

Capitolo 4

Il passaggio della radiazione nella materia

Fin dai primi esperimenti che abbiamo descritto nei precedenti capitoli, le diverse forme di radiazione α , β , γ venivano distinte per le modalità con le quali attraversavano la materia, interagendo con essa fino a venirne assorbite. Queste diverse modalità sono dovute ai processi con cui le diverse radiazioni trasferiscono energia alla materia, sempre per lo più eccitandone i sistemi atomici, fino ad arrivare alla ionizzazione di essi. Il passaggio delle varie forme di radiazione può essere rivelato (e distinto) proprio osservando i processi di diseccitazione atomica (per esempio attraverso la scintillazione, nel caso la diseccitazione avvenga con emissione di un segnale luminoso) o raccogliendo le correnti associate al moto in opportuni campi elettrici esterni degli ioni liberati (come nel caso del contatore Geiger o delle camere a ionizzazione utilizzate da Chadwick e descritte nel par. 3.10). Dai più semplici rivelatori utilizzati nei primi esperimenti a quelli sofisticatissimi richiesti dagli esperimenti odierni, la rivelazione delle particelle avviene dunque raccogliendo un segnale variamente associato al rilascio di energia in questi processi di eccitazione o ionizzazione. Per entrambi i processi si parla in generale di *perdite di energia per ionizzazione*. Nei prossimi paragrafi prenderemo in esame le leggi che regolano la perdita di energia per ionizzazione delle particelle cariche, per poi passare ad esaminare gli effetti del passaggio della radiazione neutra (i raggi γ , ossia i fotoni) e finire con una breve panoramica sulle principali famiglie di rivelatori.

4.1 La formula di Bohr

Nella derivazione della formula di Rutherford, abbiamo assunto che il nucleo (avendo una massa molto maggiore del proiettile) non sia in grado di assorbire energia. In questo modo però abbiamo trascurato la possibilità di trasferire energia agli elettroni degli atomi o delle molecole del mezzo. Il calcolo di questa energia può essere fatto con una trattazione classica, arrivando ad una formula ricavata da Bohr nel 1914. Se la particella incidente, di massa $m \gg m_e$ e carica ze viaggia con velocità v , nel suo sistema di riferimento vedrà gli elettroni del mezzo (che assumiamo si muovano con velocità trascurabile rispetto a v , per cui si possano considerare fermi) avanzare con velocità $-v$. Se consideriamo un elettrone a distanza b dalla traiettoria della particella incidente, la componente dell'impulso trasferito ad esso sarà dato da $\vec{p}_e = \int e \cdot \vec{\mathcal{E}} dt$, dove $\vec{\mathcal{E}}$ indica il campo elettrico. La componente longitudinale si annulla per simmetria, la componente trasversa (che è la stessa nel sistema di riferimento della particella incidente e nel laboratorio) è data da

$$p_e = \int e \cdot \mathcal{E}_\perp dt = \frac{e}{v} \int \mathcal{E}_\perp dx. \quad (4.1)$$

L'integrale che compare nella (4.1) si può valutare immediatamente applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio b e di lunghezza infinita intorno alla traiettoria della particella:

$$\Phi(\vec{\mathcal{E}}) = \int \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{n} dS = 2\pi b \int \mathcal{E}_\perp dx = \frac{ze}{\epsilon_0}. \quad (4.2)$$

Sostituendo l'integrale nella (4.1) si ottiene:

$$p_e = \frac{e}{v} \frac{ze}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \frac{2b}{v} \quad (4.3)$$

dove l'ultimo termine evidenzia che l'impulso è quello che sarebbe trasferito da una forza costante pari ad $ze^2/4\pi\epsilon_0 b^2$ per un tempo $2b/v$, detto *tempo d'urto*.

Nell'approssimazione non relativistica, a questo impulso trasferito corrisponderà una energia trasferita all'elettrone del mezzo (e quindi perduta dalla particella in un singolo urto con un elettrone) data da

$$T_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 b} \right)^2 \frac{2}{m_e v^2}. \quad (4.4)$$

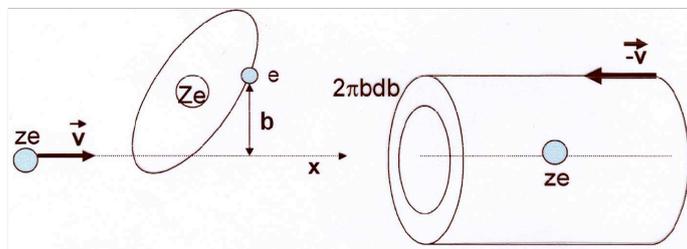


Figura 4.1: A sinistra, una particella di carica ze passa con velocità v ad una distanza b da un elettrone del mezzo. A destra, la particella vede gli elettroni del mezzo avanzare verso di lei con velocità $-v$. Gli elettroni del mezzo contenuti nel volume della corona cilindrica rappresentata passano tutti ad una distanza compresa tra b e $b + db$.

Introducendo il raggio classico dell'elettrone¹ $r_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.8$ fm e $\beta = v/c$, possiamo scrivere:

$$T_e = 2m_e c^2 \frac{z^2 r_e^2}{\beta^2 b^2} \quad (4.5)$$

ossia

$$b^2 = 2m_e c^2 \frac{z^2 r_e^2}{\beta^2 T_e} \quad (4.6)$$

La probabilità dw che in una unità di percorso la particella subisca una collisione con parametro d'urto compreso tra b e db (si veda la figura 4.1) sarà

$$dw = 2\pi b db n_e \quad (4.7)$$

dove n_e è la densità di elettroni per unità di volume. Differenziando la (4.6) si ricava

$$|2bdb| = |2r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{dT_e}{T_e^2}| \quad (4.8)$$

per cui si ha

$$\frac{dw}{dT_e} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 n_e \frac{z^2}{\beta^2} \frac{1}{T_e^2} \quad (4.9)$$

¹Il raggio classico dell'elettrone è definito come il raggio di una sfera per la quale l'energia necessaria per concentrare una carica e sulla sua superficie è uguale alla (metà della) energia di riposo dell'elettrone, come se l'energia associata alla massa fosse di origine elettromagnetica.

da cui si vede che le collisioni con trasferimento di energia T_e elevato sono rare.

Per avere l'energia totale persa dalla particella in un tratto dx per urti con elettroni a distanze comprese tra b e $b + db$ dovremo moltiplicare la perdita dovuta ad un singolo urto, data dalla (4.5), per il volume della corona cilindrica corrispondente (si veda sempre la figura 4.1), $2\pi b db dx$ moltiplicato per la densità di elettroni n_e , per cui:

$$\frac{d^2 E}{dx db} = -4\pi n_e m_e c^2 \frac{z^2 r_e^2}{\beta^2 b} \quad (4.10)$$

che integrata su b tra una distanza minima b_m e massima b_M diventa:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \int_{b_m}^{b_M} \frac{db}{b} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{b_M}{b_m}. \quad (4.11)$$

Una stima di b_m e b_M può essere fatta in base alle seguenti osservazioni:

- il tempo dell'urto che abbiamo visto essere dell'ordine di b/v deve essere piccolo rispetto al tempo di rivoluzione dell'elettrone $\gamma T_e = \gamma/\omega_e$ dove il fattore γ tiene conto della dilatazione del tempo di rivoluzione nel riferimento di riposo della particella in moto, per cui $b_M \simeq v\gamma/\omega_e = \beta c\gamma/\omega_e$;
- in base al principio di indeterminazione, se l'interazione varia l'impulso dell'elettrone di una quantità p_e la posizione non può essere determinata meglio di $b_m = \hbar/p_e = \hbar/(m_e c \beta \gamma)$.

Inserendo questi valori nella (4.11) otteniamo finalmente la formula di Bohr:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e} = 4\pi \frac{N_A Z \rho}{A} r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e} \quad (4.12)$$

dove abbiamo utilizzato per la densità degli elettroni di una sostanza con numero atomico Z e peso atomico A la formula $n_e = N_A Z \rho / A$. Essendo il numero di Avogadro riferito al grammoatomo e misurando la densità in g/cm^3 , se $m_e c^2$ è espresso in eV, la perdita di energia per unità di lunghezza risulta espressa in eV/cm.

Nel calcolo fatto non si è considerata l'energia trasferita al nucleo. Tuttavia, la dipendenza dalla massa del bersaglio ci fa capire come il contributo dei nuclei sia migliaia di volte più piccolo e possa quindi essere trascurato.

4.2 La formula di Bethe e Block

Un calcolo delle perdite per ionizzazione che tiene conto degli effetti quantistici, valido per particelle diverse dagli elettroni (per i quali si devono considerare gli effetti quantistici legati all'identità delle due particelle in interazione) e per particelle con velocità maggiori di qualche centesimo di c , è stato fatto da Bethe e Block nel 1930, e dà il seguente risultato:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{N_A Z \rho}{A} r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right) \quad (4.13)$$

dove I è il potenziale medio di ionizzazione del sistema atomico in esame. $\delta(\gamma)$ è la cosiddetta correzione di densità che tende a limitare per grandi valori di γ la crescita logaritmica delle perdite. Raccogliendo tutti i termini costanti in $C = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \simeq 0.307 \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2$ e dividendo per la densità ρ la (4.13) si può riscrivere come

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = C \frac{z^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right) \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2. \quad (4.14)$$

Questa ultima formulazione mette in evidenza le proprietà della Bethe-Block, tutte illustrate nella figura 4.2:

- trascurando la dipendenza logaritmica da I , la perdita di energia per ionizzazione, espressa in termini dello *spessore di massa* ρdx (che si misura in g/cm^2)² dipende come Z/A dalle proprietà dei diversi materiali; poiché, a parte l'idrogeno, Z/A è circa 1/2 per tutte le sostanze, in prima approssimazione la perdita di energia per spessore di massa è indipendente dal materiale;
- per piccoli valori di β , la perdita di energia diminuisce come $1/\beta^2$, per poi passare per un minimo e risalire in maniera logaritmica quando $\beta\gamma = p/Mc > 1$ (*risalita relativistica*); se, come si è detto, a grandi valori di γ la risalita relativistica è compensata dall'effetto densità, la perdita di energia tende ad un valore costante;

²per uno spessore finito Δx , lo spessore di massa $\rho\Delta x$ si può interpretare come la quantità di massa coperta da una superficie unitaria di materiale

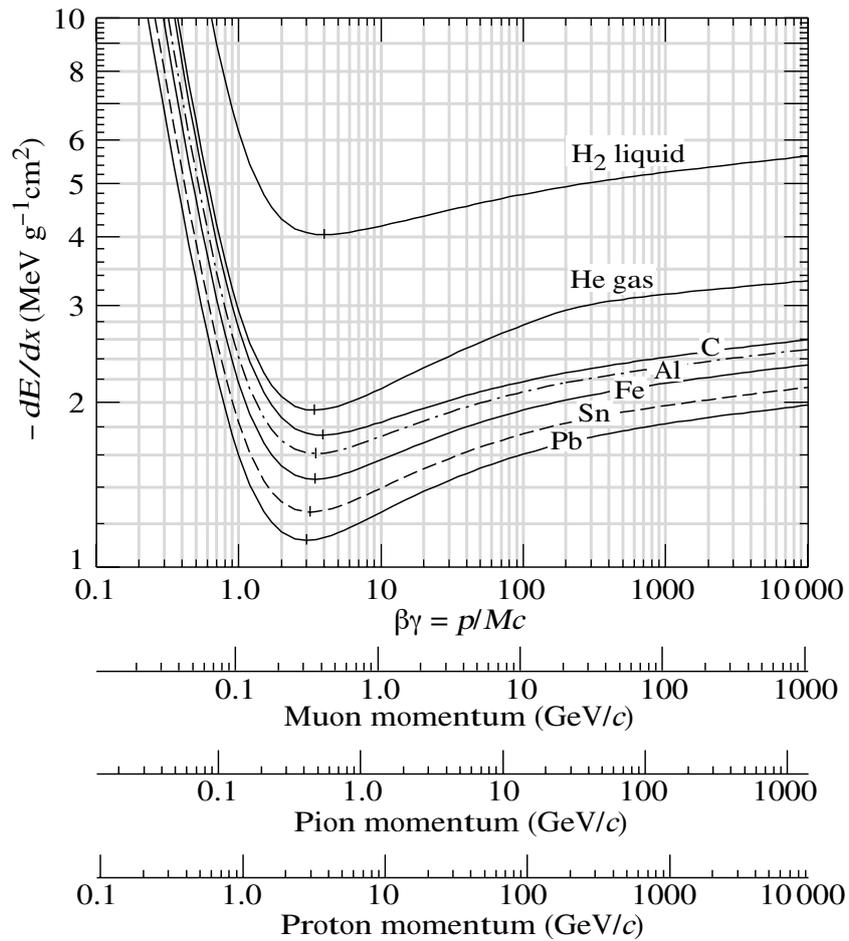


Figura 4.2: Andamento della perdita di energia per ionizzazione (formula di Bethe-Block) in funzione del prodotto $\beta\gamma$ per diversi materiali (idrogeno, elio, carbonio, alluminio, ferro, stagno e piombo). Le scale in basso riportano il corrispondente valore dell'impulso per muoni, pioni e protoni (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

- il $\beta\gamma$ che corrisponde al minimo dipende debolmente dai diversi materiali tramite I ; per elementi non eccessivamente leggeri varia da 3.5 a 3 passando da $Z = 7$ a $Z = 100$. La perdita di energia al minimo vale $1 \div 2 \text{ MeV gr}^{-1} \text{ cm}^2$; le particelle al minimo di ionizzazione sono dette, in inglese, *minimum ionizing particles*, o semplicemente MIP.
- la perdita di energia è proporzionale al quadrato della carica della particella, per cui quella delle particelle α ($z=2$) sarà 4 volte quella del protone;
- la massa della particella incidente entra nella formula solo tramite il parametro $\beta\gamma = p/Mc$, per cui la formula, espressa in termini di $\beta\gamma$, è universale (con l'eccezione degli elettroni, vedi oltre); in termini dell'energia o dell'impulso della particella incidente, viceversa, la perdita di energia di particelle di massa diversa si otterrà da una semplice traslazione della scala delle ascisse.

Notiamo infine che la formula di Bethe-Block esprime la perdita media di energia, che essendo un processo stocastico dovuto a più urti elementari, sarà soggetta a fluttuazioni. Notiamo anche che, mentre per spessori grandi il teorema del limite centrale garantisce che le fluttuazioni siano gaussiane, per piccoli spessori, o per materiali a bassa densità, compaiono code per perdite di energia elevate, la cui teoria è stata sviluppata da Landau (*code di Landau*).

4.3 Il percorso residuo

Si definisce *percorso residuo* (o, in inglese, *range*) il cammino che una particella può compiere prima di perdere tutta la sua energia cinetica. Se l'energia depositata in un tratto dx è data da $dE = -(dE/dx)dx$, possiamo scrivere che $dx = dE/(-(dE/dx))$, per cui il range si può ottenere integrando il dx su tutta l'energia depositata, ossia fino ad E :

$$R(E) = \int dx = \int_0^E \frac{dE}{(-dE/dx)_{\text{ion.}}} \quad (4.15)$$

e può essere calcolato numericamente per le diverse particelle ed i diversi materiali. Le fluttuazioni statistiche sulle perdite per ionizzazione si ripercuotono su $R(E)$, dando luogo al cosiddetto *straggling*. Il range ha un senso

fisico soltanto per energie al di sotto delle quali le particelle incidenti non siano soggette ad altre interazioni.

Il calcolo del range ha acquistato una particolare importanza con lo sviluppo delle applicazioni mediche della ionizzazione delle particelle adroniche. E' importante notare che, data la dipendenza da β del dE/dx il deposito di energia si concentra per $\beta\gamma < 1$, dove le perdite crescono rapidamente man mano che la particella rallenta: a fine percorso la particella deposita tutta la sua energia residua in una regione molto limitata. Modulando opportunamente l'energia incidente, è quindi possibile localizzare il deposito di energia sui tessuti che richiedono il trattamento.

4.4 La diffusione coulombiana multipla

Come abbiamo sottolineato nel par. 4.1, i nuclei del mezzo non contribuiscono alle perdite per ionizzazione. Sappiamo altresì che l'effetto di questa interazione è di deviare la particella di un angolo θ secondo la sezione d'urto (3.29). Attraversando uno spessore finito di materiale, la particella, oltre che perdere energia trasferendola agli elettroni del mezzo (ionizzazione) subirà quindi un gran numero di deflessioni per urti elastici con i nuclei, cambiando la propria direzione (*diffusione multipla*). La distribuzione dell'angolo di diffusione risulta essere approssimativamente una gaussiana centrata intorno a zero, con varianza

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{\int \vartheta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} \quad (4.16)$$

mentre si può definire un angolo medio di diffusione come la radice quadrata della varianza:

$$\bar{\vartheta} = \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = 21 \text{MeV} \frac{z}{c\beta p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \quad (4.17)$$

dove X_0 è la lunghezza di radiazione (vedi par. 4.6), definita da

$$\frac{1}{X_0} = 4r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2 \rho}{A} \ln(183Z^{-1/3}). \quad (4.18)$$

La formula (4.17) fornisce l'angolo nello spazio, mentre per avere quello su un piano si deve dividere per un fattore $\sqrt{2}$.

4.5 Effetto Cherenkov

Una particella carica che viaggia in un mezzo con una velocità superiore alla velocità della luce in quel mezzo (che non può quindi essere il vuoto) emette una radiazione luminosa detta *effetto Cherenkov*. Il motivo di tale emissione può essere ricondotto agli effetti di polarizzazione e depolarizzazione del mezzo, associati al passaggio della carica. Questi moti di carica intorno ad ogni punto toccato dalla carica in moto generano una serie di onde sferiche (che in un mezzo non dispersivo viaggiano con velocità di gruppo $v_g = c/n$, dove $n > 1$ è l'indice di rifrazione) il cui involuppo costituisce un fronte d'onda conico, come mostrato nella figura 4.3. Il fenomeno è analogo alla formazione di una scia da parte di una barca che si muova con velocità maggiore di quella delle onde sulla superficie dell'acqua. Per semplice costruzione geometrica, l'angolo di emissione della luce Cherenkov è dato dalla relazione

$$\beta c \cos \theta_C = v_g = \frac{c}{n} \rightarrow \cos \theta_C = \frac{1}{\beta n} \quad (4.19)$$

da cui risulta immediatamente che l'effetto Cherenkov ha una soglia data da $\beta_{th} = 1/n$ e permette quindi di selezionare particelle sopra tale soglia. E' altrettanto immediato che per particelle relativistiche ($\beta \simeq 1$) l'angolo di emissione è indipendente dall'impulso e vale $\cos \theta_C = 1/n$.

In un fascio di particelle selezionato in impulso, l'effetto Cherenkov permette di selezionare le particelle in base alla loro massa. Infatti si ricava:

$$p_{th} = mc\beta_{th}\gamma_{th} = mc\beta_{th} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{th}^2}} = \frac{mc}{\sqrt{n^2-1}} \quad (4.20)$$

per cui, dato l'impulso p , la condizione per l'emissione di luce Cherenkov $p > p_{th}$ diventa

$$mc^2 < pc\sqrt{n^2-1}. \quad (4.21)$$

Per discriminare particelle relativistiche ($pc \gg mc^2$), è quindi necessario che n sia prossimo a 1. A questo scopo si possono usare particolari miscele di gas, con il vantaggio che, essendo l'indice di rifrazione dipendente dalla pressione, il valore della soglia può essere facilmente variato agendo sulla pressione della miscela.

Il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e unità di energia è dato da:

$$\frac{d^2 N_\gamma}{dx dE} = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(E)^2} \right) = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \sin^2 \theta_C \quad (4.22)$$

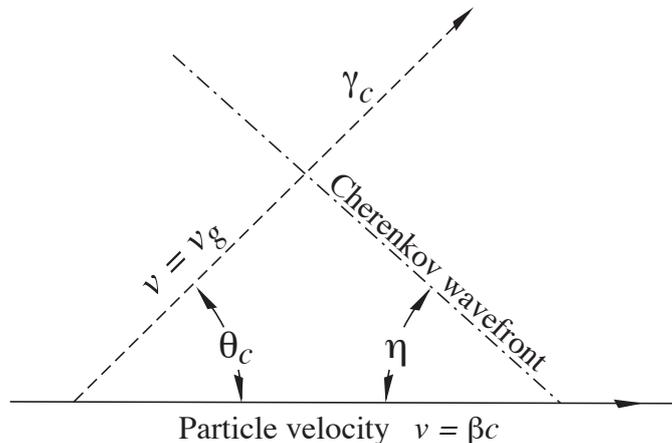


Figura 4.3: Costruzione del fronte d'onda dell'effetto Cherenkov: θ_C è la direzione della luce, η è l'angolo di apertura del fronte d'onda conico (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

che può essere riscritto in termini di lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu = hc/E$ come

$$\frac{d^2 N_\gamma}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha z^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda)^2} \right). \quad (4.23)$$

4.6 Perdite di energia per elettroni

Abbiamo già detto che, nel caso degli elettroni, la formula di Bethe-Block deve essere modificata per tener conto dell'identità tra il proiettile ed il bersaglio. Un effetto più importante nasce però dal fatto che, per effetto degli urti elastici col nucleo, l'accelerazione che una particella carica subisce nel momento della deflessione provoca l'emissione di radiazione elettromagnetica. La teoria di questo processo è stata elaborata da Bethe e Heitler nel 1934. A parità della forza coulombiana del nucleo, l'accelerazione sarà tanto maggiore quanto minore sarà la massa della particella, per cui la perdita di energia per irraggiamento (spesso indicato col termine tedesco *Bremsstrahlung*) sarà molto maggiore per gli elettroni che per le altre particelle. La perdita di energia per irraggiamento degli elettroni può essere espressa dalla

formula:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \simeq \frac{E}{X_0} \simeq 4r_e^2\alpha \frac{N_A Z^2 \rho}{A} \ln(183Z^{-1/3}) E \quad (4.24)$$

e questo contributo va a sommarsi a quello dovuto alla ionizzazione. Come si vede, il contributo radiativo alle perdite di energia degli elettroni è lineare in E , e dunque per un certo valore di E queste perdite supereranno quelle dovute alla ionizzazione, che tendono invece a divenire costanti. Il valore di E per il quale le perdite per ionizzazione eguagliano quelle per radiazione prende il nome di *energia critica*, ϵ_c . Assumendo esatta l'uguaglianza espressa dalla (4.24), che è invece valida solo ad alta energia, l'energia critica rappresenterebbe l'energia per la quale la perdita per ionizzazione per lunghezza di radiazione uguaglia l'energia dell'elettrone (definizione di Rossi dell'energia critica), come illustrato in figura 4.4. L'energia critica per gli elettroni può essere espressa come $\epsilon_c \simeq 600/Z$ MeV, per cui varia dalle centinaia alla decina di MeV per le diverse sostanze. Il corrispondente valore per particelle pesanti è molto maggiore, per cui queste perdite di energia sono trascurabili con l'eccezione dei muoni di alta energia.

Non è un caso che nella (4.24) compaia la stessa costante che abbiamo incontrato nello scattering multiplo, poiché in entrambi i casi l'origine del processo è la diffusione nel campo coulombiano del nucleo. Integrando la (4.24) si può ottenere l'andamento dell'energia dell'elettrone, $E = E_0 e^{-x/X_0}$. La (4.24) può essere quindi assunta come definizione della *lunghezza di radiazione* X_0 che risulta quindi la distanza alla quale l'energia dell'elettrone si riduce di un fattore $1/e$ per effetto delle sole perdite per radiazione. Ricordiamo che il segno di uguaglianza nella (4.24) vale solo asintoticamente, per cui la definizione appena data richiede che si considerino elettroni di alta energia (si veda la figura 4.4). Le perdite di energia degli elettroni in piombo sono riportate in figura 4.5.

In ogni singola interazione dell'elettrone col nucleo verranno emessi uno o più fotoni. Lo spettro di energia dei fotoni irraggiati va da 0 a E con probabilità inversamente proporzionale ad E , mentre l'angolo medio di emissione è dato da $\langle \vartheta \rangle \simeq m_e c^2 / E_0$, ed è quindi indipendente dalla energia del fotone emesso.

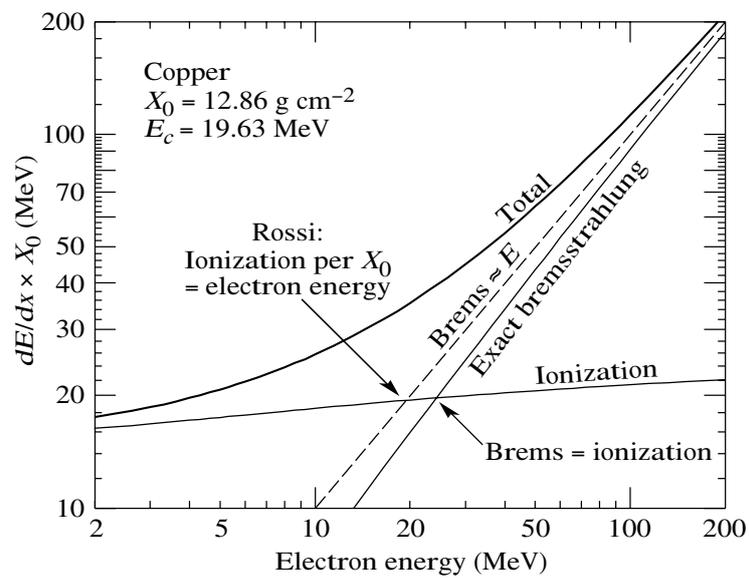


Figura 4.4: Confronto tra le perdite per ionizzazione e quelle per irraggiamento degli elettroni in rame. La differenza tra le due definizioni dell'energia critica rispecchia la circostanza che la (4.24) è valida solo asintoticamente, come si vede dall'andamento delle due curve dell'irraggiamento, calcolate usando l'espressione completa e quella asintotica (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

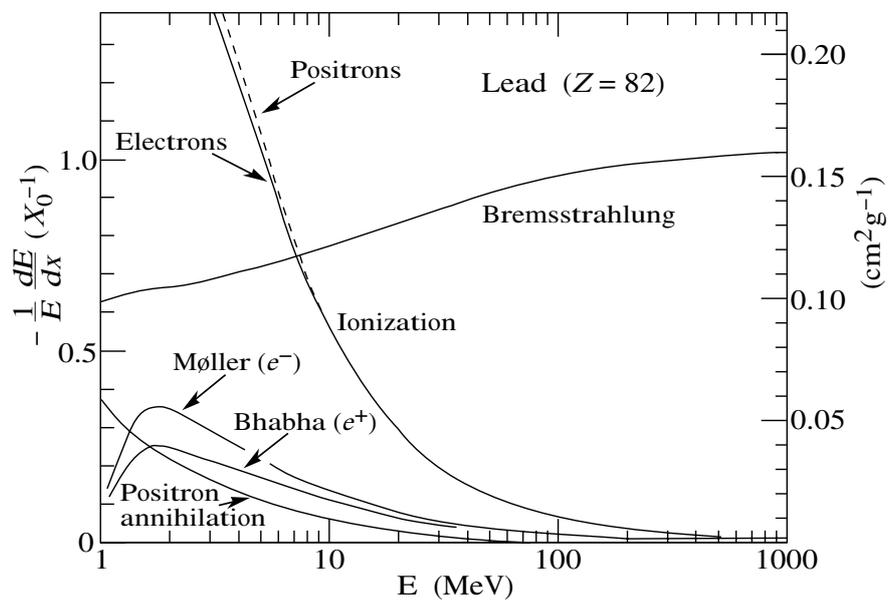


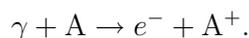
Figura 4.5: Perdite di energia per elettroni in piombo, espresse come $-\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} / X_0$: in queste unità, il valore asintotico delle perdite dovute all'irraggiamento è 1 (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

4.7 Interazione dei fotoni con la materia

Come per gli elettroni, anche nell'interazione dei fotoni con la materia si devono distinguere le interazioni con gli elettroni da quelle con i nuclei del mezzo. Nel primo caso, il fotone può essere assorbito dall'elettrone e scomparire, liberando un elettrone (effetto fotoelettrico) o cedere parte dell'energia all'elettrone (effetto Compton). Nel secondo, il fotone nel campo del nucleo può materializzarsi in una coppia elettrone-positrone (produzione di coppie).

4.7.1 Effetto fotoelettrico

Ricordiamo che l'effetto fotoelettrico è considerato la prima dimostrazione sperimentale della natura corpuscolare della luce, che risulta costituita da quanti di energia $E_\gamma = h\nu$, proporzionale alla frequenza della radiazione luminosa. L'effetto fotoelettrico può essere interpretato come una reazione



Notiamo che l'assorbimento del fotone richiede la presenza del nucleo: la reazione $\gamma + e^- \rightarrow e^-$ non può avvenire, perché la massa invariante dello stato iniziale è maggiore della massa invariante finale, che coincide con la massa dell'elettrone. Il nucleo pesante, come al solito, assorbe impulso senza assorbire energia: tutta l'energia del fotone è trasferita all'elettrone. Ne risulta che l'impulso assorbito dal nucleo deve essere tanto maggiore quanto maggiore è l'energia del fotone, per cui ci aspettiamo che la probabilità dell'effetto fotoelettrico diminuisca al crescere dell'energia del fotone. L'effetto fotoelettrico richiede che l'energia del fotone sia maggiore dell'energia di legame dell'elettrone. Sopra la soglia, e per energie $E_\gamma \ll m_e c^2$ dove l'effetto fotoelettrico è dominante, la sezione d'urto è

$$\sigma_{p.e.} \propto Z^5 \frac{1}{E_\gamma^3} \quad (4.25)$$

ed è quindi fortemente dipendente dal numero atomico del materiale. La sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico su carbonio e piombo è riportata nella figura 4.6.

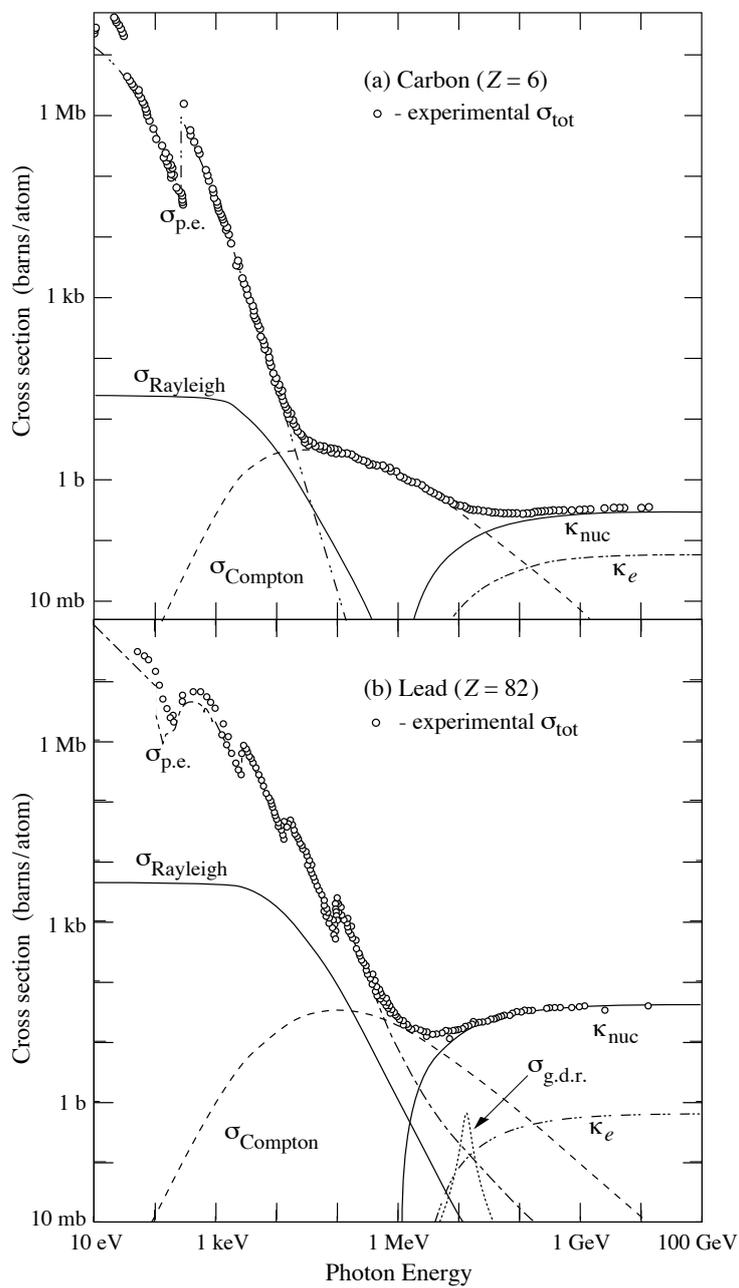


Figura 4.6: Sezioni d'urto (in barn per atomo) per interazioni di fotoni in carbonio (a) e in piombo (b) (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1).

4.7.2 Effetto Compton

Per energie molto maggiori dell'energia di legame, gli elettroni si possono considerare liberi e possono interagire con i fotoni tramite il processo elastico

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

dando luogo all'effetto Compton. L'elettrone assorbe parte dell'energia del fotone incidente, che varia quindi la sua frequenza. La scoperta dell'effetto Compton (1923) è la prova definitiva che la radiazione luminosa non può essere interpretata come un fenomeno puramente ondulatorio, per il quale la frequenza deve rimanere sempre la stessa.

Un semplice calcolo di cinematica relativistica permette di ricavare la relazione tra energia ed angolo del fotone diffuso. Chiamando p l'impulso finale dell'elettrone, φ l'angolo di questo con la direzione del fotone incidente, ν e ν' le frequenze iniziale e finale del fotone e ϑ l'angolo del fotone uscente e ricordando che l'impulso di un fotone è dato da $h\nu/c$, la conservazione dell'impulso longitudinale e trasverso si scrive:

$$\frac{E_\gamma}{c} = \frac{E'_\gamma}{c} \cos \vartheta + p \cos \varphi \quad (4.26)$$

$$0 = \frac{E'_\gamma}{c} \sin \vartheta - p \sin \varphi \quad (4.27)$$

ovvero

$$p \cos \varphi = \frac{E_\gamma}{c} - \frac{E'_\gamma}{c} \cos \vartheta \quad (4.28)$$

$$p \sin \varphi = \frac{E'_\gamma}{c} \sin \vartheta \quad (4.29)$$

che sommate in quadratura e rimoltiplicate per c^2 danno:

$$(pc)^2 = (E_\gamma)^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma \cos \vartheta. \quad (4.30)$$

Indicando con $T = E_\gamma - E'_\gamma$ l'energia cinetica trasferita all'elettrone, e considerando che

$$E^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \rightarrow (m_e c^2 + T)^2 = m_e^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (4.31)$$

otteniamo anche

$$(pc)^2 = E_e^2 - m_e^2 c^4 = T^2 + 2Tm_e c^2 = (E_\gamma)^2 + (E'_\gamma)^2 - 2E_\gamma E'_\gamma + 2(E_\gamma - E'_\gamma)m_e c^2 \quad (4.32)$$

e uguagliando gli ultimi membri delle (4.30) e (4.32) otteniamo infine

$$T = E_\gamma - E'_\gamma = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta) \quad (4.33)$$

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) \quad (4.34)$$

che esprime la variazione della lunghezza d'onda del fotone in funzione dell'angolo di diffusione di questo, per effetto della diffusione Compton su elettrone. Notiamo che questa variazione è indipendente dall'energia del fotone incidente (e dalle proprietà del mezzo) e dipende invece dalla quantità $\lambda_C = h/m_e c = 2.43 \cdot 10^{-12}$ m, che prende il nome di *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone (notiamo anche che vale la relazione $\lambda_C = 2\pi r_e/\alpha$). Dal punto di vista del fotone, la (4.34) può essere interpretata dicendo che per subire una variazione significativa di lunghezza d'onda, il fotone deve avere una lunghezza d'onda confrontabile con λ_C . Se traduciamo questa lunghezza d'onda in energia, abbiamo $h\nu \sim hc/\lambda_C = m_e c^2$, ossia il fotone deve avere una energia dell'ordine di quella corrispondente alla massa dell'elettrone.

Dalla (4.33) ricaviamo l'energia del fotone uscente:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)}. \quad (4.35)$$

mentre il massimo dell'energia trasferita all'elettrone si ha per $\vartheta = 180^\circ$:

$$T^{\max} = E_\gamma \frac{E_\gamma}{\frac{1}{2} m_e c^2 + E_\gamma}. \quad (4.36)$$

La sezione d'urto differenziale in funzione dell'angolo di diffusione dell'elettrone può essere calcolata in elettrodinamica quantistica (formula di Klein-Nishina, 1928):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma} = \frac{1}{2} r_e^2 \frac{Z}{A} \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \left(1 + \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right)^2 + \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \sin^2 \vartheta_\gamma \right) \quad (4.37)$$

che, integrata, dà la sezione d'urto totale, che va come $1/E_\gamma$ per $E_\gamma \gg m_e c^2$. La sezione d'urto Compton su carbonio e piombo è riportata nella figura 4.6.

4.7.3 Produzione di coppie

Quando $E_\gamma > 2m_e c^2$, per il fotone si apre la soglia per la produzione di coppie elettrone-positrone. La creazione di coppie e^+e^- è la manifestazione sperimentale della teoria di Dirac. La scoperta del positrone sarà discussa nel seguito (par. 6.2), mentre le interazioni di questa particella con la materia sono identiche a quelle degli elettroni sopra descritte. La creazione di coppie non può avvenire nel vuoto: per la differenza tra la massa invariante iniziale (che deve essere nulla) e dello stato finale che contiene i due elettroni, la produzione deve avvenire in presenza di un nucleo che assorba l'impulso in eccesso (il processo può avvenire anche in presenza degli elettroni del mezzo, ma in tal caso l'energia assorbita dall'elettrone di rinculo è molto maggiore di quella del nucleo, riducendo quindi quella a disposizione per la creazione di coppie).

Nel calcolo della sezione d'urto compaiono le stesse quantità che abbiamo incontrato nel caso dell'irraggiamento degli elettroni e della diffusione multipla. Ad alte energie, la sezione d'urto è proporzionale a $Z^2 \ln 183/Z^{1/3}$, e può quindi essere scritta come

$$\sigma_{coppie} \simeq \frac{7}{9} \frac{1}{X_0} \frac{A}{\rho N_A}. \quad (4.38)$$

La sezione d'urto per produzione di coppie su carbonio e piombo è riportata nella figura 4.6: κ_{nuc} indica la sezione d'urto sui nuclei e κ_e quella sommata su tutti gli elettroni di un atomo.

L'analogia con l'irraggiamento è completata dall'angolo medio di emissione delle due particelle della coppia, che è lo stesso dei fotoni di Bremsstrahlung: $\langle \vartheta \rangle \simeq m_e c^2 / E_\gamma$.

4.8 Sciami elettromagnetici

Come abbiamo visto nei precedenti paragrafi, ad alta energia i processi dominanti nell'interazione di elettroni e fotoni con la materia sono l'irraggiamento e la produzione di coppie. Entrambi questi processi sono regolati da una scala di lunghezza che è data dalla lunghezza di radiazione X_0 . Se consideriamo quindi un elettrone o un fotone di alta energia che colpiscono un blocco di materiale con uno spessore di qualche X_0 , possiamo immaginare che si sviluppi un processo di moltiplicazione, per cui un fotone produce una coppia

e^+e^- , mentre ciascun e^+ o e^- emetterà parte della sua energia sotto forma di un ulteriore fotone. Si avrà quindi un processo a cascata, che prende il nome di *cascata elettromagnetica* o *sciame elettromagnetico*. Il percorso tra un processo moltiplicativo e il successivo sarà dell'ordine di X_0 . I prodotti di tali processi avranno energie via via minori man mano che cresce il numero delle generazioni. Quando gli elettroni ridurranno la loro energia al di sotto dell'energia critica, diventeranno dominanti le perdite di energia per ionizzazione, e la cascata si arresterà.

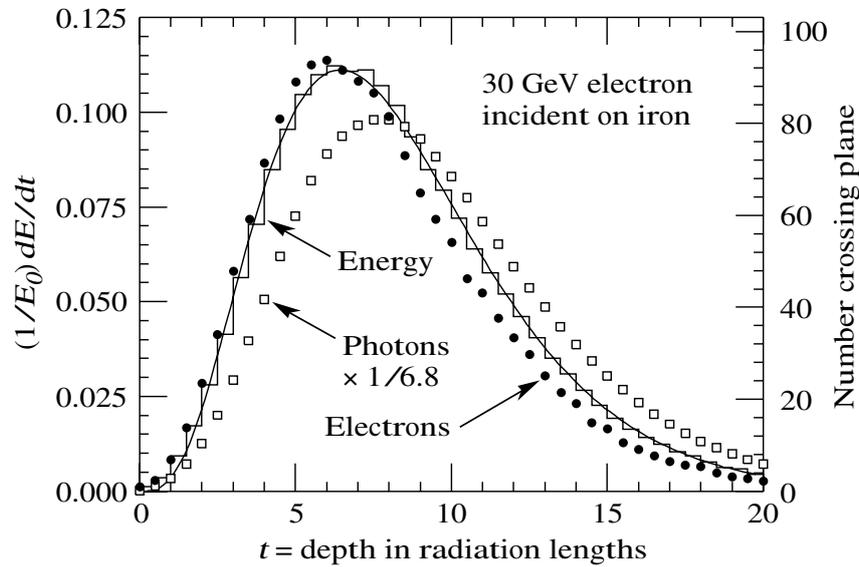


Figura 4.7: Simulazione Montecarlo dello sviluppo longitudinale di uno sciame elettromagnetico, in termini di energia depositata e numero di elettroni e fotoni con energia superiore a 1.5 MeV. La curva continua è un fit con una funzione tipo (4.39). (Riprodotta da: PDG, W-M Yao et al 2006 J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 33 1)

Ci si aspetta dunque che il fenomeno dipenda dalle caratteristiche del mezzo solo attraverso X_0 e ϵ_c , almeno in prima approssimazione, per cui se si misura l'energia incidente in E_0/ϵ_c e lo spessore in $t = x/X_0$, lo sviluppo longitudinale dello sciame sia lo stesso per tutti i materiali. Questo sviluppo

è ben rappresentato (si veda la figura 4.7) da una funzione del tipo

$$f(t) \propto E_0/\epsilon_c \cdot t^a e^{-bt} \quad (4.39)$$

($f(t)$ può rappresentare l'energia depositata o la popolazione di particelle alla profondità t), dove b è una quantità che vale circa 0.5 e dipende leggermente dal materiale, mentre a dipende dall'energia E_0 . Notiamo che la funzione definita dalla (4.39) deve avere il massimo a $t_{\max} = a/b$. Semplici modelli analitici, confermati dalle simulazioni MonteCarlo, mostrano che il massimo deve dipendere logicamente dall'energia: $t_{\max} = \ln(E_0/\epsilon_c) + c$ (dove c è una quantità che differisce di circa $1X_0$ tra elettroni e fotoni) per cui, uguagliando le due espressioni di t_{\max} , si può ricavare il valore di a .

Lo sviluppo laterale dello sciame, che dipende dalla diffusione coulombiana multipla, risulta invece indipendente dall'energia incidente e può essere quantificato dal *raggio di Molière*, definito come il raggio di un cilindro che contiene il 90% dell'energia dello sciame e che vale $R_M \simeq 21X_0/\epsilon_c(\text{MeV})$.

4.9 Sciami adronici

Anche le particelle ad interazione forte danno luogo a moltiplicazioni in cascata, che prendono il nome di *sciame adronici*. I meccanismi alla base degli sciame adronici sono più complessi di quelli degli sciame elettromagnetici. Comunque anche per gli sciame adronici esiste una scala di lunghezza, data dalla *lunghezza di interazione*, ossia dal cammino libero medio tra una interazione adronica e la successiva. Questa grandezza, espressa in g cm^{-2} , cresce con Z , mentre X_0 decresce, cosicché quest'ultima, che è confrontabile per l'idrogeno, diventa via via più piccola dell'altra. In assorbitori pesanti, gli sciame adronici sono quindi molto più estesi di quelli elettromagnetici.

4.10 Rivelatori di particelle

La rivelazione del passaggio di una particella richiede un trasferimento di energia dalla particella stessa allo strumento di misura, per cui le tecniche di rivelazione devono essere basate sui processi che abbiamo esaminato nei paragrafi precedenti. La perdita di energia per ionizzazione può essere sfruttata in vari modi:

- in un gas, la produzione di ioni positivi e negativi può essere messa in luce raccogliendo la corrente generata dalla deriva degli ioni in un campo elettrico. Se il campo è sufficientemente intenso, il segnale può essere amplificato attraverso la moltiplicazione in cascata degli ioni, fino ad arrivare alla scarica. Il contatore di Geiger-Mueller (1913) è il primo esempio di questo tipo di rivelatori.
- la eccitazione degli atomi o delle molecole di un solido può dar luogo a processi di diseccitazione radiativa con emissione di segnali ottici: un materiale di questo tipo è detto *scintillatore*. Gli schermi fosforescenti utilizzati agli albori della fisica atomica possono essere considerati i primi esempi di contatori a scintillazione. Negli scintillatori moderni il segnale luminoso è trasformato in un segnale elettronico attraverso un fotorivelatore, basato essenzialmente sull'effetto fotoelettrico, con successiva raccolta della corrente di fotoelettroni emessi dal fotocatodo.
- in un semiconduttore, la ionizzazione comporta la formazione di coppie elettrone-lacuna: su una giunzione polarizzata inversamente, questo processo dà luogo ad una corrente elettrica che può essere raccolta e misurata.
- L'emissione di luce Cerenkov in un gas o in un materiale trasparente, con successiva conversione del segnale attraverso un fotorivelatore, è un'altra modalità di rivelazione molto utilizzata: in essa si può sfruttare la soglia dell'effetto, dipendente dalla massa della particella, che permette di selezionare particelle diverse.

Mentre negli esperimenti pionieristici le scoperte fondamentali potevano essere associate alla rivelazione del semplice passaggio di una particella, in generale gli esperimenti moderni si propongono di determinare il maggior numero possibile di proprietà dello stato finale della reazione che si vuole studiare. L'esperimento ideale è quello che misura il quadrimpulso di tutte le particelle dello stato finale: i diversi rivelatori che si possono effettivamente realizzare sono in grado di misurare l'energia, l'impulso e la traccia spaziale di alcune categorie di particelle. Un esperimento richiede quindi in genere la combinazione di più tecniche sperimentali per raggiungere determinati obiettivi.

4.10.1 Rivelatori di traccia

La possibilità di visualizzare le tracce delle particelle ha sempre costituito un potente strumento di indagine delle interazioni. I primi dispositivi visualizzanti richiedevano di riprendere vere e proprie fotografie delle tracce in questione, soffrendo di una limitata risoluzione temporale e di lunghi tempi morti, mentre negli ultimi decenni si sono sviluppate tecniche elettroniche che permettono di registrare in tempi brevissimi le informazioni delle tracce di un gran numero di eventi.

Il primo strumento utilizzato a questo scopo è la *camera a nebbia* o camera di Wilson (1912), nella quale una rapida espansione di un vapore soprassaturo genera la formazione di goccioline di liquido intorno agli ioni liberati dal passaggio delle particelle. La camera opportunamente illuminata può essere fotografata e la traccia delle particelle è visualizzata dall'insieme delle gocce. La tipica risoluzione spaziale è di $500 \mu\text{m}$. Dalla densità di goccioline si può anche ricavare una stima dell'energia persa per ionizzazione per unità di percorso.

Nella *camera a bolle* (Glaser 1952) si utilizza invece un liquido nel quale la pressione idrostatica è portata per qualche millisecondo al di sotto della tensione di vapore. Lungo la traiettoria della particella, sempre in corrispondenza degli ioni, si formano delle bollicine che possono essere fotografate. La risoluzione spaziale va dalla decina alle centinaia di μm .

Le emulsioni nucleari (Powell 1939) sono invece gelatine nelle quali sono immersi grani di bromuro di argento. Gli elettroni dovuti alla ionizzazione trasformano i grani in argento metallico. In questo caso le tracce sono quindi memorizzate in maniera permanente nelle emulsioni, che devono successivamente essere osservate al microscopio alla ricerca degli eventi interessanti. La risoluzione tipica è dell'ordine del μm . Nelle emulsioni, la determinazione della ionizzazione specifica può essere abbastanza precisa, permettendo di risalire al β della traccia rivelata.

Una tecnica intermedia tra quelle visualizzanti e quelle elettroniche è la *camera a scintilla*, formata da una coppia di elettrodi separati da un gas nobile. Un forte campo elettrico viene applicato in maniera impulsiva dopo il passaggio delle particelle, dando luogo ad una scarica a scintilla che può essere fotografata. Una variante delle camere a scintilla è la *camera a streamer*.

Nelle tecniche elettroniche, la carica elettrica, prodotta dalla ionizzazione dovuta al passaggio della particella in un gas, un liquido o un solido, viene raccolta con opportuni campi elettrici.

Nelle *camere a fili*, una serie di fili (anodi), con spaziature dell'ordine del millimetro, è immersa in un gas contenuto tra due strati metallici (catodi). Il segnale è costituito dalla corrente prodotta dagli ioni positivi e negativi. Nelle *camere a deriva*, la precisione spaziale è aumentata misurando il tempo di transito delle cariche ioniche: conoscendo la velocità di deriva degli ioni nel gas, si può ricavare con precisione la posizione della traccia rispetto al filo.

Risoluzioni spaziali ancora più spinte (dell'ordine della decina di μm) si possono ottenere utilizzando giunzioni semiconduttrici finemente segmentate. Questa tecnica è utilizzata in particolare per ricostruire vertici secondari in prossimità della zona in cui avviene l'interazione primaria.

4.10.2 Spettrometri magnetici

La deflessione di una particella carica in campo magnetico è uno dei primi metodi utilizzati per determinare le caratteristiche delle particelle, come abbiamo visto per la scoperta dell'elettrone. Il moto è regolato dalla forza di Lorentz

$$f_L = \frac{dp}{dt} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (4.40)$$

Se la derivata di un vettore è ortogonale al vettore stesso, il modulo del vettore è costante. Inoltre, se B è ortogonale a v , la traiettoria è una circonferenza di raggio $R = p/qB$ (essendo $mv^2/R = qvB$), da cui ricaviamo $p = qBR$. Moltiplicando per c , assumendo che la carica sia e ed utilizzando delle unità appropriate per l'impulso si ottiene

$$pc(\text{GeV}) = 0.3 \cdot B(\text{Tesla}) \cdot R(\text{m}). \quad (4.41)$$

Un rivelatore di traccia in campo magnetico permette dunque di misurare l'impulso di una particella ed è detto *spettrometro magnetico*.

Se assumiamo che la deflessione sia piccola, il modo più elementare di eseguire la misura è di determinare lo spostamento x subito dalla particella rispetto alla direzione iniziale dopo un percorso L in un campo magnetico B : se chiamiamo ϑ l'angolo di cui è ruotato il raggio della circonferenza, avremo $R \simeq L/\vartheta$ mentre $x \simeq L\vartheta/2$, per cui la (4.41) diventa

$$pc = 0.3 \frac{BL^2}{2x} \quad (4.42)$$

mentre l'incertezza sull'impulso è data da

$$\sigma(cp) = 0.3 \frac{BL^2}{2x^2} \sigma(x) \rightarrow \frac{\sigma(cp)}{cp} = \frac{2cp}{0.3 \cdot BL^2} \sigma(x) \quad (4.43)$$

da cui si vede che il potere risolutivo sull'impulso è direttamente proporzionale alla risoluzione sulla posizione di uscita ed è tanto migliore quanto maggiore è BL^2 , che è quindi il parametro che caratterizza lo spettrometro. Si vede anche che la risoluzione peggiora linearmente con l'aumentare dell'impulso da misurare.

Naturalmente gli spettrometri che permettono di ricostruire nel dettaglio la traccia conducono a determinazioni più sofisticate della curvatura; tuttavia le caratteristiche che abbiamo ricavato sopra, ossia la dipendenza da BL^2 e il peggioramento della risoluzione al crescere dell'impulso sono presenti praticamente in tutti i tipi di spettrometri.

4.10.3 Calorimetri

I *calorimetri* sono strumenti disegnati per contenere una larga frazione degli sciami di particelle e devono contenere un elemento rivelatore il cui segnale sia proporzionale all'energia totale depositata dallo sciame nel calorimetro. Data la differenza di scala tra gli sciami adronici ed elettromagnetici, si hanno due tipologie di calorimetri ben distinte tra loro.

Un esempio significativo di calorimetro elettromagnetico è costituito da uno scintillatore pesante, lungo un numero sufficiente di lunghezze di radiazione e di dimensioni trasversali di qualche raggio di Molière. In un simile rivelatore il segnale di scintillazione è direttamente proporzionale all'energia totale depositata nel calorimetro per ionizzazione, e quindi all'energia incidente. Poiché il processo di generazione del segnale è dato dalla combinazione di un gran numero di processi elementari, la fluttuazione del segnale raccolto sarà di natura poissoniana, proporzionale dunque alla radice quadrata del numero dei processi elementari. Poiché anche questi sono proporzionali alla energia incidente, la risoluzione relativa in energia è del tipo

$$\sigma(E)/E \propto 1/\sqrt{(E)} \quad (4.44)$$

e migliora quindi all'aumentare dell'energia incidente. Un calorimetro di questo tipo è detto *omogeneo*. Per motivi di costo, può essere utile combinare un materiale passivo pesante con uno scintillatore leggero: in questo caso

si parla di *calorimetro a campionamento*. La risoluzione è ancora espressa dalla (4.44), ma con valori tipicamente superiori, essendo minore il numero dei processi elementari che sono effettivamente campionati dal rivelatore.

Per gli sciami adronici non si utilizzano mai calorimetri omogenei, non solo per le dimensioni molto maggiori che sarebbero necessarie e che renderebbero estremamente costoso un simile rivelatore, ma soprattutto perché le fluttuazioni intrinseche degli sciami adronici sono molto superiori e dominano comunque la risoluzione.