impulso nel sistema del laboratorio.

e dato che $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \theta^* \leq \pi$:

$$p_{\perp} = |\vec{p}| \sin \theta = |\vec{p}^*| \sin \theta^* = p_{\perp}^* \quad (33)$$

Sostituendo la (33) nelle componenti x e y del sistema (31) si ottengono le uguaglianze $\cos \phi = \cos \phi^*$ e $\sin \phi = \sin \phi^*$; si conclude quindi che l'angolo azimutale ϕ attorno ad un asse è un invariante relativistico per trasformazioni di Lorentz lungo l'asse stesso.

Determiniamo infine la relazione tra l'angolo θ nei due sistemi di riferimento dividendo la componente y di (31) per la componente z ; data l'uguaglianza $\phi = \phi^*$ si ottiene:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta^*}{\gamma_{c.m.} (\beta_{c.m.} E^* / |\vec{p}^*| + \cos \theta^*)} \quad (34)$$

La velocità della particella nel centro di massa, $\beta^* = |\vec{p}^*|/E^*$, è indipendente da $\beta_{c.m.}$.

Analizziamo separatamente i seguenti casi:

- $\beta_{c.m.} > \beta^*$
il denominatore della (34) è sempre positivo qualsiasi sia l'angolo θ^* ($0 \leq \theta^* \leq \pi$); quindi $0 \leq \theta < \pi/2$ cioè la particella, nel sistema del laboratorio, si muove sempre *in avanti*.

Essendo $\theta = 0$, sia per $\theta^* = 0$ sia per $\theta^* = \pi$, deve esistere, nel sistema del laboratorio, un angolo $\theta_{max} < \pi/2$, angolo che può essere determinato annullando la derivata della (34):

$$\frac{d(tg\theta)}{d\theta^*} = \frac{1 + \cos\theta^* (\beta_{c.m.}/\beta^*)}{\gamma_{c.m.} (\beta_{c.m.}/\beta^* + \cos\theta^*)^2} = 0 \quad (35)$$

In corrispondenza di $\cos\theta^* = -\beta^*/\beta_{c.m.}$, si ha quindi l'angolo massimo nel laboratorio:

$$tg\theta_{max} = \frac{\beta^*}{\gamma_{c.m.} \sqrt{\beta_{c.m.}^2 - (\beta^*)^2}} \quad (36)$$

L'energia della particella è quindi:

$$\begin{aligned} E(\theta_{max}) &= \gamma_{c.m.} (E^* + \beta_{c.m.} |\vec{p}^*| \cos\theta^*) = \gamma_{c.m.} (E^* - |\vec{p}^*| \beta^*) = \\ &= \gamma_{c.m.} \left(E^* - \frac{|\vec{p}^*|^2}{E^*} \right) = m^2 \left(\frac{\gamma_{c.m.}}{E^*} \right) = m \frac{\gamma_{c.m.}}{\gamma^*} \end{aligned} \quad (37)$$

che ovviamente non corrisponde all'energia massima.

- $\beta_{c.m.} < \beta^*$
contrariamente al caso precedente, in questo caso la velocità della particella nel centro di massa può annullare il boost del centro di massa stesso, ammettendo nel laboratorio angoli $\theta > \pi/2$; dalla (34) si trova che $\theta = \pi/2$ quando $\cos\theta^* = -\beta_{c.m.}/\beta^*$. Inoltre non esiste un angolo θ_{max} essendo la derivata (35) sempre positiva.
- $\beta_{c.m.} = \beta^*$
in questo caso limite, $\cos\theta^* = -1$ corrisponde nel laboratorio all'angolo θ_{max} che è proprio $\pi/2$. È interessante notare come in questa configurazione la particella, che nel centro di massa viaggia in direzione opposta al moto del centro di massa stesso ($\theta^* = -\pi$), sia invece in quiete nel sistema del laboratorio; infatti il suo β^* annulla esattamente il boost del centro di massa.

8 Energia di Soglia di una Reazione

Nel caso di un urto, come quello rappresentato in figura 4, tra una particella incidente ed un bersaglio fisso, con produzione di n particelle nello stato finale, si definisce *energia di soglia* della reazione, l'energia cinetica K_i della particella incidente in corrispondenza della quale le particelle dello stato finale siano prodotte in quiete nel sistema del centro di massa. L'energia nel centro di massa, calcolata per lo stato finale, è:

$$\sqrt{s} = \sum_{f=1}^n (K_f^* + m_f c^2) \quad (38)$$

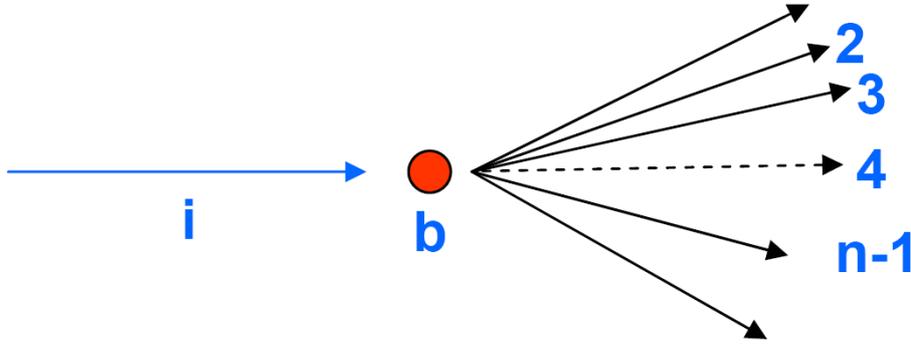


Figura 4: Urto di una particella incidente su un bersaglio con produzione di n particelle nello stato finale.

L'espressione analoga per lo stato iniziale è:

$$\begin{aligned} s &= (E_i + m_b c^2)^2 - |\vec{p}_i|^2 c^2 = 2m_b c^2 E_i + m_i^2 c^4 + m_b^2 c^4 = \\ &= 2m_b c^2 K_i + (m_i + m_b)^2 c^4 \end{aligned} \quad (39)$$

Uguagliando le due espressioni dell'energia nel centro di massa si ha:

$$K_i = \frac{\left[\sum_{f=1}^n (K_f^* + m_f c^2) \right]^2 - (m_i + m_b)^2 c^4}{2m_b c^2} \geq \frac{\left(\sum_{f=1}^n m_f \right)^2 - (m_i + m_b)^2}{2m_b} c^2 \quad (40)$$

Nel caso in cui l'espressione a destra nella disuguaglianza sia positiva, quando cioè la somma delle masse delle particelle nello stato finale sia maggiore

della somma tra massa della particella incidente e la massa del bersaglio, si definisce l'energia (cinetica) di soglia come:

$$(K_i)_{soglia} = \frac{\left(\sum_{f=1}^n m_f\right)^2 - (m_i + m_b)^2}{2m_b} c^2 \quad (41)$$

altrimenti il processo è sempre cinematicamente permesso perchè non esiste una energia di soglia.

Consideriamo un fascio di protoni su un bersaglio di idrogeno e calcoliamo l'energia di soglia per la produzione di un antiprotone; la reazione con il minor numero di protoni nello stato finale è, per la conservazione del numero barionico, $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.

Applicando la (41) si ha:

$$(K_i)_{soglia} = \frac{(4m_p)^2 - (2m_p)^2}{2m_p} c^2 = 6m_p c^2 \simeq 5.6 \text{ GeV}$$

Abbiamo qui considerato il protone dell'idrogeno come un bersaglio fermo rispetto al laboratorio; l'energia di soglia di produzione dell'antiprotone è, in realtà più bassa, quando si considera l'impulso di Fermi⁷ dei protoni all'interno di un nucleo.

⁷l'impulso di Fermi è l'impulso caratteristico dei protoni in un nucleo (visto come un gas di Fermi) e vale circa 250 MeV/c

9 Scattering Elastico

In un evento di scattering elastico (diffusione elastica) tra un elettrone ed un nucleo, nel quale il nucleo è inizialmente a riposo, come rappresentato in figura 5, la conservazione del quadrimpulso totale implica che:

$$\mathbf{p} + \mathbf{P} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}' \quad (42)$$

e cioè che la somma tra i quadrimpulsi iniziali, che nel sistema del laboratorio sono $\mathbf{p} = [E, \vec{p}]$ e $\mathbf{P} = [M, \vec{0}]$, e quelli finali, $\mathbf{p}' = [E', \vec{p}']$ e $\mathbf{P}' = [E'_P, \vec{P}']$, siano uguali⁸.

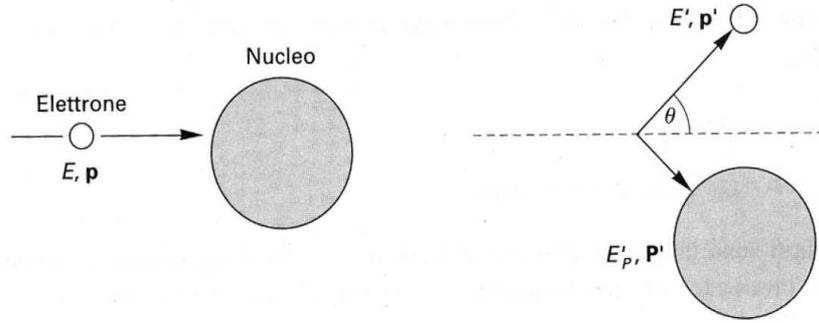


Figura 5: Scattering elastico di un elettrone su un nucleo

Considerando che, nel caso di urto elastico, le particelle dello stato iniziale e quelle dello stato finale sono le stesse e quindi $\mathbf{p}^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m_e^2 = \mathbf{p}'^2$ e $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}'^2 = M^2$, se si elevano al quadrato entrambi i membri della (42), si ottiene:

$$m_e^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{P} + M^2 = m_e^2 + 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}' + M^2 \implies \mathbf{p} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}' \quad (43)$$

Sperimentalmente viene misurato solo l'elettrone nello stato finale mentre il nucleo che rincula non è rivelato, per cui conviene scrivere la (43) come:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{P} - \mathbf{p}') = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{P} - m_e^2 \quad (44)$$

che nel sistema del laboratorio diventa:

$$EM = EE' - \vec{p} \cdot \vec{p}' + E'M - m_e^2 \quad (45)$$

⁸abbiamo indicato con E'_P l'energia di rinculo del nucleo dopo l'urto e posto, qui e nel seguito, $c=1$ per non appesantire troppo il testo.

Se le energie in gioco sono abbastanza elevate da poter trascurare m_e^2 , si ricava infine l'espressione che, nel sistema di riferimento solidale col laboratorio, lega l'energia dell'elettrone diffuso all'energia iniziale, alla massa del nucleo e all'angolo di diffusione, che in figura 5 abbiamo indicato con θ :

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos\theta)} \quad (46)$$

Per un fissato bersaglio quindi l'energia dell'elettrone diffuso dipende unicamente dall'angolo di diffusione; negli urti anelastici invece questa dipendenza univoca non esiste. Dalla (46) si deduce anche che l'energia di rinculo del nucleo, pari a $(E - E')$, dipende dal rapporto E/M ed in particolare cresce al crescere dell'energia iniziale dell'elettrone rispetto alla massa del nucleo, in analogia alla meccanica classica. Questo fatto è visualizzato dai due casi estremi rappresentati in figura 6: se un elettrone di 500 MeV viene diffuso su un nucleo di massa atomica $A = 50$, nella configurazione di massimo rinculo ($\theta=180^\circ$) solo il 2% dell'energia dell'elettrone viene trasferita al nucleo, mentre un elettrone di 10 GeV su un nucleo di idrogeno trasmette fino al 95.5% della sua energia al protone.

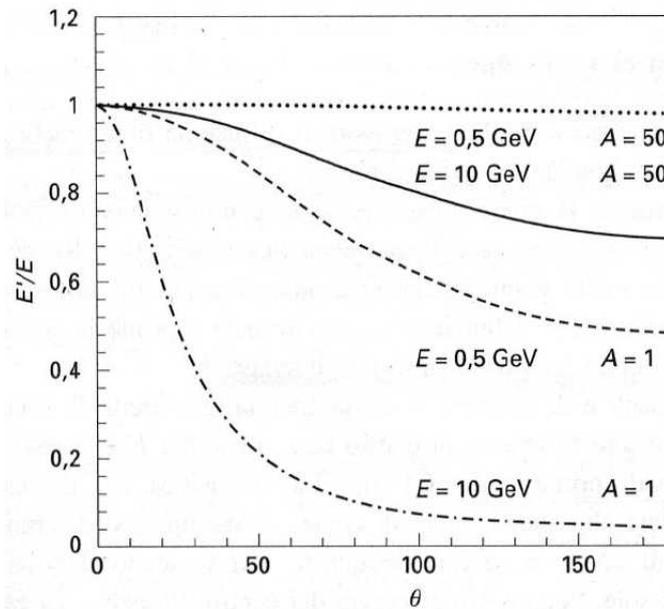


Figura 6: Frazione di energia iniziale conservata dall'elettrone diffuso in funzione dell'angolo di diffusione, per energie di 0.5 e 10 GeV e per nuclei di $A=1$ e $A=50$.

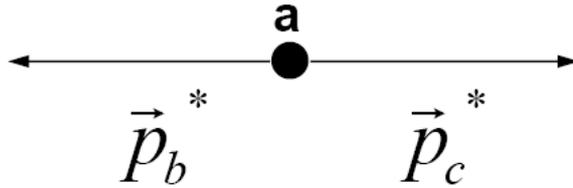
10 Decadimento in due corpi

Si consideri il decadimento di una particella di massa M in n particelle di massa rispettivamente m_1, m_2, \dots, m_n . Nel sistema di riferimento del centro di massa la particella, prima di decadere, è naturalmente in quiete e quindi possiamo scrivere la conservazione dell'energia come:

$$M = \sum_{i=1}^n E_i^* = \sum_{i=1}^n \sqrt{(p_i^*)^2 + m_i^2} \geq \sum_{i=1}^n m_i \quad (47)$$

Affinchè il decadimento sia cinematicamente permesso, la somma delle masse delle particelle figlie non deve mai superare la massa della particella che decade.

Consideriamo ora il decadimento in due corpi $a \rightarrow b + c$.



$$\begin{aligned} M_a &= \sqrt{s} = E_b^* + E_c^* \\ \vec{0} &= \vec{p}_b^* + \vec{p}_c^* \end{aligned} \quad (48)$$

da cui $|\vec{p}_b^*| = |\vec{p}_c^*|$ (valore che nel seguito viene indicato con p^*). La prima delle (48) può essere riscritta nel modo seguente:

$$M_a = \sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} + \sqrt{(p^*)^2 + m_c^2} \quad (49)$$

portando la prima radice a sinistra ed elevando al quadrato:

$$M_a^2 + (p^*)^2 + m_b^2 - 2M_a \sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} = (p^*)^2 + m_c^2 \quad (50)$$

cioè:

$$M_a^2 + m_b^2 - m_c^2 = 2M_a \sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} \quad (51)$$

che al quadrato diventa:

$$M_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 + 2M_a^2(m_b^2 - m_c^2) = 4M_a^2 [(p^*)^2 + m_b^2] \quad (52)$$

Il modulo dell'impulso delle particelle finali nel centro di massa è quindi univocamente determinato a partire dalla massa della particella che decade e dalle due masse delle particelle figlie:

$$p^* = \frac{\sqrt{M_a^4 + (m_b^2 - m_c^2)^2 - 2M_a^2(m_b^2 + m_c^2)}}{2M_a} \quad (53)$$

Utilizzando la (53) si ricava l'espressione delle energie delle particelle prodotto del decadimento:

$$\begin{aligned} E_b^* &= \sqrt{(p^*)^2 + m_b^2} = \frac{M_a^2 + (m_b^2 - m_c^2)}{2M_a} = \frac{s + (m_b^2 - m_c^2)}{2\sqrt{s}} \\ E_c^* &= \sqrt{(p^*)^2 + m_c^2} = \frac{M_a^2 - (m_b^2 - m_c^2)}{2M_a} = \frac{s - (m_b^2 - m_c^2)}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (54)$$

Il decadimento è *monoenergetico* in quanto l'energia delle particelle b e c, nel centro di massa, può assumere un solo valore. Un decadimento a tre corpi invece non è monoenergetico; l'esistenza del neutrino è stata ipotizzata proprio osservando la distribuzione continua dell'energia dell'elettrone nel decadimento del neutrone ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$).

Notiamo che, dal punto di vista della cinematica, il decadimento, nel sistema del centro di massa, è isotropo, vale a dire non esiste una direzione preferenziale per le particelle figlie⁹; la direzione però di una particella di decadimento rispetto all'altra è fissata dalla conservazione dell'impulso: le due particelle sono emesse *back-to-back* nel sistema del centro di massa.

Nel caso particolare in cui le masse di b e c siano uguali ($m_b = m_c = m$), anche le relative energie, sempre nel sistema del centro di massa, saranno uguali: $E_b^* = E_c^* = M_a/2$; inoltre $p^* = \sqrt{(M_a/2)^2 - m^2}$.

Se la particella decade in volo, come nel caso di pioni e kaoni nella produzione di fasci di muoni e di neutrini, il centro di massa non coincide con il sistema del laboratorio. Nel laboratorio le due particelle non sono emesse in direzioni opposte ma, utilizzando la (34), ad angoli:

$$tg\theta_{b/c} = \frac{sin\theta^*}{\gamma_a (\beta_a E_{b/c}^*/p^* \pm cos\theta^*)} \quad (55)$$

dove $\beta_a = |\vec{p}_a|/E_a$ e $\gamma_a = E_a/M_a$; il segno + vale per la particella b emessa nel centro di massa ad un angolo θ^* rispetto alla direzione di moto di a (in una configurazione analoga a quella di figura 7) mentre si ha il segno - per

⁹l'isotropia è limitata alla cinematica; una direzione privilegiata può esistere ad esempio nel caso in cui la particella che decade abbia uno spin non nullo.

la particella c , emessa ad un angolo $(\pi - \theta^*)$. Sostituendo p^* e $E_{b/c}^*$ con le (53) e (54), si determinano gli angoli di decadimento nel laboratorio.

Valgono tutte le considerazioni fatte nel paragrafo 7.4, considerazioni che qui vengono riassunte brevemente:

- se $\beta_a > \beta_i^*$, la particella figlia i è emessa, nel sistema del laboratorio, sempre in avanti (rispetto alla direzione della particella che decade) ed esiste un angolo massimo di emissione $\theta_{max} < \pi/2$ corrispondente nel centro di massa a $\theta_i^* = \arccos(-\beta_i^*/\beta_a)$
- se $\beta_a < \beta_i^*$, la particella figlia i è emessa in avanti, nel sistema del laboratorio, solo quando $\cos\theta_i^* > -\beta_a/\beta_i^*$; per $\cos\theta_i^* = -\beta_a/\beta_i^*$ viene emessa a $\theta_i = \pi/2$ mentre per $\cos\theta_i^* < -\beta_a/\beta_i^*$ viene emessa all'indietro (fino a $\theta_i = \pi$ quando $\theta_i^* = \pi$).

10.1 Decadimento del π_0 in due fotoni

Il π_0 è un mesone neutro, privo di spin, di massa $m_{\pi_0} = 135$ MeV e vita media $\tau_{\pi_0} = 8.4 \cdot 10^{-17}$ s ($c\tau_{\pi_0} = 25$ nm); in quasi il 99% dei casi questa particella decade in due fotoni costituendo un ottimo esempio di decadimento in due particelle uguali, esempio che verrà quindi analizzato in dettaglio in questo paragrafo.

Nel decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ i due fotoni sono emessi, nel sistema di riferimento del centro di massa, lungo direzioni opposte ($\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$) e con energie uguali $E_1^* = E_2^* = m_{\pi_0}/2$.

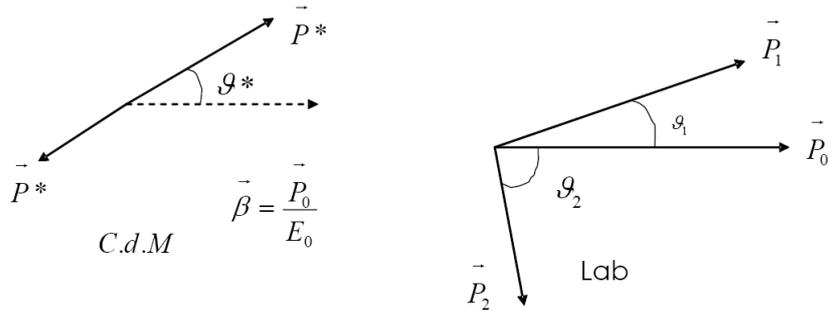


Figura 7: Cinematica del decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ nel sistema di riferimento del centro di massa e nel laboratorio.

Se \vec{p}_0 è l'impulso del π_0 nel sistema del laboratorio, $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ l'angolo tra i due fotoni (figura 7) e $E_i = |\vec{p}_i|$ ($i=1,2$), dall'espressione della massa invariante (27) si ha:

$$\sqrt{s} = m_{\pi_0} = \sqrt{2E_1E_2(1 - \cos\alpha)} \quad (56)$$

che, utilizzando la relazione trigonometrica $\cos(2x) = 1 - \sin^2x$, può essere scritta esplicitando l'angolo compreso tra i due fotoni:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m_{\pi_0}}{2\sqrt{E_1E_2}} \quad (57)$$

Massimizzando il prodotto delle energie dei due fotoni E_1E_2 si ottiene perciò l'angolo minimo di apertura tra di essi:

$$\frac{d(E_1E_2)}{dE_1} = \frac{d(E_1(E_0 - E_1))}{dE_1} = E_0 - 2E_1 = 0$$

Nella configurazione di equipartizione dell'energia del π_0 tra i due fotoni ($E_1 = E_2 = E_0/2$) si ha quindi l'apertura angolare minima:

$$\sin(\alpha_{min}/2) = m_{\pi_0}/E_{\pi_0}.$$

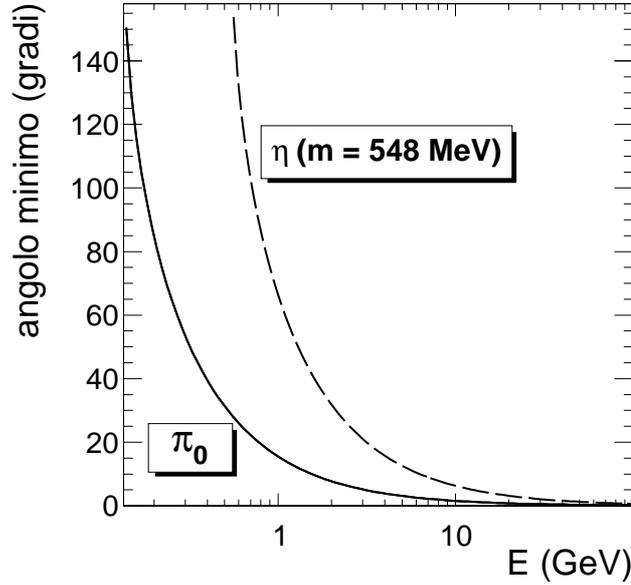


Figura 8: Angolo di apertura α_{min} tra i due fotoni, nel sistema di riferimento del laboratorio, in funzione dell'energia del π_0 . La linea tratteggiata rappresenta l'angolo di apertura minimo per il decadimento $\eta \rightarrow \gamma\gamma$.

La figura 8 mostra l'angolo di apertura α_{min} in funzione dell'energia della particella che decade per i decadimenti $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ e $\eta \rightarrow \gamma\gamma$. Anche la particella η è un mesone neutro, di spin 0; la sua massa è pari a 548 MeV. L'angolo minimo tra i due fotoni è 15° (66°) per un π_0 (η) di 1 GeV e si riduce a 1.5° (6.3°) per un π_0 (η) di 10 GeV. Si noti che per particelle relativistiche ($E \gg m$) vale l'approssimazione $\sin(x) \simeq x$ e quindi:

$$\alpha_{min}(rad) \simeq \frac{2m}{E}$$

Ricaviamo ora la distribuzione di energia dei due fotoni nel sistema di riferimento del laboratorio (nel centro di massa i due fotoni sono monoenergetici avendo sempre un'energia pari alla metà della massa del π_0). Fissiamo i due sistemi di riferimento in modo tale che l'asse x sia parallelo alla direzione di moto del π_0 (quindi parallelo a \vec{p}_0 in figura 7) e l'asse y sul piano della figura; utilizzando le trasformazioni di Lorentz (11) per esprimere il quadrimpulso del primo fotone nel sistema del laboratorio rispetto al sistema del centro di massa:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma(E_1^* + \beta p_{1x}^*) = \gamma(E^* + \beta p^* \cos\theta^*) \\ p_{1x} &= \gamma(p_{1x}^* + \beta E^*) = \gamma(p^* \cos\theta^* + \beta E^*) \\ p_{1y} &= p_{1y}^* = p^* \sin\theta^* \end{aligned} \quad (58)$$

dove $\beta = |\vec{p}_0|/E_0$, $\gamma = E_0/m_{\pi_0}$ e si è omessa la componente z perchè nulla in entrambi i riferimenti. Per il secondo fotone basta sostituire θ^* con $(\pi + \theta^*)$. Sostituendo le espressioni di β e γ nella prima delle (58):

$$E_1 = \gamma(E^* + \beta p^* \cos\theta^*) = \frac{E_0}{m_{\pi_0}} \frac{m_{\pi_0}}{2} \left(1 + \frac{|\vec{p}_0|}{E_0} \cos\theta^* \right) = \frac{E_0 + |\vec{p}_0| \cos\theta^*}{2} \quad (59)$$

Sostituendo θ^* con $(\pi + \theta^*)$ si ha invece:

$$E_2 = \frac{E_0 - |\vec{p}_0| \cos\theta^*}{2} \quad (60)$$

In generale l'energia dei fotoni varierà da un massimo di $(E_0 + |\vec{p}_0|)/2 = E_0(1 + \beta)/2$ per $\theta^* = 0$ cioè con il fotone emesso nella direzione di moto del π_0 , ad un minimo di $(E_0 - |\vec{p}_0|)/2 = E_0(1 - \beta)/2$ per $\theta^* = \pi$ (e $\theta = \pi$).

I valori di energia del fotone nel laboratorio, compresi tra il minimo ed il massimo, sono equiprobabili. Per dimostrarlo osserviamo prima di tutto che, essendo il π_0 una particella di spin zero, i fotoni nel sistema di riferimento del centro di massa sono emessi isotropicamente. La distribuzione di probabilità angolare non dipende dall'angolo solido di emissione ($df/d\Omega^* = 1/4\pi$) ed è

quindi uniforme in $\cos(\theta^*)$: infatti $\int_{\phi^*} d\Omega^* = \int_{\phi^*} \sin\theta^* d\theta^* d\phi^* = 2\pi d(\cos\theta^*)$ e $df/d(\cos\theta^*) = 1/2$. Facendo uso della (59) possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dE_1} f(\cos\theta^*(E_1)) = \frac{df}{d(\cos\theta^*)} \cdot \frac{d(\cos\theta^*)}{dE_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|\vec{p}_0|} = \frac{1}{|\vec{p}_0|} \quad (61)$$

La distribuzione di energia nel sistema del laboratorio è costante (figura 9).

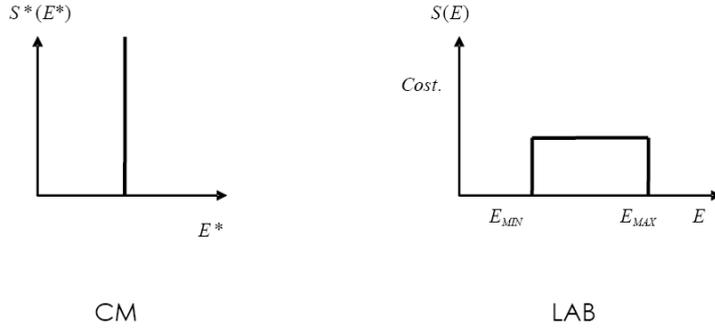


Figura 9: Distribuzione di energia dei fotoni nel decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$ nel sistema di riferimento del centro di massa e nel laboratorio.

Mostriamo infine come la configurazione di decadimento ad angolo minimo vista precedentemente, configurazione nella quale l'energia dei due fotoni è uguale, sia anche la configurazione più probabile, cioè quella corrispondente al massimo della funzione di distribuzione angolare $df/d\alpha$, dove α è l'angolo compreso tra i due fotoni nel sistema del laboratorio. La relazione (57) può essere riscritta nel modo seguente:

$$4E_1(E_0 - E_1) = \frac{m_{\pi_0}^2}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (62)$$

e risolvendo in E_1 :

$$E_1 = \frac{E_0 \pm \sqrt{E_0^2 - m_{\pi_0}^2 / \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{2} \quad (63)$$

dove va considerato il segno $+$ ($-$) nel caso in cui γ_1 sia il fotone più (meno) energetico vale a dire $E_1 > E_0/2$ ($E_1 < E_0/2$). Differenziando:

$$\frac{dE_1}{d\alpha} = \frac{m_{\pi_0}^2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{E_0^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - m_{\pi_0}^2}} \quad (64)$$

Infine, utilizzando la (61) ricavata precedentemente, si ha:

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{dE_1} \cdot \frac{dE_1}{d\alpha} = \frac{m_{\pi_0}^2}{4|\vec{p}_0|E_0} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - m_{\pi_0}^2/E_0^2}} \quad (65)$$

Ne segue che la configurazione di decadimento più probabile sia quella con il minimo angolo di apertura tra i due fotoni.

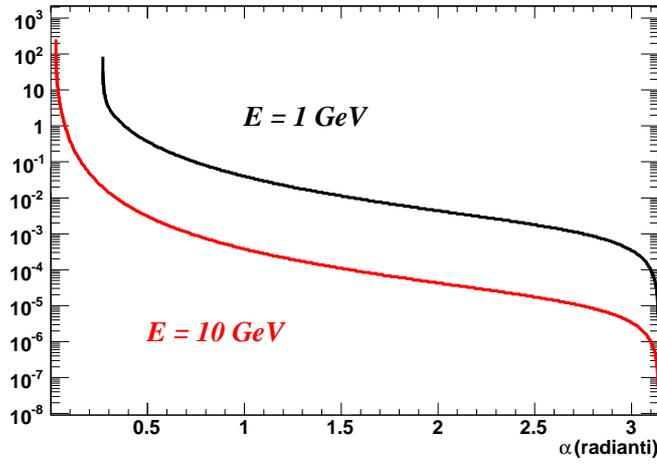


Figura 10: Distribuzione di probabilità dell'angolo compreso tra i due fotoni nel decadimento $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$, nel sistema di riferimento del laboratorio, per due diverse energie del π_0 . Si può notare come l'angolo minimo, che cresce al diminuire dell'energia del π_0 , corrisponda al massimo della distribuzione di probabilità.

Indice

1	Richiami sulla Relatività Ristretta	1
2	L'esperimento di Michelson-Morley	2
3	Quadrivettori e Trasformazioni di Lorentz	4
4	Cono di luce e simultaneità di due eventi	7
5	Composizione delle velocità	9
6	Il quadrivettore energia-impulso	10
7	Sistemi di riferimento e massa invariante	11
7.1	Sistema del laboratorio	11
7.2	Sistema del centro di massa	11
7.3	Massa invariante	11
7.4	Momento trasverso e trasformazione degli angoli	13
8	Energia di Soglia di una Reazione	16
9	Scattering Elastico	18
10	Decadimento in due corpi	20
10.1	Decadimento del π_0 in due fotoni	22

Raccolta di Esercizi di Cinematica Relativistica

riccardo.paramatti@roma1.infn.it

17 aprile 2011

Esercizio 1:

Calcolare la vita media di un π^+ in un sistema di riferimento nel quale l'impulso del pione è pari a 100 GeV/c.

Si ricorda che la massa e la vita media propria del π^+ sono rispettivamente $m(\pi^+) = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ e $\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

In un dato sistema di riferimento, la vita media di una particella si dilata di un fattore γ rispetto alla sua vita media propria; γ è dato dal rapporto tra l'energia della particella in quel sistema di riferimento e la sua massa. Si ha quindi:

$$\tau = \gamma \cdot \tau_0 = \frac{E_\pi}{m_\pi} \cdot \tau_0 = \frac{\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}}{m_\pi} \cdot \tau_0 \approx 716 \cdot \tau_0 = 18.6 \mu\text{s}$$

La particella, in virtù dell'alto valore di γ , è in un regime detto ultrarelativistico; in queste condizioni infatti $E \approx p$.

Esercizio 2:

La vita media di una particella viene a volte riportata in termini spaziali come $d_\tau = c \cdot \tau_0$; nel caso del muone $d_\tau = 659 \text{ m}$. Che impulso deve avere il muone affinché d_τ sia pari alla distanza media percorsa prima di decadere?

Si ricorda che la massa del muone è $m(\mu) = 105.7 \text{ MeV}/c^2$

$$d = v \cdot \tau = (\beta c) \cdot (\gamma \tau_0) = \frac{p_\mu}{m_\mu c} \cdot d_\tau$$

Quindi $d = d_\tau$ quando l'impulso vale $p_\mu = m_\mu \cdot c = 105.7 \text{ MeV}/c$.

Esercizio 3:

- 1. Determinare la vita media di un mesone π^+ che viaggia con velocità $\beta = 0.73$, sapendo che la vita media propria è $\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.*
- 2. Qual'è la distanza percorsa in media?*
- 3. Quanto sarebbe senza effetti relativistici?*
- 4. Quanti π^+ sopravvivono dopo 10 m?*

$$1) \tau = \gamma \cdot \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tau_0 = 1.463 \cdot \tau_0 = 38 \text{ ns}$$

$$2) d = v \cdot \tau = \beta c \gamma \tau_0 = 8.3 \text{ m}$$

$$3) d_{\text{classica}} = v \cdot \tau_0 = d / \gamma = 5.7 \text{ m}$$

$$4) \frac{N(t)}{N_0} = e^{-t/\gamma\tau_0} = e^{-L/\beta c \gamma \tau_0} = 30\%$$

Esercizio 4:

Nei laboratori, fasci di particelle di vita media nota τ_0 vengono trasportati, prima di decadere, a distanze molte volte superiori al limite classico della distanza di decadimento $c \cdot \tau_0$.

Si consideri un fascio di pioni carichi, prodotti con impulsi di 200 GeV/c mediante interazione su un bersaglio. Quale è la perdita di intensità del fascio a distanza $L = 300$ m dal bersaglio ?

Si ricorda che $m(\pi^\pm) = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ e $\tau_0(\pi^\pm) = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

La perdita di intensità del fascio è data da:

$$1 - \frac{N(t)}{N_0} = 1 - e^{-t/\gamma\tau_0} = 1 - e^{-L/\beta c\gamma\tau_0}$$

I pioni sono ultrarelativistici, infatti $\beta\gamma = p/m = 1433$. Considerato che $c \cdot \tau_0 = 7.8$ m, la perdita di intensità del fascio dopo 300 m è pari al 2.7%.

Esercizio 5:

1) A quale velocità l'energia cinetica di una particella è pari alla sua energia a riposo ?

2) Che velocità deve avere una palla di cannone da 1 kg affinché la sua energia cinetica sia pari a quella di un protone con $\gamma = 10^{11}$?

1) L'energia totale di una particella, esprimibile come $E = \gamma \cdot mc^2$, è la somma della sua energia cinetica K più la sua energia a riposo mc^2 . Quindi si ha:

$$K = (\gamma - 1) \cdot mc^2 = mc^2$$

quando $\gamma = 2$, da cui $\beta = 0.86$ e $v = 258000 \text{ km/s}$.

2) Un protone con $\gamma = 10^{11}$ ha una energia cinetica pari a:

$$K \approx E = \gamma \cdot mc^2 \approx 10^{20} \text{ eV} \approx 16 \text{ Joule}$$

La velocità della palla di cannone è allora:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \approx 5.6 \text{ m/s}$$

Esercizio 6:

La particella J/Ψ può essere prodotta sia in urti protone-protone sia in urti elettrone-positrone. Calcolare l'energia minima di:

5. un fascio di protoni incidente su di un bersaglio fisso di idrogeno, per dar luogo alla reazione $p + p \rightarrow p + p + J/\Psi$

6. un fascio di elettroni ed un fascio di positroni di energia identica, per dar luogo alla reazione $e^- + e^+ \rightarrow J/\Psi$

Si ricorda che $m(J/\Psi) = 3097 \text{ MeV}/c^2$.

1) La risoluzione del problema è facilitata calcolando la massa invariante in due sistemi di riferimento diversi. I quadrimpulsi dei due protoni nello stato iniziale sono, nel sistema del laboratorio, $\mathbf{P}_1 = [E_1, \vec{p}_1]$ e $\mathbf{P}_2 = [m_p, \vec{0}]$.

La massa invariante è quindi $\sqrt{s} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_1m_p}$

L'energia minima del protone, o energia di soglia, è quella per la quale le particelle finali sono, nel sistema del centro di massa, tutte a riposo, e quindi in questo riferimento $\sqrt{s} = 2m_p + m_{J/\Psi}$

Uguagliando le due espressioni per la massa invariante:

$$E_1 = \frac{2m_p^2 + m_{J/\Psi}^2 + 4m_p m_{J/\Psi}}{2m_p} = 12.24 \text{ GeV}$$

Si ottiene lo stesso risultato aggiungendo l'energia a riposo del protone (m_p) all'espressione dell'energia cinetica di soglia (eq. 33 pag 14).

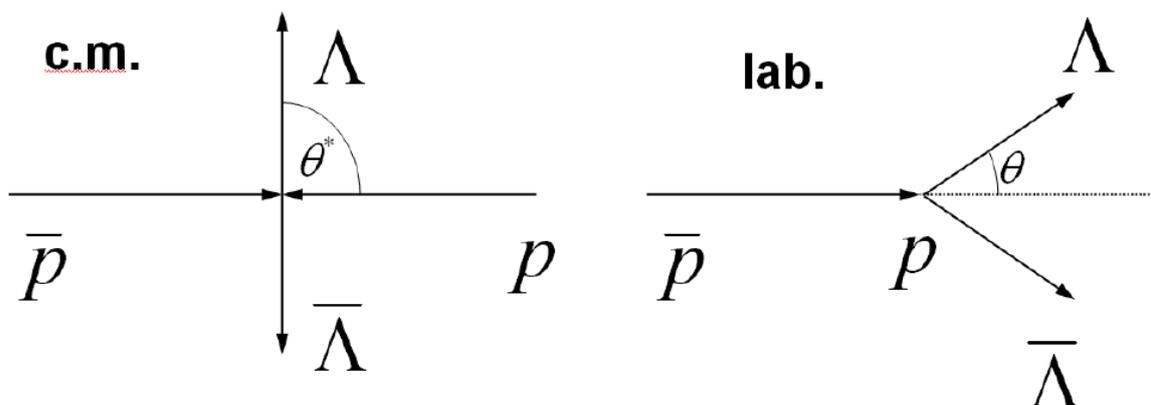
2) Ancora, l'energia minima di produzione è quella per la quale la J/Ψ è a riposo. In questo caso il sistema del laboratorio coincide con il sistema nel centro di massa e la massa invariante del sistema vale $\sqrt{s} = 2E_e = m_{J/\Psi}$, da cui $E_e = 1.55 \text{ GeV}$.

Esercizio 7:

Si consideri il processo nel quale un antiprotone di impulso $2.2 \text{ GeV}/c$ interagisca con un protone fermo nel laboratorio, dando luogo al processo $\bar{p} + p \rightarrow \Lambda + \bar{\Lambda}$.

A. Nel caso di produzione simmetrica, in cui le particelle Λ e $\bar{\Lambda}$ sono prodotte nel sistema del centro di massa ad un angolo rispetto alla direzione dell'antiprotone incidente, come in figura, si calcoli:

1. l'impulso p^* e l'energia E^* delle particelle Λ e $\bar{\Lambda}$ nel centro di massa
2. l'impulso e l'energia delle particelle Λ e $\bar{\Lambda}$ nel laboratorio
3. l'angolo θ formato dall'impulso della particella Λ con la direzione dell'antiprotone incidente nel sistema del laboratorio
4. il cammino medio di decadimento della Λ nel laboratorio.



B. Si supponga ora che le particelle Λ e $\bar{\Lambda}$ vengano emesse nel centro di massa rispettivamente a $\theta^* = 0^\circ$ e $\theta^* = 180^\circ$. Qual è l'angolo θ formato dall'impulso delle particelle nel laboratorio?

C. Si può avere emissione a 90° nel laboratorio?

D. Calcolare l'angolo massimo di emissione delle Λ nel laboratorio.

Si ricorda che la massa del protone vale $938 \text{ MeV}/c^2$ mentre $m_\Lambda = 1116 \text{ MeV}/c^2$ e $\tau_\Lambda = 2.63 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

A.1) La massa invariante \sqrt{s} calcolata nel centro di massa e nello stato finale è pari a $E_{\Lambda}^* + E_{\bar{\Lambda}}^* = 2E_{\Lambda}^*$, infatti le due particelle hanno ugual massa e impulsi uguali e opposti nel centro di massa. Quindi, utilizzando l'espressione \sqrt{s} nel laboratorio:

$$E_{\Lambda}^* = \frac{\sqrt{s}}{2} = \frac{\sqrt{2m_p^2 + 2E_{\bar{p}}m_p}}{2} = \frac{m_p\sqrt{1+\gamma_{\bar{p}}}}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma_{\bar{p}} = \frac{\sqrt{m_p^2 + p_{\bar{p}}^2}}{m_p} = 2.55$$

e quindi $E_{\Lambda}^* = E_{\bar{\Lambda}}^* = 1.25 \text{ GeV}$ e $p_{\Lambda}^* = p_{\bar{\Lambda}}^* = \sqrt{E_{\Lambda}^{*2} - m_{\Lambda}^2} = 0.56 \text{ GeV}/c$.

A.2) La produzione di Λ e $\bar{\Lambda}$ è simmetrica anche nel sistema del laboratorio, anche se con un angolo θ diverso da θ^* (si veda il paragrafo 7.4 a pag 13). Applicando la conservazione dell'energia e dell'impulso nel sistema del laboratorio:

$$E_{\bar{p}} + m_p = E_{\Lambda} + E_{\bar{\Lambda}} = 2E_{\Lambda}$$

$$p_{\bar{p}} = 2p_{\parallel\Lambda}$$

$$p_{\perp\Lambda} = -p_{\perp\bar{\Lambda}}$$

da cui:

$$E_{\Lambda} = E_{\bar{\Lambda}} = \frac{(1+\gamma_{\bar{p}})m_p}{2} = 1.665 \text{ GeV}$$

$$p_{\Lambda} = \sqrt{E_{\Lambda}^2 - m_{\Lambda}^2} = 1.236 \text{ GeV}/c$$

$$p_{\parallel\Lambda} = p_{\bar{p}}/2 = 1.1 \text{ GeV}/c$$

$$p_{\perp\Lambda} = \sqrt{p_{\Lambda}^2 - p_{\parallel\Lambda}^2} = 0.56 \text{ GeV}/c$$

In alternativa si possono usare le trasformazioni di Lorentz e, dopo aver calcolato β_{CdM} e γ_{CdM} , pari rispettivamente a 0.661 e 1.332, si trovano i valori già indicati per E_{Λ} e p_{Λ} .

$$A.3) \theta = \arctg(p_{\perp\Lambda} / p_{\parallel\Lambda}) = 0.47 \text{ rad} \sim 27^\circ$$

$$A.4) L = \gamma_{\Lambda} \tau_{\Lambda} \beta_{\Lambda} c = \frac{p_{\Lambda}}{m_{\Lambda}} c \tau_{\Lambda} = 8.7 \text{ cm}$$

B) Le componenti dell'impulso delle Λ e $\bar{\Lambda}$, perpendicolari alla velocità del centro di massa si conservano passando dal sistema di riferimento del centro di massa al sistema del laboratorio. Lungo la direzione del moto del centro di massa (coincidente con la direzione dell'antiprotone), si ha:

$$p_{\Lambda} = \gamma_{\text{CdM}} (\beta_{\text{CdM}} E_{\Lambda}^* + p_{\Lambda}^*) = \gamma_{\text{CdM}} E_{\Lambda}^* (\beta_{\text{CdM}} + \beta_{\Lambda}^*)$$

$$p_{\bar{\Lambda}} = \gamma_{\text{CdM}} (\beta_{\text{CdM}} E_{\bar{\Lambda}}^* - p_{\bar{\Lambda}}^*) = \gamma_{\text{CdM}} E_{\bar{\Lambda}}^* (\beta_{\text{CdM}} - \beta_{\bar{\Lambda}}^*)$$

La particella Λ viene quindi emessa in avanti ($\theta=0^\circ$), mentre la direzione della $\bar{\Lambda}$ è determinata dal confronto tra β_{CdM} e $\beta_{\bar{\Lambda}}^*$. Si veda anche l'eq. 34 di pag. 14.

Dai valori di p^* e l'energia E^* delle Λ trovati in A.1, si ha $\beta_{\Lambda}^* = 0.45$ mentre

$$\beta_{\text{CdM}} = \frac{p_{\bar{p}}}{\sqrt{p_{\bar{p}}^2 + m_p^2} + m_p} = 0.66 \text{ e quindi anche per la } \bar{\Lambda}, \theta=0^\circ.$$

C) No. Le componenti di p_{Λ} e $p_{\bar{\Lambda}}$ lungo la direzione del moto del centro di massa (riportate nel punto B), non possono mai annullarsi.

D) Dall'eq. 36 di pag. 15

$$\theta_{\max} = \arctg\left(\frac{\beta_{\Lambda}^*}{\gamma_{CdM}\sqrt{\beta_{CdM}^2 - (\beta_{\Lambda}^*)^2}}\right) = 0.61 \text{ rad} \sim 35^\circ$$

Esercizio 8:

Calcolare l'energia nel centro di massa \sqrt{s} e la velocità con cui si muove il centro di massa nei casi seguenti:

1. un elettrone ed un protone, entrambi di energia $E = 3 \text{ GeV}$, che collidono frontalmente,
2. un elettrone ed un protone, entrambi di $E = 3 \text{ GeV}$, che collidono ad un angolo di 90° nel sistema del laboratorio,
3. 2 protoni, di energia pari a 100 GeV , che collidono frontalmente,
4. 2 protoni, di energia pari a 100 GeV , che collidono ad un angolo di 90° nel sistema del laboratorio.

$$1) \sqrt{s} = \sqrt{2E^2 + m_e^2 + m_p^2 + 2p_e p_p} \approx \sqrt{2E^2 + m_p^2 + 2E\sqrt{E^2 - m_p^2}} = 5.998 \text{ GeV}$$

$$\beta = \frac{|\vec{p}_e + \vec{p}_p|}{2E} = 0.025$$

$$2) \sqrt{s} = \sqrt{2E^2 + m_e^2 + m_p^2} = 4.345 \text{ GeV}$$

$$\beta = \frac{|\vec{p}_e + \vec{p}_p|}{2E} = \frac{\sqrt{p_e^2 + p_p^2}}{2E} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{m_p^2}{2E^2}} = 0.690$$

$$3) \sqrt{s} = 2E = 200 \text{ GeV}$$

$$\beta = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|}{2E} = 0$$

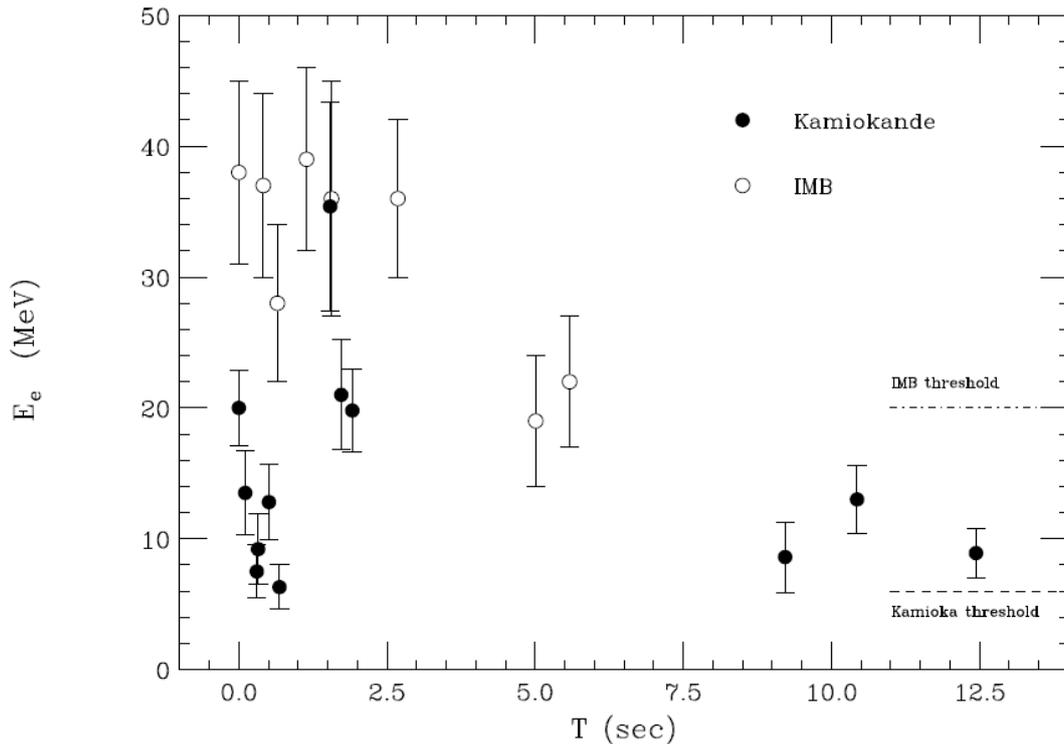
$$4) \sqrt{s} = \sqrt{4E^2 - 2p^2} = \sqrt{2E^2 + 2m_p^2} \approx \sqrt{2}E = 141.4 \text{ GeV}$$

$$\beta = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|}{2E} = \frac{p}{\sqrt{2}E} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Esercizio 9:

Il 23 febbraio del 1987 due rivelatori di neutrini, Kamiokande in Giappone e IMB negli Stati Uniti, osservarono, simultaneamente e in un arco di tempo di 13 secondi, una decina di eventi ciascuno. I neutrini provenivano dall'esplosione della Supernova SN1987A situata nella Nube di Magellano a 170000 anni luce dalla Terra. L'assenza di una chiara correlazione tra l'energia dei neutrini ed il loro tempo di osservazione¹, permise di porre un limite alla massa del neutrino. Determinare questo limite osservando in figura le energie misurate dai due rivelatori.

¹ l'analisi dei dati è qui estremamente semplificata.



Indicando con t_0 il tempo di osservazione (in secondi) del neutrino più energetico (E_0), un neutrino di energia $E_1 < E_0$ verrà osservato ad un tempo $t_1 = t_0 + \Delta t$. La dipendenza del ritardo Δt dalla massa dei neutrini è:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{L}{v_1} - \frac{L}{v_0} = \frac{L}{c} \left(\frac{E_1}{\sqrt{E_1^2 - m_\nu^2}} - \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - m_\nu^2}} \right) \approx \frac{L}{c} \left(\frac{m_\nu^2}{2E_1^2} - \frac{m_\nu^2}{2E_0^2} \right) = \frac{m_\nu^2 L}{2c} \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_0^2} \right)$$

dato che $m_\nu \ll E_0, E_1$. Una massa nulla implica che tutti i neutrini vengano osservati contemporaneamente; il ritardo cresce con il quadrato della massa del neutrino.

Dall'osservazione dei dati possiamo porre un limite al ritardo: $\Delta t \leq 13$ s.

Sostituendo $E_0 = 40$ MeV, $E_1 = 10$ MeV, $L/c = 170000$ anni, si ottiene $m_\nu \leq 20$ eV circa.

Esercizio 10:

Nell'urto protone-nucleo calcolare l'energia di soglia minima e massima per la reazione protone su protone di un nucleo di rame, $p_1 + p_2 \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$ sapendo che il moto di Fermi del protone nel nucleo-bersaglio ha un impulso medio di $p_F = 0.240$ GeV/c.

[$m(\pi^\pm) = 0.140$ GeV/c², $m_p = 0.938$ GeV/c²]

Se trascuriamo il moto di Fermi l'energia cinetica di soglia per la reazione è pari a:

$$K_1 = \frac{(2m_p + 2m_\pi)^2 - (2m_p)^2}{2m_p} = 4m_\pi + \frac{2m_\pi^2}{m_p} = 0.602 \text{ GeV}; \quad E_1 = K_1 + m_p = 1.540 \text{ GeV}$$

Considerando invece il moto del protone legato nel nucleo di rame, moto diretto casualmente rispetto alla direzione del protone incidente, si ha l'energia di soglia minima (massima) quando l'impulso di Fermi del protone del nucleo è antiparallelo (parallelo) alla direzione del protone incidente.

L'espressione della massa invariante nel laboratorio è:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (p_1 \mp p_F)^2} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_1E_2 \pm 2p_1p_F}$$

dove $E_2 = \sqrt{m_p^2 + p_F^2} = 968 \text{ MeV}$.

A soglia, l'energia nel centro di massa è $\sqrt{s} = 2m_p + 2m_\pi$.

Eguagliando le due espressioni si ha:

$$E_1 E_2 \pm p_1 p_F = 2(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2$$

$$E_1 E_2 - 2(m_p + m_\pi)^2 + m_p^2 = \pm \sqrt{E_1^2 - m_p^2} p_F$$

con il segno + (-) nel caso di energia di soglia minima (massima). Elevando a quadrato dopo aver chiamato

$$A = 2(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2 = 1.444 \text{ GeV}^2$$

si arriva all'equazione di secondo grado nell'energia di soglia:

$$E_1^2 - \frac{2AE_2}{m_p^2} E_1 + \frac{A^2}{m_p^2} + p_F^2 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$E_1 = \frac{AE_2}{m_p^2} \pm \sqrt{\left(\frac{AE_2}{m_p^2}\right)^2 - \frac{A^2}{m_p^2} - p_F^2} = (1.589 \pm 0.312) \text{ GeV}$$

L'energia cinetica di soglia minima e massima valgono rispettivamente:

$$K_1 = 0.339 \text{ GeV} \text{ e } K_1 = 0.963 \text{ GeV}.$$

Si noti che l'energia di soglia ottenuta trascurando l'impulso di Fermi non è uguale alla media tra i due valori limite dell'energia di soglia appena ricavati.

Esercizio 11:

Il mesone π^0 è stato scoperto studiando la foto-produzione su protoni a riposo: $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$. Calcolare la minima energia del fotone nel laboratorio che rende possibile la reazione.

Inoltre in queste condizioni calcolare:

1. *il boost del centro di massa β_{CDM} nel laboratorio;*
2. *l'energia del fotone nel centro di massa.*

$$[m(\pi^0) = 135 \text{ MeV}/c^2, m_p = 938 \text{ MeV}/c^2]$$

Alla soglia si ha:

$$E_\gamma = E_{soglia} = \frac{(m_{\pi^0} + m_p)^2 - m_p^2}{2m_p} = 144.7 \text{ MeV}$$

Si noti che l'energia minima del fotone è poco superiore alla massa del pione. Se si approssima al primo ordine il numeratore come se m_π fosse molto minore di m_p (in realtà $m_\pi < m_p$ ma non \ll e infatti il risultato approssimato differirà di una quantità non trascurabile dal risultato esatto)

$$E_\gamma = E_{soglia} = \frac{m_p \cdot \left[\left(1 + \frac{m_{\pi^0}}{m_p} \right)^2 - 1 \right]}{2} \approx \frac{m_p \cdot \left[1 + 2 \frac{m_{\pi^0}}{m_p} - 1 \right]}{2} = m_{\pi^0}$$

$$1) \gamma_{CDM} = \frac{E_\gamma + m_p}{\sqrt{m_p^2 + 2E_\gamma m_p}} = 1.009$$

$$2) E_\gamma = \gamma_{CdM} (E_\gamma^* + \beta_{CdM} p_\gamma^*) = \gamma_{CdM} E_\gamma^* (1 + \beta_{CdM});$$

Da tale relazione si ricava:

$$E_\gamma^* = \frac{E_\gamma}{\gamma_{CdM} (1 + \beta_{CdM})} = 126.6 \text{ MeV}$$

Alternativamente, dopo aver calcolato l'energia nel centro di massa

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_p^2 + 2E_\gamma m_p} = 1073 \text{ MeV},$$

$$p_\gamma^* = p_p^* = \sqrt{(E_\gamma^*)^2 - m_p^2} = \sqrt{(\sqrt{s} - E_\gamma^*)^2 - m_p^2}$$

e quindi:

$$E_\gamma^* = p_p^* = \frac{s - m_p^2}{2\sqrt{s}} = 126.6 \text{ MeV}$$

Esercizio 12:

Consideriamo la reazione $\pi^- + p \rightarrow K_0 + \Lambda$ nella ipotesi che nel sistema di riferimento del laboratorio, il protone sia a riposo ($p_p = 0$). Calcolare l'energia cinetica del pione:

1. a soglia

2. nella configurazione cinematica in cui il mesone K_0 venga prodotto a riposo.

[$m(\pi^\pm) = 0.140 \text{ GeV}/c^2$, $m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$, $m(K_0) = 0.498 \text{ GeV}/c^2$, $m_\Lambda = 1.116 \text{ GeV}/c^2$]

1) A soglia

$$K_\pi = \frac{(m_\Lambda + m_K)^2 - (m_p + m_\pi)^2}{2m_p} = 0.769 \text{ GeV}$$

2) Anche in questa particolare configurazione, il problema si svolge interamente nella direzione di moto del pione. Nel sistema del laboratorio si ha:

$$p_\pi = p_\Lambda$$

$$E_\pi + m_p = E_\Lambda + m_K$$

quindi dalla conservazione dell'impulso:

$$E_\Lambda^2 = p_\pi^2 + m_\Lambda^2 = E_\pi^2 - m_\pi^2 + m_\Lambda^2$$

sostituendo questa relazione nella conservazione dell'energia²:

$$E_\pi = \frac{m_\Lambda^2 - m_p^2 - m_K^2 - m_\pi^2 + 2m_p m_K}{2(m_p - m_K)} = 1.173 \text{ GeV}$$

$K_\pi = E_\pi - m_\pi = 1.033 \text{ GeV}$ ovviamente maggiore dell'energia cinetica di soglia.

Esercizio 13:

In un anello di collisione asimmetrico il fascio di elettroni ha energia 4.5 GeV e quello di positroni 2.0 GeV.

1. Calcolare l'energia totale nel centro di massa e la velocità del centro di massa nel laboratorio.

2. Se nell'interazione viene prodotta una coppia particella-antiparticella, ciascuna di massa $m=1 \text{ GeV}/c^2$, la cui direzione, nel centro di massa, formi un angolo di 90° rispetto alla

² Alternativamente si può utilizzare la conservazione dell'energia, scritta come equazione quadratica nell'impulso del pione, ottenendo $p_\pi = 1.164 \text{ GeV}/c$.

direzione di collisione, calcolarne l'impulso trasverso e longitudinale nel sistema del laboratorio.

$$1) \sqrt{s} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2} = \sqrt{6.5^2 - 2.5^2} = 6 \text{ GeV}$$

$$\beta_{CdM} = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|}{E_1 + E_2} = 0.385$$

2) le particelle prodotte hanno nel centro di massa $p_{\parallel}^* = 0$, quindi dalla trasformazione di Lorentz

$$\begin{pmatrix} E \\ p_{\perp} \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{CdM} & 0 & \beta_{CdM}\gamma_{CdM} \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_{CdM}\gamma_{CdM} & 0 & \gamma_{CdM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^* \\ p_{\perp}^* \\ p_{\parallel}^* \end{pmatrix}$$

si ha:

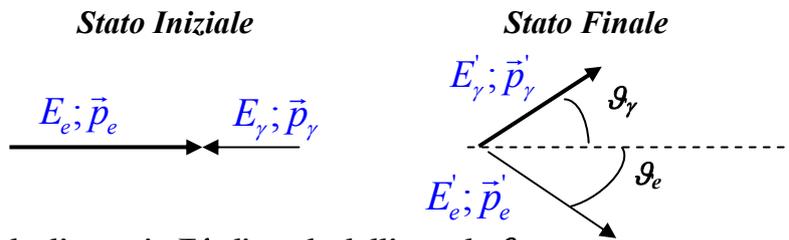
$$p_{\perp} = p_{\perp}^* = p^* = \sqrt{(E^*)^2 - m^2} = \sqrt{s/4 - m^2} = 2.83 \text{ GeV}/c$$

$$p_{\parallel} = \beta_{CdM}\gamma_{CdM} \frac{\sqrt{s}}{2} = 1.25 \text{ GeV}/c$$

Esercizio 14:

Si produce un fascio di fotoni γ monoenergetici di alta energia facendo diffondere dei fotoni di bassa energia, forniti da un laser, da un fascio collimato di elettroni di alta energia.

Lo schema che segue illustra la situazione comunemente utilizzata negli esperimenti:



1. ***dimostrare che l'energia E'_γ dipende dall'angolo ϑ_γ ;***
2. ***mostrare per quale valore di ϑ_γ si ha il massimo di E'_γ ;***
3. ***calcolare il massimo di E'_γ per $E_\gamma = 2.5 \text{ eV}$ ed $E_e = 0.5 \text{ GeV}, 1.0 \text{ GeV}, 1.5 \text{ GeV}$.***

1) Dalla conservazione del quadrimpulso si hanno le tre equazioni scalari:

$$E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$$

$$E'_\gamma \sin \vartheta_\gamma - p'_e \sin \vartheta_e = 0$$

$$p_e - E_\gamma = E'_\gamma \cos \vartheta_\gamma + p'_e \cos \vartheta_e$$

Dato che E_γ è della scala dell'eV, p'_e non può, come si vedrà meglio in seguito, essere approssimato con E'_e . Risolvendo la seconda equazione in ϑ_e e sostituendo nella terza:

$$p_e - E_\gamma - E'_\gamma \cos \vartheta_\gamma = \sqrt{(p'_e)^2 - (E'_\gamma \sin \vartheta_\gamma)^2} = \sqrt{(E'_e)^2 - m_e^2 - (E'_\gamma \sin \vartheta_\gamma)^2}$$

Elevando al quadrato e sostituendo $E'_e = E_\gamma + E_e - E'_\gamma$ dalla conservazione dell'energia, dopo opportune semplificazioni si ha:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma \cdot (E_e + p_e)}{(E_\gamma + E_e) + (E_\gamma - p_e) \cdot \cos \vartheta_\gamma}$$

2) Essendo $p_e > E_\gamma$ si ha il massimo valore per E'_γ quando $\vartheta_\gamma = 0$ cioè nella configurazione di diffusione del fotone all'indietro.

$$3) \max(E'_\gamma) = \frac{E_\gamma \cdot (E_e + p_e)}{2E_\gamma + E_e - p_e}$$

Con l'energia dell'elettrone pari a 0.5, 1.0 e 1.5 GeV si ha una energia massima del fotone nello stato finale rispettivamente uguale a 9.4, 36.9, 81.8 MeV. Si noti che l'energia massima del fotone cresce circa con il quadraticamente con l'energia dell'elettrone incidente.

Mentre l'approssimazione $E_e + p_e \approx 2E_e$ è legittima (l'errore commesso è minore di 1 ppm), la medesima sostituzione non può essere fatta a denominatore, essendo sempre $E_e - p_e \gg 2E_\gamma$.

Una approssimazione possibile è:

$$E_e - p_e \approx \frac{m_e^2}{2E_e} \quad \text{e quindi:}$$

$$\max(E'_\gamma) \approx \frac{E_\gamma E_e}{E_\gamma + m_e^2/4E_e} \approx \frac{4E_\gamma}{m_e^2} E_e^2$$

Esercizio 15:

Un fascio di π^- che ha un impulso nel laboratorio di 2.00 GeV/c, decade in volo secondo la reazione: $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

Calcolare:

1. *l'angolo massimo θ_{\max} con cui il μ^- viene emesso nel laboratorio e l'energia del μ^- corrispondente a θ_{\max} ;*
2. *l'energia massima che può avere il μ^- nel laboratorio e il corrispondente angolo che esso forma con la linea di volo del π^- nel laboratorio;*
3. *il cammino percorso in media dal μ^- prima del suo decadimento per la configurazione cinematica di massima energia del μ^- nel laboratorio.*

$$[m(\pi^-) = 0.140 \text{ GeV}/c^2; m(\mu^-) = 0.105 \text{ GeV}/c^2; \tau(\mu^-) = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s.}]$$

1) Dalla conservazione del quadrimpulso, trascurando la massa del neutrino, si ha:

$$p_\mu^* = p_\nu^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 31 \text{ MeV}$$

$$E_\mu^* = 109 \text{ MeV}; \quad \beta_\mu^* = 0.28$$

$$\beta_\pi = \beta_{\text{CdM}} = \frac{p_\pi}{\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}} = \frac{2000}{2005} = 0.9975; \quad \gamma_\pi = \gamma_{\text{CdM}} = 14.32$$

Essendo $\beta_\pi > \beta_\mu^*$, esiste un angolo massimo nel laboratorio:

$$\theta_\mu^{\max} = \arctg \left(\frac{\beta_\mu^*}{\gamma_{\text{CdM}} \sqrt{\beta_{\text{CdM}}^2 - (\beta_\mu^*)^2}} \right) = 1.2^\circ$$

$$E_\mu = \gamma_{\text{CdM}} (E_\mu^* + \beta_{\text{CdM}} p_\mu^* \cos \vartheta_\mu^*)$$

inoltre $\beta_\mu^* = -\beta_{\text{CdM}} \cos \vartheta_{\mu, \max}^*$ quindi

$$E_\mu(\theta^{\max}) = \gamma_{\text{CdM}} (E_\mu^* - p_\mu^* \beta_\mu^*) = 1440 \text{ MeV}$$

2) $E_\mu = \gamma_{CdM} (E_\mu^* + \beta_{CdM} p_\mu^* \cos \mathcal{G}_\mu^*)$; la configurazione di energia massima è quella in cui $\mathcal{G}_\mu^* = 0$ e quindi $\mathcal{G}_\mu = 0$.

$$E_{\mu, \max} = 2004 \text{ MeV}$$

3) Nella configurazione di energia massima: $\gamma_\mu = E_{\mu, \max} / m_\mu = 19.1$

$$\beta_\mu = \sqrt{1 - 1/\gamma_\mu^2} = 0.9986$$

$$d = v \cdot \tau = \beta c \gamma \tau_0 = 12.6 \text{ km}$$

Esercizio 16:

Degli eventi di decadimento $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ si misurano nel laboratorio gli impulsi dei due prodotti di decadimento e il loro angolo relativo:

$$p_\Xi = 1.906 \text{ GeV}/c; p_\pi = 0.281 \text{ GeV}/c; \theta_{\Xi\pi} = 67.5^\circ.$$

Se le loro masse sono $m(\Xi^0) = 1.315 \text{ GeV}/c^2$ e $m(\pi^-) = 0.140 \text{ GeV}/c^2$, calcolare:

1. *il momento della particella Ω^- nel laboratorio;*
2. *il valore della sua massa;*
3. *il tempo proprio τ_{Ω^-} della particella Ω^- se la distanza tra il punto della sua produzione e quello del suo decadimento nel laboratorio è in media $l = 3.0 \text{ cm}$.*

1) Dalla conservazione dell'impulso:

$$p_\Omega = |\vec{p}_\Xi + \vec{p}_\pi| = \sqrt{p_\Xi^2 + p_\pi^2 + 2p_\Xi p_\pi \cos \theta_{\Xi\pi}} = 2.030 \text{ GeV}/c$$

2) $E_\Xi = 2.316 \text{ GeV}$; $E_\pi = 0.314 \text{ GeV}$

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_\Xi + E_\pi)^2 - |\vec{p}_\Xi + \vec{p}_\pi|^2} = \sqrt{E_\Omega^2 - p_\Omega^2} = m_\Omega = 1.672 \text{ GeV}/c^2$$

3) $\tau_0 = \frac{l}{\gamma \beta c} = \frac{lm_\Omega}{cp_\Omega} = 8.2 \cdot 10^{-11} \text{ s}$

Si noti che $c\tau_0 = 2.46 \text{ cm}$

Esercizio 17:

L'iperone Λ decade come $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$; il suo impulso nel sistema di riferimento del laboratorio sia $p_\Lambda = 2.0 \text{ GeV}/c$ e sia diretto secondo l'asse x .

Nel sistema di riferimento del centro di massa l'angolo tra la direzione del protone e l'asse x sia $\mathcal{G}_p^ = 30^\circ$.*

Calcolare:

1. *l'energia e l'impulso del p e del π^- nel sistema di riferimento del centro di massa;*
2. *i parametri della trasformazione di Lorentz dal laboratorio al centro di massa;*
3. *l'energia e l'impulso del π^- nel laboratorio, l'impulso del protone e l'angolo da esso formato con l'asse x nel laboratorio.*

$$[M_\Lambda = 1115.7 \text{ MeV}/c^2; M_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2; M_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2]$$

1) Dalla conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa (l'impulso del protone è uguale e opposto a quello del pione), si ha:

$$p^* = \frac{\sqrt{(m_\Lambda^2 - m_p^2 + m_\pi^2)^2 - 4m_\pi^2 m_\Lambda^2}}{2m_\Lambda} = 100.5 \text{ MeV}$$

$$E_\pi^* = 172.0 \text{ MeV}; E_p^* = 943.7 \text{ MeV}$$

2) i parametri della trasformazione di Lorentz sono:

$$\gamma_{CdM} = \frac{\sqrt{p_\Lambda^2 + m_\Lambda^2}}{m_\Lambda} = 2.053; \quad \beta_{CdM} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{CdM}^2}} = 0.873$$

3) applicando la trasformazione di Lorentz:

$$E_\pi = 197.1 \text{ MeV}$$

$$p_{\pi,x} = 129.6 \text{ MeV}$$

$$p_{\pi,\perp} = p_{p,\perp} = 50.3 \text{ MeV}$$

$$p_{p,x} = 1870.4 \text{ MeV}$$

$$E_p = 2093.4 \text{ MeV}$$

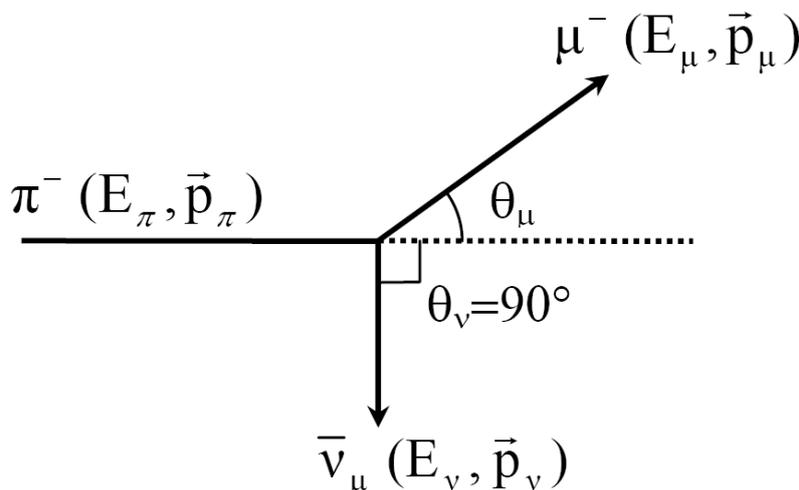
da notare che nel laboratorio entrambe le particelle sono emesse in avanti.

$$\mathcal{G}_p = 1.54^\circ$$

Esercizio 18:

Un π^- di impulso $p_\pi = 100 \text{ MeV}/c$ decade per il processo $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Se nel laboratorio l'antineutrino emerge con un angolo $\theta_\nu = 90^\circ$ rispetto alla direzione di volo del π^- , quale è nel laboratorio il valore del corrispondente angolo θ_μ ?

$[m(\pi^-) = 139.6 \text{ MeV}/c^2; m(\mu^-) = 105.7 \text{ MeV}/c^2]$



Dalla conservazione dell'impulso:

$$p_\pi = p_\mu \cos \theta_\mu$$

$$p_{\bar{\nu}} = p_\mu \sin \theta_\mu$$

$$\text{si ha: } \tan \theta_\mu = \frac{p_{\bar{\nu}}}{p_\pi}$$

mentre dalla conservazione del quadrimpulso $\mathbf{P}_\mu = \mathbf{P}_\pi - \mathbf{P}_\nu$ segue $m_\mu^2 = m_\pi^2 - 2E_\pi E_\nu$.

L'impulso del neutrino è quindi:

$$p_\nu = E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi}$$

E infine sostituendo:

$$\tan \theta_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2E_\pi p_\pi} = 0.242$$

L'angolo del muone rispetto alla direzione di volo del pione è: $\theta_\mu = 0.238 \text{ rad} = 13.6^\circ$

Raccolta di Esercizi per il Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare I

riccardo.paramatti@roma1.infn.it

17 aprile 2011

Sezione d'urto

Esercizio 1.1:

L'interazione $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$ è studiata inviando un flusso totale di 10^{15} neutrini/m² su un bersaglio di 15 tonnellate di ferro ($A = 56$, $Z = 26$). Si osservano 160 eventi. Si ricavi la sezione d'urto corrispondente.

Indicando con N_r il numero di eventi osservati e con n_n la densità di neutroni nel bersaglio di ferro, la sezione d'urto è:

$$\sigma = \frac{N_r}{N_\nu} \cdot \frac{1}{n_n d} = \frac{N_r}{N_\nu} \cdot \frac{S}{N_n} = \frac{N_r}{\Phi_{S\nu} N_n}$$

Il flusso di neutrini integrato nel tempo di presa dati è 10^{11} cm⁻², mentre il numero totale di neutroni del bersaglio è dato da:

$$N_n = n_n V_{Fe} = \frac{N_A (A_{Fe} - Z_{Fe})}{A_{Fe}} \cdot \rho_{Fe} V_{Fe} = \frac{N_A (A_{Fe} - Z_{Fe})}{A_{Fe}} M_{Fe} = 4.84 \cdot 10^{30}$$

$$\sigma = \frac{N_r}{\Phi_{S\nu} N_n} = 3.3 \cdot 10^{-40} \text{ cm}^2$$

Esercizio 1.2:

Un fascio di raggi X monocromatici, costituiti da fotoni di energia $E_\gamma = 40$ KeV, viene fatto incidere perpendicolarmente su di una lamina di ferro naturale, una miscela di vari isotopi del ferro con $\langle A \rangle \approx 56$ e densità $\rho = 7.9$ g/cm³.

La lamina assorbe i fotoni con una sezione d'urto $\sigma = 300$ b/atomo dovuta principalmente all'effetto fotoelettrico. Si calcoli:

- 1) il corrispondente coefficiente di assorbimento μ
- 2) lo spessore L della lamina necessario per diminuire di un fattore 10 il flusso dei fotoni.

Il coefficiente di assorbimento è:

$$\mu = \sigma n_b = \sigma \frac{N_A}{A_{Fe}} \cdot \rho_{Fe} = 3 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^2 \cdot 8.49 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} = 25.4 \text{ cm}^{-1}$$

Invertendo, si ha la lunghezza di attenuazione:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = 0.04 \text{ cm}$$

Il flusso dei fotoni dopo uno spessore x è dato da:

$$\phi(x) = \phi_0 \cdot e^{-\mu x}$$

e si riduce ad un decimo del flusso iniziale per:

$$x = L = -\frac{\log(1/10)}{\mu} = 0.09 \text{ cm}$$

Esercizio 1.3:

La reazione $\alpha + {}_{27}^{59}\text{Co} \rightarrow {}_{29}^{61}\text{Cu} + 2n$ permette di produrre l'isotopo radioattivo ${}_{29}^{61}\text{Cu}$. Si consideri un bersaglio di cobalto ${}_{27}^{59}\text{Co}$ di densità $\rho = 8.9 \text{ g/cm}^3$, di area $S = (1.5 \text{ cm})^2$ e spessore $d = 2.5 \mu\text{m}$. Il fascio di particelle α , di corrente $I = 10 \mu\text{A}$, copre uniformemente il bersaglio di cobalto. All'energia delle particelle α incidenti la sezione d'urto sia $\sigma = 0.66 \text{ barn}$. Calcolare il numero di nuclei ${}_{29}^{61}\text{Cu}$ prodotti al secondo.

Il numero di nuclei di rame prodotti al secondo è dato da:

$$\frac{dN_{\text{Cu}}}{dt} = \sigma \cdot N_{\text{Co}} \Phi_{\alpha} = \sigma \cdot n_{\text{Co}} V_{\text{Co}} \Phi_{\alpha} = \sigma \cdot n_{\text{Co}} S d \Phi_{\alpha}$$

Il flusso di particelle α per unità di superficie e per secondo, indicando con e la carica dell'elettrone, è pari a:

$$\Phi_{\alpha} = \frac{1}{S} \cdot \frac{I}{2e} = 1.389 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

mentre la densità di bersagli (atomi di Cobalto) è:

$$n_{\text{Co}} = \frac{N_A}{A_{\text{Co}}} \cdot \rho_{\text{Co}} = 9.08 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{dN_{\text{Cu}}}{dt} = 4.68 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Esercizio 1.4:

Un fascio di elettroni incide su un bersaglio di carbonio di spessore $d = 2 \text{ mm}$. La diffusione degli elettroni ad un angolo di 40° è osservata con un contatore di superficie $S=1 \text{ cm}^2$, posto a distanza $L=2 \text{ m}$ dal bersaglio. La sezione d'urto differenziale per questo angolo è di $0.5 \mu\text{b/sr}$. Si determini il numero di conteggi al secondo, sapendo che la corrente del fascio incidente è pari a $I=0.15 \text{ mA}$. ($A_C=12.01$; $\rho_C=2.26 \text{ g/cm}^3$)

Il numero di conteggi al secondo è dato da:

$$\frac{dN_c}{dt} = \sigma_s \cdot n_b d \frac{dN_f}{dt} = \sigma_s \cdot n_b d \frac{I}{e}$$

dove si è indicata la carica dell'elettrone con e .

La sezione d'urto differenziale, integrata sulla superficie S , è:

$$\sigma_s = \int_s \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{S}{L^2} = 12.5 \text{ pb} = 1.25 \cdot 10^{-35} \text{ cm}^2$$

mentre la densità di bersagli (atomi di carbonio) è pari a:

$$n_b = \frac{N_A}{A_C} \cdot \rho_C = 1.133 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

Si ottiene quindi un numero di conteggi al secondo pari a 266.