

# Capitolo 5

## Interazioni

### 5.1 Particelle e forze

La fisica delle particelle studia i costituenti fondamentali della materia e le forze che agiscono tra di loro. La nostra conoscenza dei costituenti di cui la materia è formata è considerevolmente cambiata nel tempo poiché si sono scoperte via via nuove “sotto-strutture”. Come abbiamo già visto, la primitiva concezione dell’atomo come la più piccola unità della materia fu soppiantata tra il 1897 ed il 1911 dalla scoperta dell’elettrone e del nucleo. Successivamente si è scoperto che il nucleo è costituito a sua volta da protoni e neutroni. Come vedremo, anche i nucleoni risultano composti da entità più elementari, i *quark*. Oggi sappiamo che elettroni e quark hanno dimensioni minori di  $10^{-18}$  m e che tutta la materia ordinaria è fatta di due tipi di quark, *up* e *down*, da elettroni e da neutrini, particelle neutre che emergono dai decadimenti  $\beta$ . Queste quattro particelle hanno spin  $1/2$  e sono dunque fermioni. Sappiamo anche che questa prima “famiglia” è replicata tre volte, con masse via via maggiori, e che per ciascuno di questi 12 fermioni esiste un corrispondente antifermione, di massa uguale ma di carica opposta, come predetto dalla teoria di Dirac.

Queste particelle interagiscono tra loro tramite quattro forze fondamentali:

- la forza gravitazionale, che è attrattiva e agisce su tutte le particelle dotate di massa;
- la forza elettromagnetica, che attrae o respinge le cariche elettriche, curva le traiettorie delle particelle cariche e tiene insieme gli atomi;

- la forza debole, responsabile della “mutazione” dei nuclei e delle particelle;
- la forza forte o di colore, che tiene insieme sia gli adroni che i nuclei, “incollando” tra loro rispettivamente i quark ed i nucleoni.

Nella tabella 5.1 sono elencate le quattro forze fondamentali ordinate per intensità relativa. La determinazione dei rapporti tra le intensità sarà discussa nel par. 5.10. Queste interazioni, nella comprensione odierna, avvengono come risultato dello scambio di bosoni, particelle di spin intero, da parte dei fermioni. Ciascuna interazione è causata da uno o più scambi di questi bosoni, indicati nella tabella. Ad ognuna delle prime tre interazioni è assegnata una carica: la carica forte, la carica elettrica e la carica debole. La carica forte è anche detta carica di colore o semplicemente colore. Ciascuna particella è soggetta a quelle interazioni di cui trasporta la relativa carica.

Tabella 5.1: Le interazioni fondamentali e le loro intensità relative. Per la stima di queste ultime, si veda il paragrafo 5.10.

interazione	bosoni	intensità
interazione forte	gluoni	1
interazione elettromagnetica	fotoni	$10^{-2}$
interazione debole	bosoni $W^\pm$ e Z	$10^{-7}$
gravità	gravitoni	$10^{-42}$

In sintesi, possiamo pensare di suddividere le particelle fondamentali in fermioni di spin  $1/2$ , che rappresentano le “sorgenti” dei campi di forza, e bosoni di spin 1, i *bosoni di Gauge*<sup>1</sup>, che rappresentano i “mediatori” delle

<sup>1</sup>Il nome deriva dal fatto che l'elettrodinamica è invariante per trasformazioni di *gauge*, ossia di calibrazione, nel senso che sono possibili diverse scelte dei potenziali che conducono alle stesse espressioni per i campi elettromagnetici. L'esempio più semplice è il potenziale elettrostatico, che è sempre definito a meno di una costante. Nella elettrodinamica quantistica, la richiesta che i campi siano invarianti se moltiplicati per una fase complessa locale, ossia diversa per ogni posizione dello spazio (per cui si dovrebbe parlare in realtà di invarianza di fase, piuttosto che di invarianza di scala), richiede l'introduzione nella lagrangiana delle particelle cariche di un termine che rappresenta l'interazione tra il campo della particella carica e il potenziale vettore, che costituisce appunto il campo del fotone, per cui quest'ultimo è detto bosone di gauge. Anche gli altri bosoni di gauge sono introdotti in base ad analoghe richieste di invarianza delle relative lagrangiane.

diverse interazioni. Detto in altre parole: nella rappresentazione moderna i campi di forza sono “particelle di forza” scambiate tra particelle, o campi, di materia! Nei prossimi paragrafi discuteremo come lo scambio di bosoni può dare origine alle forze tra le particelle.

Ci sono ottime ragioni per considerare le forze deboli ed elettromagnetiche come due diversi aspetti di una unica forza “elettrodebole”, esattamente come le forze elettrostatiche e magnetiche sono diverse manifestazioni dell’elettromagnetismo. Inoltre c’è una speranza forte e fondata che alla fine la unificazione raggiunta per le forze elettromagnetiche e deboli possa essere estesa a tutte e quattro le forze presenti in natura. Questa teoria di unificazione è chiamata “Modello Standard”. La gravitazione non è ancora incorporata in maniera coerente in questo modello, sebbene la sua struttura possa essere descritta da una teoria costruita in modo molto simile a quello del Modello Standard. D’altra parte, come è evidente dalla tabella 5.1, la forza gravitazionale tra particelle elementari ha una intensità completamente trascurabile rispetto alle altre tre forze, e non verrà trattata in questo corso.

In questo capitolo descriveremo le diverse interazioni a cui sono sottoposte le particelle ed i meccanismi attraverso i quali interagiscono. In particolare, prendendo ad esempio la forza elettromagnetica, introdurremo l’ampiezza di transizione dovuta ai potenziali di interazione, il concetto di propagatore, i grafici di Feynman. Infine discuteremo le frequenze di decadimento dei nuclei e delle risonanze e la formula di Breit-Wigner che descrive la distribuzione in probabilità della massa delle risonanze.

## 5.2 L’interazione elettromagnetica

Consideriamo la diffusione di elettroni su protone dovuta alle cariche elettriche. Il processo classico è rappresentato dalla diffusione degli elettroni da parte del potenziale statico del protone  $V(r) \propto -1/r$ . Il campo classico è definito su tutto lo spazio ed agisce istantaneamente a distanza sugli elettroni. Si può ricordare che già Newton a proposito delle azioni a distanza notava: “that one body can act upon another at a distance, through a vacuum, without the mediation of anything else, . . . , is to me a great absurdity”. In elettrodinamica quantistica l’interazione tra due cariche elettriche è invece mediata da un campo di bosoni di massa nulla, i fotoni, e la sua intensità è data dalla costante di accoppiamento, che è proporzionale al prodotto delle

cariche elettriche, moltiplicata per un termine che dipende dal quadrimpulso trasferito e prende il nome di *propagatore*.

Se  $H_i$  è la hamiltoniana che descrive l'interazione, la probabilità che avvenga un processo fisico da uno stato iniziale  $|i\rangle$  ad uno stato finale  $|f\rangle$  è proporzionale a  $|\langle f|H_i|i\rangle|^2$ . Secondo la teoria delle perturbazioni, l'Hamiltoniana libera può essere sostituita dalla somma  $H_i = H_0 + V(\vec{r})$  e nell'*approssimazione di Born*<sup>2</sup>, che consiste nell'approssimare le funzioni d'onda della particella diffusa nello stato iniziale e finale con le funzioni d'onda di particelle libere, ponendo per semplicità  $\hbar = c = 1$  si ha:

$$\langle f|H_i|i\rangle \propto \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} dv = \frac{1}{4\pi} \int V(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} dv = f(\vec{q}) \quad (5.1)$$

per cui l'ampiezza di diffusione  $f(\vec{q})$  è la trasformata di Fourier del potenziale rispetto al momento trasferito tra le particelle  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$ . Se inseriamo il potenziale coulombiano  $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , abbiamo:

$$f(q) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos\vartheta} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \quad (5.2)$$

che integrata su  $\varphi$  e chiamando  $y = \cos\vartheta$  diventa:

$$f(q) = -\frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r e^{iqr y} dr dy = -\frac{\alpha}{2iq} \int_0^\infty (e^{iqr} - e^{-iqr}) dr = -\frac{\alpha}{q} \int_0^\infty \sin qr dr \quad (5.3)$$

dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine della fisica atomica. L'integrale ha un andamento oscillante per  $r \rightarrow \infty$ . Tuttavia, se si considera che a grandi distanze dal protone il campo di questo sarà schermato da altre cariche, per cui  $V(r) \rightarrow 0$  prima che  $r \rightarrow \infty$ , possiamo porre a zero il valore a  $r = \infty$  del risultato dell'integrale definito, per cui:

$$f(q) \simeq \frac{\alpha}{2iq} \left( \frac{1}{iq} + \frac{1}{iq} \right) = -\frac{\alpha}{2iq} \frac{2iq}{q^2} = -\frac{\alpha}{q^2} \quad (5.4)$$

Notiamo che la sezione d'urto sarà proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza di diffusione, e quindi ritroviamo lo stesso andamento ottenuto nel calcolo classico di Rutherford rappresentato dalla (3.29):

$$\sigma \propto f(q)^2 = \left( \frac{\alpha}{q^2} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{16p^4 \sin^4 \vartheta/2} \quad (5.5)$$

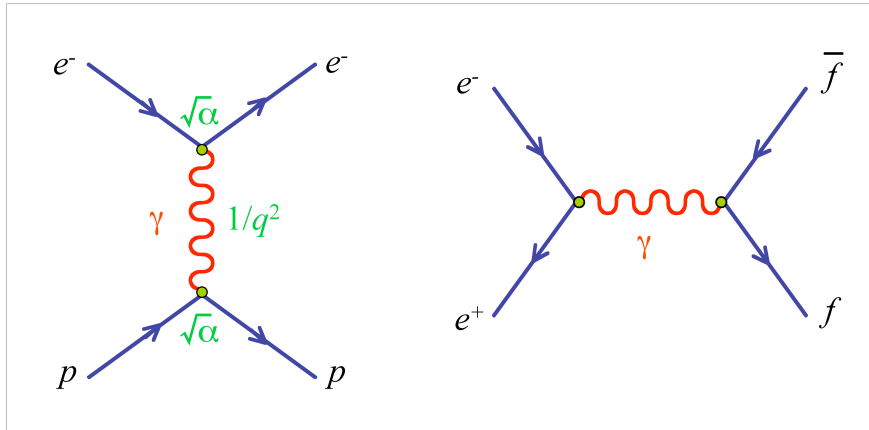


Figura 5.1: Grafici di Feynman, a sinistra per la diffusione di un elettrone su protone, a destra per l'annichilazione di una copia elettrone-positrone con la susseguente creazione di una coppia fermione-antifermione. Il tempo scorre da sinistra a destra. Le frecce sono concordi con lo scorrere del tempo per i fermioni, discordi per gli antifermioni.

Ora è possibile dare una rappresentazione grafica dell'ampiezza di diffusione nel modo illustrato nella figura 5.1: nell'interazione col protone l'elettrone devia cedendo un impulso  $q$  che viene trasferito dal fotone (rappresentato dal tratto interno ondulado) al protone. Nel calcolo dell'ampiezza di diffusione entrano le cariche dell'elettrone e del protone, attraverso  $\alpha$ , che rappresenta la *costante di accoppiamento* dell'interazione, e l'inverso del quadrato di  $q$  che è per l'appunto l'impulso trasportato dal fotone. La rappresentazione pittorica che ne risulta è detta *grafico di Feynman* e ad essa corrisponde la regola di calcolo per cui un vertice contribuisce all'ampiezza con un fattore  $\sqrt{\alpha}$ , mentre la linea interna, il *propagatore*, contribuisce con un fattore  $1/q^2$ . Benché una esposizione della teoria dell'elettrodinamica quantistica e la derivazione completa delle regole associate ai diagrammi di Feynman esulino dallo scopo di questo corso, ne discuteremo alcune caratteristiche qualitative, che rendono molto utile questa rappresentazione nella descrizione dei diversi processi di diffusione e di decadimento che affronteremo nel seguito.

<sup>2</sup>Si veda ad esempio J.J. Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna* (Zanichelli, 1990), par. 7.2.

Notiamo che il fotone, nonostante sia il messaggero, o mediatore, della forza elettromagnetica, è privo di carica elettrica. Inoltre ha massa nulla, ed è proprio questa proprietà che rende il raggio d'azione del potenziale elettromagnetico infinito e decrescente come  $1/r$ , dove  $r$  è la distanza dalla sorgente. Tuttavia, il fotone interno scambiato nella prima interazione della figura 5.1 non ha massa invariante nulla, come si può dimostrare con un semplice calcolo di cinematica: se la diffusione è elastica, essendo  $M_p \gg M_e$ , l'elettrone diffuso avrà la stessa energia e lo stesso modulo dell'impulso dell'elettrone incidente, quindi  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \equiv (0, -(\vec{p}' - \vec{p}))$  da cui  $M_\gamma^2 = q^2 = -2p^2 + 2p^2 \cos \vartheta < 0$ . Se consideriamo il diagramma di Feynman della seconda interazione della figura 5.1, che corrisponde all'annichilazione di due elettroni, possiamo calcolare il modulo del quadrimpulso del fotone nel centro di massa dei due elettroni, per cui se  $E$  è la loro energia in questo riferimento,  $M_\gamma^2 = 4E^2 > 0$ . Dunque, in un diagramma di Feynman,  $|\mathbf{p}|^2 = M^2$  solo per i rami esterni (per le particelle libere). I propagatori rappresentano *particelle virtuali*, che sono, come si dice, *off mass-shell*, ossia non hanno la massa che avrebbero se fossero particelle reali. Dai calcoli precedenti, vediamo che se il propagatore è orientato nella direzione in cui scorre il tempo (nei nostri diagrammi da sinistra a destra) avrà modulo del quadrimpulso positivo (è quindi un quadrivettore di tipo tempo) mentre se è orientato in direzione ortogonale avrà modulo del quadrimpulso negativo (è un quadrivettore di tipo spazio).

### 5.3 Introduzione ai diagrammi di Feynman

I diagrammi di cui abbiamo visto un esempio nel precedente paragrafo sono in realtà una tecnica grafica, sviluppata da Feynman intorno al 1950 allo scopo di calcolare le ampiezze di transizione dei processi di interazione tra le particelle e dei loro decadimenti, che rappresenta una pietra miliare nella fisica delle particelle elementari. Originariamente questi diagrammi furono introdotti da Feynman per il calcolo degli elementi di matrice di transizione dei processi elettromagnetici nell'ambito della elettrodinamica quantistica (QED). In questi diagrammi spazio-temporali ogni simbolo corrisponde ad un termine dell'elemento di matrice. Il significato dei singoli termini ed i legami tra loro sono fissati dalle *regole di Feynman*, di cui abbiamo visto qualche esempio. Analoghe prescrizioni esistono anche per il calcolo dei processi regolati dalle interazioni deboli e forti. Come già ricordato, in questo testo

useremo questi diagrammi unicamente per una illustrazione schematica dei vari processi, in quanto una trattazione quantitativa richiede la conoscenza della teoria relativistica dei campi.

La figura 5.1, come abbiamo detto, mostra il diagramma di Feynman per lo scattering elastico elettrone-protone. Adottiamo la convenzione che vede il tempo scorrere da sinistra verso destra mentre l'asse spaziale è orientato verso l'alto. Nei diagrammi le linee rette rappresentano i fermioni nello stato iniziale e finale. Le antiparticelle sono simbolizzate da frecce che puntano indietro nel tempo; i fotoni sono visualizzati da linee ondulate, i bosoni pesanti da linee tratteggiate e i gluoni da linee elicoidali. I punti dove tre o più linee del grafico si incontrano sono detti *vertici* o *nodi*. L'intensità dell'interazione tra il bosone virtuale e il fermione è chiamata costante di accoppiamento. Per l'interazione elettromagnetica è proporzionale alla carica elettrica. In un generico grafico, i vertici rappresentano l'intensità dell'accoppiamento dell'interazione moltiplicata per la carica relativa del fermione. Inoltre in ciascun vertice devono valere le appropriate leggi di conservazione. Per esempio, durante l'interazione è possibile che i fermioni cambino alcune loro proprietà: se il bosone di Gauge è carico, allora i fermioni dopo l'interazione avranno la carica variata in modo che ad ogni vertice la carica elettrica si conservi, così come si deve conservare il quadrimpulso. Ricordiamo inoltre che la particella scambiata è off mass-shell: è quindi virtuale.

Lo scambio del fotone tra l'elettrone e il protone può anche essere pensato come una emissione del fotone da parte dell'elettrone con conseguente rinculo; il fotone è poi assorbito dal protone che, in seguito a ciò, ne assorbe anche il quadrimpulso modificando la sua direzione di moto. Quindi c'è uno scambio di energia ed impulso tra l'elettrone e il protone: si esercita quindi una forza tra le particelle di materia, ma questa è però sempre il risultato di una interazione locale tra le particelle e i campi di forza.

Nelle figure 5.2, 5.3 e 5.4 sono mostrati alcuni diagrammi di Feynman per processi virtuali che coinvolgono elettroni, positroni e fotoni. Ciascuno di questi processi ha un solo vertice, e quindi, secondo la regola che abbiamo enunciato, ha una ampiezza proporzionale a  $\sqrt{\alpha}$ , a cui è associata una probabilità proporzionale al quadrato dell'ampiezza, ossia ad  $\alpha$ , costante di accoppiamento elettromagnetica: sono quindi grafici al *primo ordine in  $\alpha$* . Notiamo di nuovo che l'emissione di un fotone reale da parte di un elettrone non può conservare l'energia e l'impulso. Tuttavia il principio di indeterminazione di Heisenberg,  $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ , permette la non conservazione dell'energia

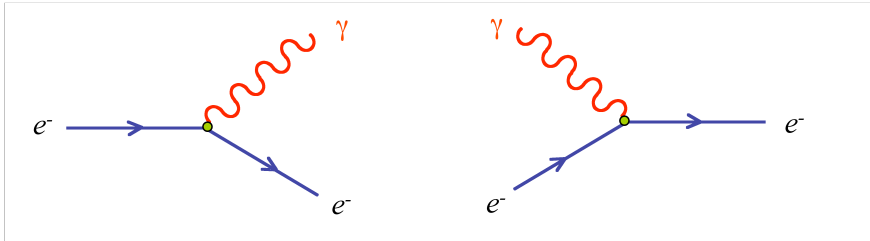


Figura 5.2: Vertici elettrone-fotone: a sinistra,  $e^- \rightarrow e^- + \gamma$  ; a destra,  $\gamma + e^- \rightarrow e^-$ .

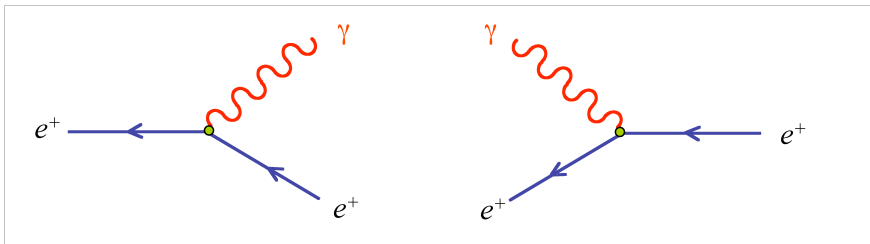


Figura 5.3: Vertici positrone-fotone: a sinistra,  $e^+ \rightarrow e^+ + \gamma$  ; a destra,  $\gamma + e^+ \rightarrow e^+$ .

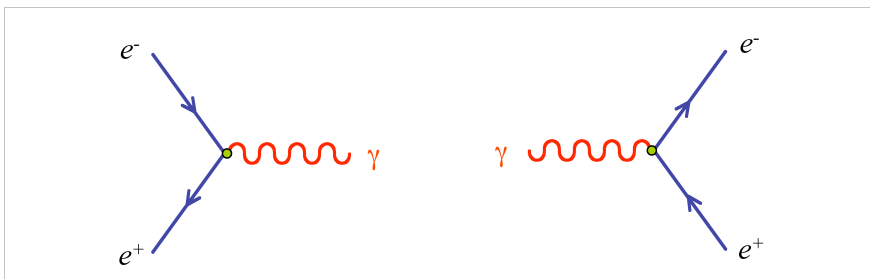


Figura 5.4: A sinistra, annichilazione  $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$  ; a destra, creazione di coppia  $\gamma \rightarrow e^- + e^+$ .



per un tempo  $\Delta t$  che soddisfi la relazione

$$\Delta t \leq \hbar/\Delta E_e = \hbar/E_\gamma. \quad (5.6)$$

Ma allora l'emissione o il riassorbimento di un fotone di energia  $E_\gamma$  da parte di un elettrone all'interno di un intervallo di tempo che soddisfa questa condizione in principio *non è misurabile*. Nessuno di questi processi da solo può rappresentare un fenomeno fisico osservabile.

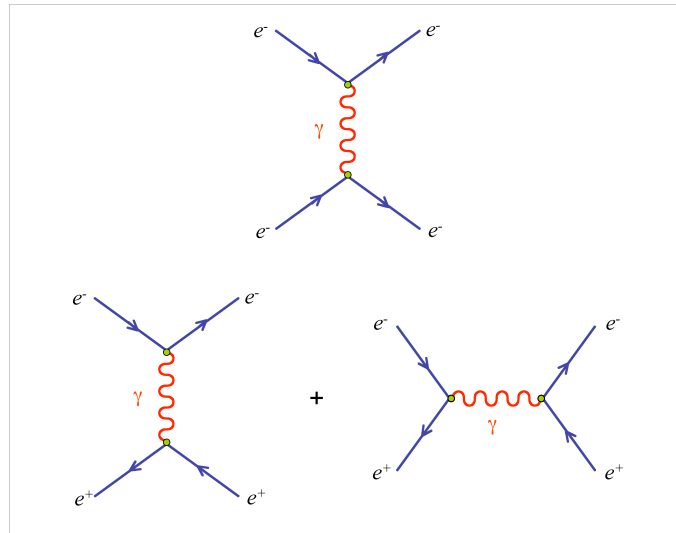


Figura 5.5: Grafici del secondo ordine in  $\alpha$ : in alto, diffusione  $e^- e^-$  ; in basso diffusione  $e^+ e^-$ .

Per avere un processo osservabile, bisogna considerare grafici al secondo ordine in  $\alpha$ , come quelli della figura 5.5, dove una particella virtuale emessa (o assorbita) nel primo vertice viene assorbita (o emessa) nel secondo. In questo caso tutte le particelle che entrano o escono dal diagramma sono reali (ossia hanno la massa invariante che compete loro, sono *on mass-shell*). Notiamo anche che due grafici che hanno lo stesso stato iniziale e lo stesso stato finale (nella figura, i due grafici della diffusione  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$  che coinvolgono lo scambio, rispettivamente, di un fotone di tipo spazio e uno di tipo tempo) sono indistinguibili dal punto di vista della meccanica quantistica (il fotone non è osservabile) e devono quindi essere sommati tra loro per il calcolo della

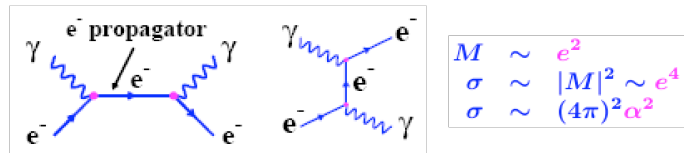


Figura 5.6: Grafico di Feynman per l'effetto Compton.

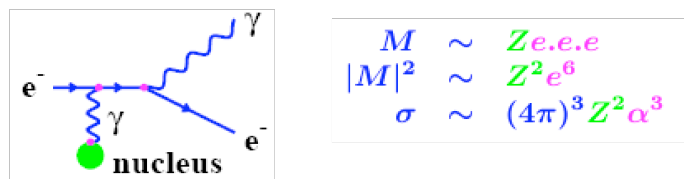


Figura 5.7: Grafico di Feynman per la Bremsstrahlung nel campo elettromagnetico del nucleo.

probabilità totale. Viceversa, per la diffusione  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  lo scambio di un fotone di tipo tempo non interviene, perché nel vertice  $e^-e^- \rightarrow \gamma$  non si conserverebbe la carica elettrica.

I grafici di Feynman dei processi studiati nel capitolo 4 sono mostrati in figura 5.6 per il processo Compton (del secondo ordine in  $\alpha$ ), in figura 5.7 per la Bremsstrahlung ed in figura 5.8 per la creazione di coppie: com'è facile verificare, questi ultimi due processi sono del terzo ordine in  $\alpha$ . Nelle figure sono anche indicati i valori delle ampiezze e delle sezioni d'urto relative ai vari processi.

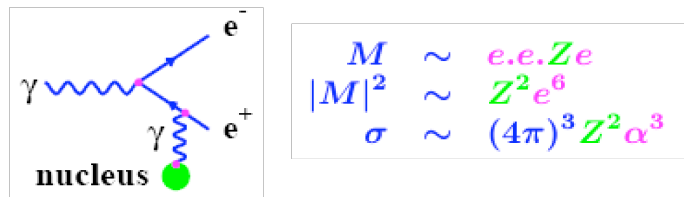


Figura 5.8: Grafico di Feynman per la produzione di coppie nel campo elettromagnetico del nucleo.

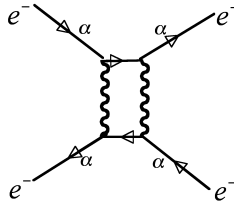


Figura 5.9: Diagramma di Feynman di ordine  $\alpha^4$ .

Nulla vieta di scambiare più di un fotone come in figura 5.9. Tuttavia i diagrammi agli ordini superiori sono soppressi da potenze crescenti di  $\alpha$  che vale  $1/137$ . Questo è il motivo per cui in elettrodinamica quantistica di solito è sufficiente considerare solo i diagrammi agli ordini più bassi.

Concludiamo questo paragrafo sottolineando che quanto illustrato dà una spiegazione del motivo per cui le forze elettromagnetiche decrescono rapidamente con la distanza ( $f \propto 1/r^2$ ). Ricordiamo ancora una volta la relazione  $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ . Dunque se un elettrone emette un fotone virtuale di energia grande, esso può esistere solo per un tempo molto corto e può quindi esercitare una forza intensa solo su di un altro elettrone che gli passi vicino. D'altra parte un fotone virtuale di piccola energia può avere influenza, sebbene con intensità più debole, su distanze più grandi.

## 5.4 Range delle interazioni forti e ipotesi di Yukawa

La semplice osservazione che i nuclei, formati da protoni e neutroni, sono stabili dimostra l'esistenza di una forza, molto più intensa di quella repulsiva tra le cariche elettriche dei protoni, capace di tenere insieme i nucleoni in una regione spaziale di qualche fermi di raggio. Si deve poi notare che per diffusioni di particelle  $\alpha$  a distanze inferiori a circa 2 fermi la formula di Rutherford non riproduce i dati sperimentali. Questo è dovuto alla interazione forte tra i nucleoni e la particella incidente. il raggio di azione, o *range*, delle forze nucleari,  $R$ , è dunque dell'ordine di 1-2 fm. L'interazione è attrattiva fino a distanze dell'ordine di  $10^{-1}$  fm e diventa poi repulsiva a causa del principio di esclusione di Pauli. La prima interpretazione del range delle forze

nucleari è stata data da Hideki Yukawa nel 1935 in termini di scambio, tra neutrone e protone, di una particella che nello stato libero venne in seguito identificata come il pione (vedi capitolo 6). Il modello, simile a quello per le forze elettromagnetiche appena discusso, ipotizza che la forza tra i nucleoni del nucleo sia dovuta allo scambio di quanti del campo nucleare, che sono i messaggeri della forza, di cui i nucleoni sono le “sorgenti”. Il modello deve spiegare l'intensità della forza, il corto raggio d'azione ed infine il fatto che le forze di tipo nucleare che si esercitano tra protoni-protoni, protoni-neutroni e neutroni-neutroni, sembrano essere uguali. Applicando ancora una volta il principio di indeterminazione di Heisenberg tra il tempo e l'energia e sapendo dai dati sperimentali che il raggio di azione delle forze nucleari era dell'ordine del fermi, Yukawa stimò l'ordine di grandezza della massa del bosone continuamente emesso e riassorbito dai nucleoni nel nucleo: se il range del bosone scambiato deve essere 1-2 fm, ponendo  $R = c\Delta t$  e  $\Delta E = Mc^2$ , per rispettare il principio di Heisenberg dovremo avere:

$$\Delta E \Delta t \simeq \hbar \rightarrow Mc^2 \simeq \frac{\hbar c}{R} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \div 2 \text{ fm}} = 100 \div 200 \text{ MeV} \quad (5.7)$$

Il bosone di Yukawa venne chiamato *mesone*, dal greco  $\mu\epsilon\sigma\omicron\zeta$ , intermedio, in quanto di massa intermedia tra quella dell'elettrone e quella del protone. Se combiniamo gli operatori dell'energia e dell'impulso, in unità naturali ( $\hbar = c = 1$ )  $E = i\partial/\partial t$  e  $p = -i\partial/\partial x$ , con la relazione tra energia, impulso e massa della relatività ristretta,  $E^2 = p^2 + M^2$ , otteniamo l'equazione di Klein-Gordon, che rappresenta l'equazione quanto-relativistica che devono soddisfare le funzioni d'onda dei bosoni:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\nabla^2 - M^2) \psi \quad (5.8)$$

e si riduce all'equazione di d'Alembert nel limite  $M \rightarrow 0$ . In condizioni statiche, l'equazione diventa:

$$\nabla^2 \psi = M^2 \psi \quad (5.9)$$

ed ammette soluzioni del tipo

$$\psi = -\frac{g_s^2}{4\pi r} e^{-Mr} \quad (5.10)$$

che si riducono a  $\psi \propto 1/r$  per  $M = 0$  (per  $M = 0$ , l'equazione statica di Klein-Gordon (5.9) si riduce all'equazione del potenziale elettrostatico nel

vuoto). Per analogia col campo elettrostatico, se consideriamo un nucleone di prova in prossimità di un altro nucleone che costituisce la sorgente dei mesoni di Yukawa, possiamo allora interpretare la soluzione dell'equazione di Klein-Gordon non solo come la funzione d'onda del bosone, ma anche come il potenziale del campo generato dalla sorgente della forza nucleare:

$$U(r) = -\frac{g_s^2}{4\pi r} e^{-Mr} \quad (5.11)$$

e considerare  $g_s$  come la carica nucleare, analoga alla carica elettrica. L'analogo di  $\alpha$  sarà quindi  $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ , costante di accoppiamento nucleare che caratterizza l'interazione forte fino a distanze dell'ordine di  $R = \hbar/Mc$  che coincide con la lunghezza d'onda Compton del mesone. Per distanze inferiori a  $10^{-1}$  fm, il potenziale diventa repulsivo a causa del principio di esclusione di Pauli. Complessivamente, il potenziale effettivo può essere approssimato come una buca di potenziale di  $30 \div 40$  MeV.

Come vedremo nel capitolo 6, la massa del mesone di Yukawa ha un valore molto simile a quello della particella costituente la componente dura dei raggi cosmici, il muone. Con la osservazione di questa particella, questa fu identificata con il mesone di Yukawa, ma fu presto dimostrato sperimentalmente da Conversi, Pancini e Piccioni che i muoni, nella interazione con la materia, non hanno il comportamento di una particella che interagisce forte con protoni e neutroni. Il modello di Yukawa ebbe un grande successo a partire dal 1947, quando fu finalmente identificato il pione carico, o mesone  $\pi$ , con massa  $M_\pi \simeq 140 \text{ MeV}/c^2$  e successivamente fu osservato anche il pione neutro, con valore di massa simile.

Nella figura 5.10 sono mostrati alcuni diagrammi di Feynman che illustrano come le interazioni tra protoni e neutroni derivano dallo scambio dei mesoni carichi e neutri. Il protone (o il neutrone) è in uno stato di attività continua ed emette ed assorbe pioni. I pioni sono virtuali e la conservazione dell'energia impedisce loro di allontanarsi troppo dal nucleone di origine: ciascun nucleone è circondato da una nuvola di pioni virtuali che fluttuano continuamente dal protone al neutrone e viceversa. I protoni e neutroni interagiscono tra loro attraverso questa nuvola di pioni e questo scambio dà come risultato una forza attrattiva. Oggi sappiamo che i pioni sono particelle con struttura interna (sono stati legati di quark e antiquark, vedi il paragrafo 7.7) e non sono i bosoni mediatori dell'interazione nucleare. Nonostante questo, le basi teoriche del modello di Yukawa sono tuttora valide e anche

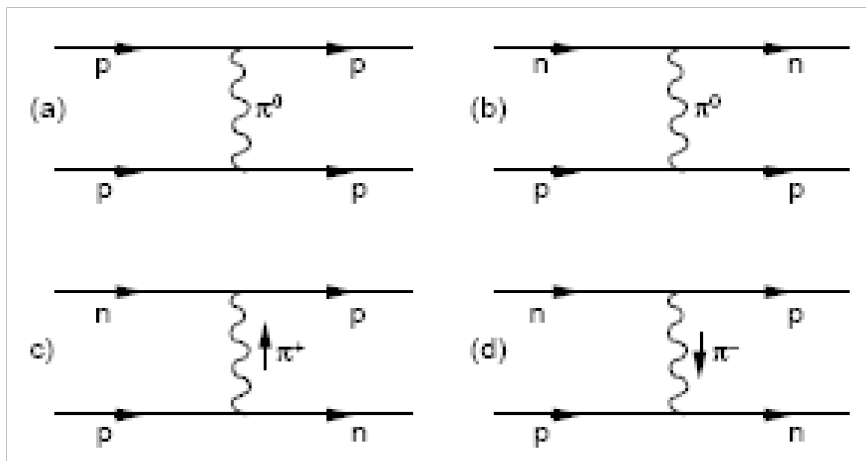


Figura 5.10: Alcuni diagrammi di Feynman che descrivono le forze tra i nucleoni in termini di scambio di mesoni  $\pi$  carichi e neutri.

ipotizzando soltanto lo scambio di mesoni vettoriali (i mesoni  $\rho$ ) e scalari (i pioni) si riescono a spiegare alcuni potenziali nucleari.

## 5.5 Evidenza sperimentale dello scambio di mesoni carichi

La distribuzione sperimentale della diffusione elastica neutrone-protone in funzione dell'angolo di diffusione nel riferimento del centro di massa è mostrata in figura 5.11.

Si può dare in maniera semplice una stima degli angoli di diffusione considerando che per lo scattering elastico  $|\vec{p}_i| \sim |\vec{p}_f|$  e  $\Delta p \simeq p\vartheta$ . D'altra parte,  $\Delta p \simeq \langle f \rangle \Delta t$ , dove  $\Delta t \simeq R_0/v$  è il tempo di interazione, mentre  $\langle f \rangle$  è la forza media, che può essere stimata dal rapporto tra la profondità della buca di potenziale e il raggio d'azione:  $\langle f \rangle \simeq V_0/R_0$ . In definitiva

$$\vartheta \simeq \frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{\langle f \rangle \Delta t}{p} \simeq \frac{V_0}{R_0} \frac{R_0}{v} \frac{1}{p} = \frac{V_0}{vp} = \frac{V_0}{2T} \quad (5.12)$$

dove  $T$  è l'energia cinetica del neutrone incidente. Nell'esperimento preso in esame,  $100 \text{ MeV} < T < 600 \text{ MeV}$ , che per  $V_0 = 35 \text{ MeV}$  dà un angolo

$\vartheta < 10^\circ$ . Nella figura 5.11 si osserva in effetti una distribuzione concentrata a piccoli angoli, ma sono presenti in egual misura anche angoli prossimi a  $180^\circ$ ! La spiegazione di Yukawa è semplicissima: se si assume che esistano sia mesoni neutri che carichi, la diffusione può procedere anche col neutrone incidente che si trasforma in un protone, emettendo un mesone negativo, e procede in avanti a piccolo angolo, mentre il protone assorbendo il mesone si trasforma in un neutrone, che nel centro di massa procede in direzione opposta, a circa  $180^\circ$  rispetto alla direzione incidente.

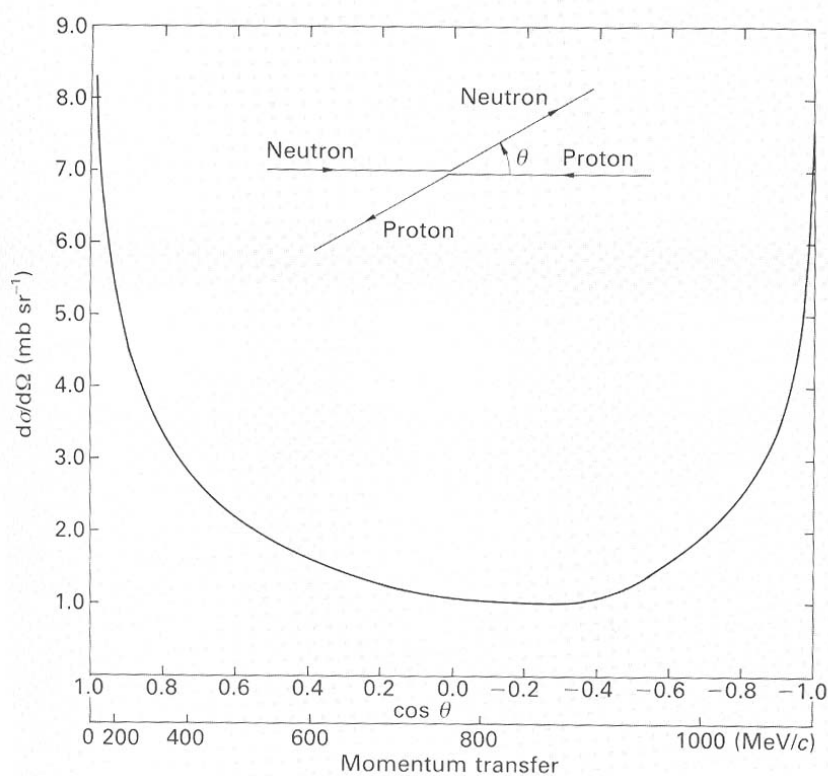


Figura 5.11: Diffusione elastica di neutrone su protone: distribuzione angolare del neutrone diffuso; nella scala inferiore è riportato il momento trasferito  $\Delta p$  per  $T = 600 \text{ MeV}$ .

## 5.6 Il propagatore per il potenziale di Yukawa

Torniamo ora al propagatore nel caso del potenziale di Yukawa. Consideriamo la diffusione di un pione da parte di un potenziale nucleare  $V(r)$  ad un angolo  $\vartheta$  rispetto alla direzione iniziale del pione ed indichiamo con  $\vec{p} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$  l'impulso trasferito dal pione. Calcoliamo di nuovo l'ampiezza di diffusione nell'approssimazione di Born, come trasformata di Fourier del potenziale:

$$\begin{aligned} M_{fi} &\propto \frac{1}{4\pi} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} V(r) d^3\vec{r} \\ &= -\frac{\alpha_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ipr \cos \vartheta} \frac{e^{-Mr}}{r} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \end{aligned} \quad (5.13)$$

che integrata su  $\varphi$  e chiamando  $y = \cos \vartheta$  diventa

$$\begin{aligned} M_{fi} &\propto -\frac{\alpha_s}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r e^{ipry} e^{-Mr} dr dy \\ &= -\frac{\alpha_s}{2ip} \int_0^\infty (e^{ipr} - e^{-ipr}) e^{-Mr} dr \\ &= -\frac{\alpha_s}{2ip} \int_0^\infty (e^{(ip-M)r} - e^{(-ip-M)r}) dr \\ &= \frac{\alpha_s}{2ip} \left( \frac{1}{ip-M} + \frac{1}{ip+M} \right) = \frac{\alpha_s}{2ip} \frac{2ip}{-p^2 - M^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ossia

$$M_{fi} \propto -\frac{\alpha_s}{M^2 + p^2} \quad (5.15)$$

che dà l'ampiezza di diffusione, espressa in funzione del momento trasferito al pione. Questa derivazione non è completa, perchè oltre all'impulso si deve considerare anche l'energia trasferita al pione. Un calcolo analogo in quattro dimensioni dà l'espressione relativisticamente corretta:

$$M_{fi} \propto -\frac{\alpha_s}{\mathbf{p}^2 + M^2} \quad (5.16)$$

dove ora  $\mathbf{p}$  è il quadrimpulso trasferito, ed il termine  $1/(\mathbf{p}^2 + M^2)$  rappresenta il contributo del propagatore.



## 5.7 Il propagatore delle interazioni deboli

Notiamo che il propagatore di Yukawa dato dalla (5.16) è valido per qualunque bosone intermedio dotato di massa, dunque anche per i bosoni intermedi delle interazioni deboli. Anche questa interazione è a corto range, ma Fermi, benché avesse già postulato che questa circostanza fosse dovuta allo scambio di bosoni pesanti, formulò la sua teoria delle interazioni deboli assumendo che queste fossero dovute ad una interazione puntuale a quattro fermioni, ossia, per il decadimento  $\beta$ , con un grafico come quello a destra della figura 5.12. Se consideriamo invece lo scambio di un bosone pesante di massa  $M_W$  (grafico a sinistra della figura 5.12), l'elemento di matrice conterrà il propagatore e sarà analogo alla (5.16):

$$M(q) = -\frac{g_w^2}{q^2 + M_W^2}. \quad (5.17)$$

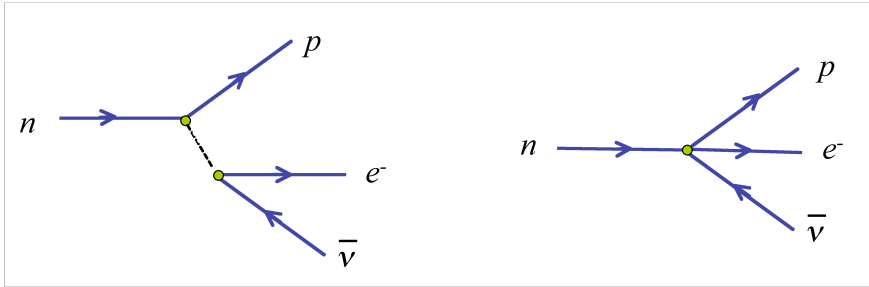


Figura 5.12: Diagrammi di Feynman per il decadimento  $\beta$ : a sinistra, l'interazione è mediata dal propagatore di un bosone pesante; a destra, il decadimento è provocato da una interazione puntuale a quattro fermioni.

Ora nel decadimento  $\beta$  dove i momenti trasferiti sono dell'ordine del MeV, per un bosone di massa  $M_W^2 \gg q^2$  l'ampiezza di transizione si riduce a  $g_w^2/M_W^2$  e deve essere uguale alla costante di Fermi

$$G = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (5.18)$$

L'unificazione delle interazioni deboli ed elettromagnetiche prevede che  $g_w \simeq e$  e che la differenza di intensità a basse energie sia dovuta alla differenza

tra la massa dei bosoni intermedi e la massa nulla del fotone, mentre ad alte energie ( $q^2 \gg M_W^2$ ) le due interazioni hanno la stessa intensità. Dalla (5.18) si ottiene anche una stima per la massa dei bosoni intermedi,  $M_W \simeq 80 \text{ GeV}/c^2$ , fatta per la prima volta negli anni '60 e molto vicina alle masse effettivamente osservate alla metà degli anni '80.

## 5.8 Leggi di decadimento di nuclei e particelle instabili

Se consideriamo  $N$  sistemi instabili identici con  $N$  sufficientemente grande e se

- i decadimenti sono tra loro indipendenti,
- la probabilità di decadimento nell'unità di tempo è una proprietà tipica del sistema e del processo di decadimento e *non* dipende dal tempo in cui avviene il decadimento,
- la probabilità di decadimento del singolo sistema *non* dipende da  $N$

allora la probabilità di decadimento in un intervallo di tempo  $dt$  può essere scritta come

$$dP = \lambda dt \quad (5.19)$$

dove  $\lambda$  è la *costante di decadimento* che caratterizza il processo ed ha le dimensioni dell'inverso del tempo. La variazione del numero di sistemi nell'intervallo di tempo  $dt$  è allora data da

$$dN = -\lambda N dt \quad (5.20)$$

che integrata rispetto al tempo con la condizione iniziale  $N(t=0) = N_0$  dà la *legge di decadimento*:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (5.21)$$

Per caratterizzare il tempo di decadimento si può utilizzare la *vita media*  $\tau$ , definita dal valor medio della distribuzione

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t N(t) dt}{\int_0^\infty N(t) dt} = \frac{1}{\lambda} \quad (5.22)$$

oppure il *tempo di dimezzamento*  $t_{1/2}$ , definito come l'intervallo di tempo nel quale il numero dei componenti si dimezza:

$$\int_0^{t_{1/2}} \lambda N(t) dt = \int_{t_{1/2}}^{\infty} \lambda N(t) dt = \frac{N_0}{2}. \quad (5.23)$$

La vita media, utilizzata nella fisica delle particelle, è legata al tempo di dimezzamento, utilizzato nella fisica dei nuclei, dalla relazione  $t_{1/2} = \tau \log 2$ .

Si definisce poi *attività di una sostanza radioattiva* (e si indica con  $A$ ) il numero di decadimenti per unità di tempo, dato dal prodotto della costante di decadimento per il numero di componenti, per cui  $A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$ . L'unità di misura dell'attività di una sostanza radioattiva è il Curie, o Ci, definito come l'attività di un grammo di radio:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ disintegrazioni/secondo};$$

in alternativa si utilizza il Bequerel, o Bq, che corrisponde ad una disintegrazione al secondo, per cui  $1 \text{ Bq} = 0.27 \cdot 10^{-10} \text{ Ci}$ .

Vediamo ora come si può rappresentare da un punto di vista quantistico un processo di decadimento: in meccanica quantistica lo stato di un sistema stabile, caratterizzato da un livello di energia  $E_i$ , è descritto dalla evoluzione temporale degli autostati a  $t = 0$ :

$$|\Psi_i(t)\rangle = |\Psi_{i0}\rangle e^{-\frac{iE_i t}{\hbar}}; \quad (5.24)$$

da cui

$$\langle \Psi_i(t) | \Psi_i(t) \rangle = \langle \Psi_{i0} | \Psi_{i0} \rangle \quad (5.25)$$

per cui la densità di probabilità si conserva.

Se il sistema può invece decadere, la probabilità dello stato iniziale  $|i\rangle$  non si conserva. La probabilità di decadimento si può calcolare con la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo<sup>3</sup>. L'evoluzione temporale del sistema (nel suo riferimento di riposo) può essere scritta come:

$$|\Psi(t)\rangle = a_i(t)|i\rangle + \sum_f a_f(t)|f\rangle \quad (5.26)$$

---

<sup>3</sup>Si veda ad esempio J.J. Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna* (Zanichelli, 1990), par. 5.8, oppure B.R. Martin and G. Show, *Particle Physics*, 2<sup>nd</sup> ed. (Wiley, 1997), par. B.5.1.

dove la sommatoria è estesa a tutti i possibili stati finali. Se vogliamo che l'ampiezza di probabilità dello stato  $|i\rangle$  decresca esponenzialmente nel tempo, la  $a_i(t)$  deve avere una parte reale del tipo  $e^{-\frac{\Gamma_i t}{2\hbar}}$ , in modo che sia

$$a_i(0)a_i^*(0) = 1; \quad a_i(t)a_i^*(t) = e^{-\frac{\Gamma_i t}{\hbar}} \quad (5.27)$$

Confrontando con la definizione di vita media  $\tau$  data dalla (5.22), abbiamo  $\Gamma_i = \hbar/\tau_i = \hbar\lambda$ . Per calcolare la  $\Gamma_i$  si può utilizzare la *regola d'oro di Fermi* valida in generale per tutte le probabilità di transizione (appendice 5.A). Si ha:

$$\Gamma_i = \frac{\hbar}{\tau_i} = \hbar W = 2\pi |M_{if}|^2 \int \rho_f d\Omega \quad (5.28)$$

Dalle relazioni precedenti si vede che tanto più piccolo è  $\tau_i$  tanto più grande è  $\Gamma_i$ : vediamo di nuovo in azione il principio di indeterminazione.  $\Gamma_i$ , che prende il nome di *larghezza di decadimento*, rappresenta l'incertezza con cui è nota l'energia dello stato non stazionario  $|\psi_i(t)\rangle$ , tanto maggiore quanto minore è la vita media dello stesso, in modo che  $\Delta E_i \tau_i \sim \hbar$ . La legge di decadimento può essere riscritta come:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\Gamma_i t}{\hbar}} \quad (5.29)$$

in base alla quale la larghezza di decadimento può essere calcolata sperimentalmente dal rapporto

$$\Gamma = -\hbar \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}. \quad (5.30)$$

## 5.9 La formula di Breit e Wigner

Vediamo come è possibile ricavare la distribuzione di energia degli stati eccitati dei nuclei e degli adroni, nota come *distribuzione di Breit e Wigner*, come conseguenza intrinseca delle caratteristiche di decadimento di uno stato quantico che abbiamo descritto nel paragrafo precedente.

Se riscriviamo la parte dipendente dal tempo dell'ampiezza di uno stato con vita media  $\tau = \hbar/\Gamma$  nel riferimento di quiete dello stato, chiamando  $M_0$  il valore centrale della sua massa a riposo, abbiamo:

$$\psi_i(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(M_0 c^2 - i\frac{\Gamma}{2})t} \quad (5.31)$$

per cui

$$|\psi_i(t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} \quad (5.32)$$

la distribuzione di probabilità in energia sarà data dalla trasformata di Fourier nello spazio coniugato di  $t$ :

$$\chi(Mc^2) \simeq \int_0^\infty \psi(t) e^{\frac{i}{\hbar}Mc^2t} dt \quad (5.33)$$

$$\chi(Mc^2) \propto \frac{1}{(Mc^2 - M_0c^2) + i\frac{\Gamma}{2}} \quad (5.34)$$

che al quadrato dà la formula di Breit-Wigner, che rappresenta la distribuzione di massa per una risonanza di massa  $M_0$  e larghezza  $\Gamma$ :

$$|\chi(Mc^2)|^2 \propto \frac{1}{(Mc^2 - M_0c^2)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}; \quad (5.35)$$

questa non è altro che la distribuzione Lorentziana, che ha una caratteristica forma a campana centrata intorno ad  $M_0c^2$ , mentre  $\Gamma$  rappresenta la larghezza a metà altezza della distribuzione.

Se il sistema può decadere in più stati finali e per ogni stato  $i$  il decadimento è caratterizzato da una *larghezza di decadimento parziale*  $\Gamma_i$ , la larghezza totale sarà la somma di tutte le larghezze parziali e la vita media del sistema sarà data dalla relazione

$$\frac{\hbar}{\tau} = \Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad (5.36)$$

mentre il rapporto  $\Gamma_i/\Gamma$  è detto *branching ratio* (in italiano, assai poco utilizzato, “rapporto di diramazione”) ed esprime la probabilità del singolo decadimento rispetto alla probabilità totale.

## 5.10 Intensità relativa delle interazioni fondamentali

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come sia le sezioni d’urto delle reazioni che i decadimenti dipendono, tramite la regola d’oro di Fermi, dagli elementi di matrice delle transizioni tra lo stato iniziale e lo stato finale,

mentre gli elementi di matrice a loro volta dipendono dalle costanti di accoppiamento, e dagli effetti del propagatore. Nella regola d'oro entra però anche la densità dello spazio delle fasi finale, sia nel caso delle reazioni che nel caso dei decadimenti. Per confrontare tra loro le intensità delle diverse interazioni, bisogna quindi tener conto di questi fattori. Nel caso dei decadimenti, il parametro che deve essere confrontabile è l'energia cinetica a disposizione nello stato finale che è data dal cosiddetto *valore- $Q$*  o  $Q$  della reazione ( $Q$  è definito in generale come la differenza tra l'energia cinetica finale e iniziale. Per un decadimento,  $Q$  è uguale alla differenza di massa tra lo stato iniziale e finale,  $Q = \Delta mc^2$ ).

Per esempio, possiamo confrontare le larghezze di decadimento delle particelle  $\Sigma$ . Queste appartengono alla famiglia delle particelle strane (vedi il par. 6.5) ed esistono con diversi valori di massa. La  $\Sigma^0(1383)$  può decadere per interazione forte in  $\Lambda(1115) + \pi^0$ , con  $Q = 130$  MeV e larghezza di decadimento  $\Gamma = 36$  MeV, a cui corrisponde  $\tau \sim 2 \cdot 10^{-23}$  s. La  $\Sigma^0(1192)$  non può accedere allo stesso decadimento, perché la differenza di massa con la  $\Lambda(1115)$  non è sufficiente per produrre un  $\pi^0$ . Decade quindi elettromagneticamente in  $\Lambda(1115) + \gamma$  con una vita media  $\tau \sim 10^{-19}$  s ed un  $Q = 77$  MeV, comparabile quindi col precedente. Vediamo che

$$\frac{\alpha_{forte}}{\alpha_{e.m.}} \simeq \sqrt{\frac{10^{-19}}{10^{-23}}} = 10^2. \quad (5.37)$$

Il decadimento elettromagnetico  $\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda(1115) + \gamma$  può essere a sua volta confrontato con il decadimento  $\Sigma^-(1189) \rightarrow p + \pi^0$ . In questo decadimento non si conserva la stranezza (vedi sempre il par. 6.5) per cui non può avvenire attraverso le interazioni forti, che conservano questo numero quantico. Si tratta quindi di un decadimento debole, con una vita media  $\tau \sim 10^{-10}$  s e  $Q = 189$  MeV. Dal rapporto tra le vite medie si ricava:

$$\frac{\alpha_{debole}}{\alpha_{e.m.}} \simeq \sqrt{\frac{10^{-19}}{10^{-10}}} = 10^{-5}. \quad (5.38)$$

Per completare il quadro, possiamo determinare il rapporto tra interazione elettromagnetica e gravitazionale confrontando direttamente la forza di Newton e la forza di Coulomb che si esercitano tra un protone ed un elettrone:

$$F_{gravitaz.} = G_N \frac{m_e m_p}{D^2}, \quad F_{e.m.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{D^2} \quad (5.39)$$

da cui  $\alpha_{gravitaz}/\alpha_{e.m.} \sim 10^{-40}$ , per cui, a livello nucleare, la gravitazione è completamente trascurabile.

## Appendice

### 5.A La seconda regola d'oro di Fermi

Come abbiamo visto nel paragrafo 3.1, la sezione d'urto è una quantità sperimentale misurata dalla frequenza dei conteggi  $dN/dt$ . Il quadrato dell'ampiezza dell'elemento di matrice di transizione  $M_{fi}$  espone invece la probabilità della transizione tra lo stato iniziale  $i$  e lo stato finale  $f$ . Ora la frequenza della reazione dipenderà dal prodotto della probabilità di transizione verso lo stato  $f$  per la densità degli stati finali disponibili per  $f$ , ossia la *densità dello spazio delle fasi*  $\rho$ , secondo quella che prende il nome di *seconda regola d'oro di Fermi*<sup>4</sup>, che esprime la probabilità per unità di tempo della reazione, normalizzata ad una particella proiettile ( $p$ ) ed una particella bersaglio ( $b$ ):

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho. \quad (5.40)$$

Ora in base alla (3.4) e alla (3.6) possiamo scrivere

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_p N_b} = \frac{\phi N_b \sigma}{N_p N_b} = \frac{n_p v_p N_b \sigma}{N_p N_b} = \frac{v_p \sigma}{V} \quad (5.41)$$

e quindi

$$\sigma = \frac{WV}{v_p} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho \frac{V}{v_p}. \quad (5.42)$$

La regola d'oro di Fermi (5.40) si può applicare anche ai decadimenti, per i quali  $M_{fi}$  rappresenta l'elemento della matrice di transizione dallo stato iniziale  $i$  ad uno dei possibili stati finali  $f$ .

Sia per le reazioni che per i decadimenti, il calcolo di  $\rho(E')$  può essere fatto tenendo conto che, per il principio di indeterminazione, nello spazio delle fasi a 6 dimensioni, definito dall'impulso e dalle coordinate della particella, ognuna delle particelle dello stato finale occupa un volume pari a  $(2\pi\hbar)^3$ , per

---

<sup>4</sup>Si veda ad esempio J.J. Sakurai, *Meccanica Quantistica Moderna* (Zanichelli, 1990), par. 5.6.

cui la densità per un generico elemento di volume  $V$  con impulso compreso tra  $p'$  e  $p' + dp'$  è data da

$$dn = \frac{V4\pi p'^2 dp'}{(2\pi\hbar)^3} \quad (5.43)$$

che può essere trasformato in una densità di energia attraverso la relazione

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE'} = \frac{dn}{dp'} \frac{dp'}{E'} \quad (5.44)$$

dove  $dE'/dp'$  può essere calcolato da  $E' = \sqrt{p'^2 c^2 + m^2 c^4}$  da cui

$$\frac{dE'}{dp'} = \frac{1}{2E'} 2p' c^2 = \frac{c^2 p'}{E'} = v' \quad (5.45)$$

che inserito nella (5.44) dà:

$$\rho(E') = \frac{dn}{dE'} = \frac{dn}{v' dp'} = \frac{V4\pi p'^2}{v'(2\pi\hbar)^3}. \quad (5.46)$$