

Capitolo 3

Esperimenti di diffusione

La maggior parte delle nostre conoscenze sulle particelle elementari è stata ottenuta attraverso esperimenti di diffusione, nei quali un fascio di particelle (i “proiettili”) viene inviato su un blocco di materia (il “bersaglio”). Tra proiettili e bersaglio avverranno un certo numero di reazioni, che daranno luogo a nuove particelle (lo stato finale) che possono differire da quelle iniziali per natura o proprietà cinematiche. Studiando le distribuzioni di questi stati finali, si possono ricavare informazioni sulla natura delle interazioni che possono avvenire tra proiettile e bersaglio. Il primo esperimento di questo tipo è considerato quello col quale Rutherford dimostrò che la materia nucleare è addensata in piccole regioni dello spazio (i nuclei atomici) e sarà descritto alla fine di questo capitolo. Prima però, è necessario introdurre alcuni concetti fondamentali a cominciare dalla *sezione d’urto*, di validità del tutto generale per qualunque esperimento di diffusione.

3.1 Sezione d’urto

La sezione d’urto è una misura della probabilità che una certa reazione abbia luogo. Nel caso di un esperimento di diffusione, possiamo considerare che nell’unità di tempo un certo numero di particelle del fascio raggiunge la superficie del bersaglio e può interagire con le particelle del bersaglio per tutto lo spessore d di questo. Supponiamo di poter misurare sperimentalmente il numero di reazioni che avvengono nell’unità di tempo, dN_r/dt . Se assumiamo che una particella del fascio possa interagire con una sola particella del bersaglio (non ci siano interazioni multiple della stessa particella) e che non

ci siano effetti di coerenza tra le particelle del fascio o del bersaglio (ossia che la probabilità di interazione tra proiettile e bersaglio non sia influenzata dalla vicinanza di altre particelle del fascio o del bersaglio), questo numero deve essere proporzionale al numero di particelle del fascio che arrivano nell'unità di tempo, dN_f/dt , alla densità di volume n_b delle particelle bersaglio e alla lunghezza d del bersaglio. Notiamo che il prodotto $n_b \cdot d$ rappresenta il numero di bersagli per unità di superficie. Potremo esprimere questa proporzionalità scrivendo

$$\frac{dN_r}{dt} = \sigma_r \cdot \frac{dN_f}{dt} \cdot n_b \cdot d \quad (3.1)$$

dove abbiamo indicato con σ_r una quantità che deve avere le dimensioni di una superficie e che prende il nome di *sezione d'urto* della reazione. Questa quantità dipende dalla natura e dalle proprietà delle particelle che costituiscono il fascio e il bersaglio e dalla intensità della loro interazione. Tipicamente lo scopo di un esperimento di diffusione è proprio quello di determinare il valore di σ_r , eventualmente in funzione delle caratteristiche cinematiche (p. es. l'energia) delle particelle del fascio, attraverso la relazione

$$\sigma_r = \frac{N_r}{N_f} \frac{1}{n_b \cdot d} \quad (3.2)$$

che si ottiene dalla precedente integrando per il tempo T di durata dell'esperimento. Se il tempo T è finito, la determinazione di σ_r sarà affetta da errori sperimentali dovuti alle fluttuazioni statistiche di N_r e N_f . La sezione d'urto può essere quindi definita come il limite della (3.2) per T (e quindi N_r e N_f) che tende all'infinito. In questo modo si chiarisce come nella definizione della sezione d'urto compaia una probabilità (come limite della frequenza N_r/N_f), moltiplicata per un fattore che ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato, che serve a normalizzare la frequenza delle reazioni (che dipende dal numero di bersagli) al singolo bersaglio, in modo da caratterizzare la singola reazione tra una particella del fascio ed una del bersaglio.

L'unità di misura comunemente usata per la sezione d'urto è il barn, definito come

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 \quad (3.3)$$

e i suoi sottomultipli, il mb, il μb , il nb, ecc.

Se ora facciamo l'ipotesi che le particelle del fascio siano uniformemente distribuite su una sezione S , possiamo definire il flusso di particelle incidenti

per unità di tempo e unità di superficie come $\phi = \frac{dN_f}{dt}/S$ e la relazione (3.1) può essere riscritta come:

$$\frac{dN_r}{dt} = \sigma_r \cdot \frac{dN_f}{dt \cdot S} \cdot S \cdot n_b \cdot d = \sigma_r \cdot \frac{dN_f}{dt \cdot S} \cdot N_b = \sigma_r \cdot \phi \cdot N_b \quad (3.4)$$

dove $N_b = n_b \cdot S \cdot d$ rappresenta il numero totale di bersagli illuminato dalla sezione del fascio incidente.

Nel caso che il bersaglio sia costituito da nuclei di peso atomico A , il valore di N_b o equivalentemente di n_b può essere calcolato nel modo seguente: chiamando $m_b = A/N_A$ la massa del singolo nucleo-bersaglio e $V = S \cdot d$ il volume del bersaglio illuminato dal fascio, la densità è data da $\rho = m_b \cdot N_b/V$ per cui

$$n_b = \frac{N_b}{V} = \rho \frac{N_A}{A}. \quad (3.5)$$

Talvolta può essere utile esprimere il flusso attraverso la densità e la velocità dei proiettili, tenendo conto che il volume del fascio che passa nell'unità di tempo attraverso la superficie S è dato da $S \cdot v dt$ ed il numero di proiettili può essere scritto come $dN_f = n_f S \cdot v dt$, dove n_f è la densità di volume delle particelle del fascio. Sostituendo in ϕ si ha

$$\phi = n_f \cdot v. \quad (3.6)$$

3.2 Interpretazione geometrica della sezione d'urto

La (3.4) può essere riscritta come

$$\frac{dN_r}{dN_f} = \frac{\sigma_r \cdot N_b}{S}. \quad (3.7)$$

Il primo membro rappresenta il rapporto tra il numero di particelle diffuse ed il numero di particelle incidenti e quindi esprime la probabilità che una particella del fascio ha di interagire: ora se associamo ad ogni particella del bersaglio una superficie efficace pari a σ_r , il secondo membro rappresenta il rapporto tra la superficie efficace totale di tutte le particelle-bersaglio e la superficie del fascio e può essere interpretato come la probabilità che una singola particella puntiforme, incidente a caso su una superficie S del bersaglio,

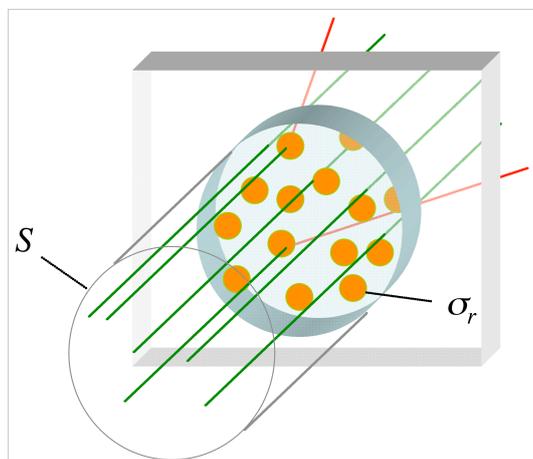


Figura 3.1: Interpretazione geometrica della sezione d'urto: S è l'area della sezione del fascio di particelle incidenti, σ_r è la superficie geometrica efficace di ciascun bersaglio.

avrebbe di colpire la superficie efficace totale del bersaglio data da $\sigma_r \cdot N_b$ (figura 3.1). Questa rappresentazione geometrica, molto suggestiva nella sua semplicità, può essere tuttavia fuorviante per molti motivi: in primo luogo può far pensare che la sezione d'urto sia legata alle dimensioni fisiche delle particelle coinvolte, mentre si hanno sezioni d'urto finite anche per particelle puntiformi, come ad esempio nella diffusione di neutrino su elettrone. In secondo luogo, può suggerire che la sezione d'urto sia legata in qualche modo al range dell'interazione mentre in realtà è una misura dell' *intensità* di questa. Infine, può far ritenere che la sezione d'urto sia una proprietà del bersaglio, mentre, come abbiamo detto, è una proprietà dell'interazione tra proiettile e bersaglio e per lo stesso bersaglio può cambiare non solo utilizzando proiettili diversi, ma anche al variare delle proprietà cinematiche (energia ecc.) di uno stesso tipo di proiettile.

D'altra parte, in alcuni casi, la sezione d'urto può dare un ordine di grandezza ragionevole delle dimensioni delle particelle coinvolte. È il caso ad esempio dell'urto protone-protone (processo dominato dall'interazione forte) ad energie di qualche GeV, che è dell'ordine di $10 \text{ mb} = 10^{-30} \text{ m}^2$, mentre le dimensioni dei protoni sono dell'ordine di $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$. Per dare un'idea della variabilità della sezione d'urto su protone, la sezione d'urto di neutrino

su protone (dovuta all'interazione debole) ad energie analoghe è dell'ordine di $10 \text{ fb} = 10^{-42} \text{ m}^2$.

3.3 Coefficiente di assorbimento, lunghezza di attenuazione e cammino libero medio

Se vogliamo calcolare la probabilità che una particella del fascio interagisca mentre attraversa un tratto dx del bersaglio, possiamo applicare la (3.7) ad un volume di bersaglio Sdx , ricavando:

$$P_{int} = \frac{\sigma_r \cdot n_b \cdot S \cdot dx}{S} = \sigma_r \cdot n_b \cdot dx = \mu dx \quad (3.8)$$

dove $\mu = \sigma_r \cdot n_b$ è detto *coefficiente di assorbimento* ed ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. La variazione del flusso di particelle del fascio dopo un tratto dx sarà quindi data da:

$$d\phi = -\phi \cdot P_{int} = -\phi \mu dx \rightarrow \frac{d\phi}{dx} = -\mu \phi \quad (3.9)$$

da cui ricaviamo l'andamento del flusso di particelle in funzione della profondità:

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-\mu x} = \phi_0 e^{-x/\lambda} \quad (3.10)$$

dove $\lambda = 1/\mu$ è detta *lunghezza di attenuazione* e rappresenta la lunghezza dopo la quale il fascio risulta attenuato di un fattore $1/e$. Dalla (3.10) si può calcolare la probabilità che una particella del fascio incidente interagisca tra x ed $x + dx$, come rapporto tra il numero di particelle per unità di tempo e di superficie che interagiscono tra x ed $x + dx$, $-d\phi/dx$, ed il numero di particelle incidenti per unità di tempo e di superficie, ϕ_0 :

$$\frac{1}{\phi_0} \left(-\frac{d\phi}{dx} \right) = \mu e^{-\mu x} \quad (3.11)$$

e quindi il *cammino libero medio*, definito pesando ogni cammino x per la probabilità che la particella interagisca tra x ed $x + dx$:

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \cdot \mu e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \mu x e^{-\mu x} d(\mu x) = \frac{1}{\mu} = \lambda \quad (3.12)$$

da cui si vede che il cammino libero medio coincide con la lunghezza di attenuazione.

3.4 Sezione d'urto totale, elastica, inclusiva ed esclusiva

Finora abbiamo implicitamente assunto che sia possibile un solo tipo di reazione tra proiettile e bersaglio, e che sia sempre possibile contare in maniera univoca il numero di reazioni avvenute. In presenza di più reazioni, ciascuna delle quali può dar luogo a una o più combinazioni di particelle nello stato finale, possiamo sempre definire una *sezione d'urto totale* σ_t utilizzando nella (3.1) e nelle altre al posto di N_r un N_t definito come differenza tra il numero di particelle del fascio incidenti sul bersaglio e il numero di particelle del fascio che emergono dal bersaglio senza aver interagito, ossia nello stesso stato iniziale. Se poi in linea di principio siamo in grado di identificare evento per evento le differenti reazioni, determinandone quindi le varie sezioni d'urto, dovrà risultare $\sigma_t = \sum_r \sigma_r$.

Una distinzione che può essere fatta in maniera semplice è quella tra *diffusione elastica*, nella quale le particelle proiettile e bersaglio non cambiano la loro natura nel corso della reazione, e *diffusione anelastica*, nella quale il bersaglio (o il proiettile, o entrambi) in seguito alla reazione si porta in uno stato eccitato, da cui decade in due o più prodotti di decadimento. Nella diffusione elastica si deve conservare l'energia cinetica totale, mentre nella diffusione anelastica la massa invariante del bersaglio deve aumentare a spese dell'energia cinetica iniziale. Nella diffusione elastica, l'energia (o impulso) e l'angolo del proiettile diffuso sono quindi univocamente correlati, e questa caratteristica rende facile l'identificazione degli eventi puramente elastici. Naturalmente tra le sezioni d'urto totale, elastica e anelastica deve valere la relazione $\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{anel}$.

Nelle diffusioni anelastiche, un'altra distinzione utile è quella tra *sezioni d'urto inclusive*, quelle misurate in esperimenti nei quali si rivela solo il proiettile diffuso, e *sezioni d'urto esclusive*, in esperimenti nei quali si identificano anche i prodotti di decadimento del bersaglio e si possono quindi classificare le diverse reazioni in base a questi.

3.5 Luminosità e sezione d'urto per esperimenti con fasci incrociati

Le formule (3.1) o (3.4) possono essere riscritte semplicemente come

$$\frac{dN_r}{dt} = \sigma_r \cdot \mathcal{L} \quad (3.13)$$

introducendo la luminosità \mathcal{L} come

$$\mathcal{L} = \frac{dN_f}{dt} \cdot n_b \cdot d = \phi \cdot N_b \quad (3.14)$$

dove la seconda uguaglianza vale sotto le ipotesi nelle quali abbiamo derivato la (3.4). La luminosità ha le dimensioni dell'inverso del prodotto del tempo per una superficie e si misura quindi in $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$.

L'espressione (3.13), che non aggiunge nulla agli esperimenti di diffusione su bersaglio fisso, permette di determinare in maniera semplice la sezione d'urto in esperimenti a fasci incrociati, dove le interazioni avvengono tra due fasci di particelle lanciati l'uno contro l'altro. Questi esperimenti, benché richiedano macchine acceleratrici più complesse e producano luminosità molto inferiori a quelle ottenibili con esperimenti a bersaglio fisso, sono estremamente vantaggiosi dal punto di vista dell'energia disponibile nel centro di massa delle particelle interagenti. Il calcolo della luminosità negli esperimenti

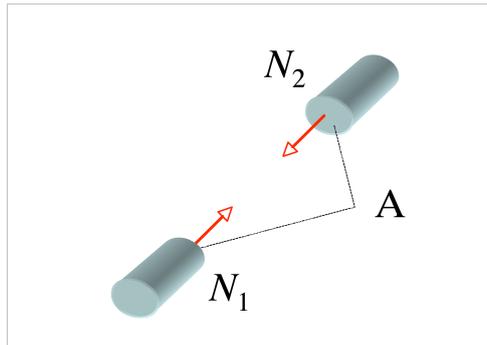


Figura 3.2: Luminosità in una macchina a fasci incrociati: N_1 e N_2 sono i numeri di particelle nei due pacchetti, A è la sezione trasversale media dei fasci.

ti a fasci incrociati richiede delle modifiche rispetto alla (3.14), che possono essere derivate assumendo la (3.13) come definizione di luminosità. Supponiamo che i fasci incrociati siano entrambi composti da due pacchetti di particelle contenenti rispettivamente N_1 e N_2 particelle e che questi pacchetti si incrocino nella zona di interazione con una frequenza f_i (che in una macchina ad anello sarà pari alla frequenza di rotazione f_r di ciascun pacchetto nell'anello)¹. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per derivare la (3.1), possiamo assumere che, fissata la sezione d'urto σ_r , il numero di reazioni osservate nell'unità di tempo, e quindi \mathcal{L} , sia proporzionale al prodotto di N_1 , N_2 e f . Allora potremo scrivere che

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 \cdot N_2}{A} \cdot f_i \quad (3.15)$$

dove A è una grandezza che ha le dimensioni di una superficie e che risulta tanto più piccola (dando quindi luogo ad una luminosità tanto più alta) quanto più strette saranno le sezioni trasversali medie dei fasci. In particolare, se facciamo l'ipotesi che i pacchetti siano cilindretti di sezione A all'interno dei quali le particelle sono distribuite uniformemente, allora, considerando il secondo pacchetto come il bersaglio, il flusso delle particelle del primo pacchetto è dato da $\phi = f_i \cdot N_1/A$ e la (3.15) si riduce a $\mathcal{L} = \phi \cdot N_2$ come nella (3.14). Da quest'ultima espressione si capisce anche la enorme differenza tra le luminosità che si ottengono negli esperimenti a bersaglio fisso e quelle degli esperimenti a fasci incrociati: per i primi nella espressione di N_b (si veda la 3.5) compare infatti il numero di Avogadro! Nei secondi, per avere luminosità sufficienti, i fasci, oltre ad avere alta intensità, devono essere quindi focalizzati nella zona di interazione in modo da ridurre la sezione equivalente A .

Se riscriviamo la (3.13) come definizione di σ_r , in analogia con la (3.2), otteniamo:

$$\sigma_r = \frac{dN_r/dt}{\mathcal{L}} = \frac{dN_r/dt}{N_1 \cdot N_2 \cdot f} \cdot A. \quad (3.16)$$

Il primo termine dell'ultimo prodotto rappresenta di nuovo la probabilità della reazione, come rapporto tra il numero di reazioni per unità di tempo ed il numero di incroci per unità di tempo tra coppie di particelle dei due fasci, dato dal prodotto $N_1 \cdot N_2$ (ogni particella del primo pacchetto può in

¹In pratica, le macchine ad anelli incrociati utilizzano per ogni fascio un gran numero di pacchetti n_p , sincronizzati in modo da incrociarsi sempre a due a due nella zona di interazione, il che equivale a porre $f_i = n_p \cdot f_r$.

linea di principio interagire con ciascuna particella del secondo pacchetto) moltiplicato per la frequenza di incrocio dei fasci.

Il numero di eventi misurato nel corso di un esperimento è dato dal prodotto della sezione d'urto per la luminosità, integrata per tutta la durata dell'esperimento:

$$N_r = \sigma_r \int_T \mathcal{L} dt. \quad (3.17)$$

Si presti attenzione all'uso di unità inverse per la luminosità integrata: una luminosità integrata di 1000 mb^{-1} corrisponde ad una luminosità integrata di $1 \mu\text{b}^{-1}$. Con questa luminosità integrata si osserveranno infatti in media 1000 eventi di una reazione che abbia la sezione d'urto di 1 mb e 1 evento di una reazione che abbia la sezione d'urto di $1 \mu\text{b}$.

3.6 Sezioni d'urto differenziali

In un esperimento di diffusione, il numero di reazioni può essere determinato in funzione di alcune variabili cinematiche che caratterizzano lo stato finale (angoli, energie ecc. delle diverse particelle). In questo modo è possibile determinare la sezione d'urto in funzione delle stesse variabili, raccogliendo così informazioni più dettagliate sulle proprietà dell'interazione. Per far questo, si deve considerare che sperimentalmente sarà sempre necessario contare il numero di eventi che cadono in un intervallo finito delle variabili in questione. Così, se consideriamo per esempio una reazione inclusiva in cui si misura l'angolo θ del proiettile diffuso rispetto alla direzione del proiettile incidente, dovremo riscrivere la (3.13) introducendo conteggi e sezioni d'urto differenziali in queste variabili e integrando negli intervalli $\Delta E'$ e $\Delta\theta$:

$$\frac{d^2 N_r(\theta)}{dt d\theta} = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma_r(\theta)}{d\theta} \quad (3.18)$$

$$\frac{dN_r(\Delta\theta)}{dt} = \mathcal{L} \cdot \int_{\Delta\theta} \frac{d\sigma_r(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (3.19)$$

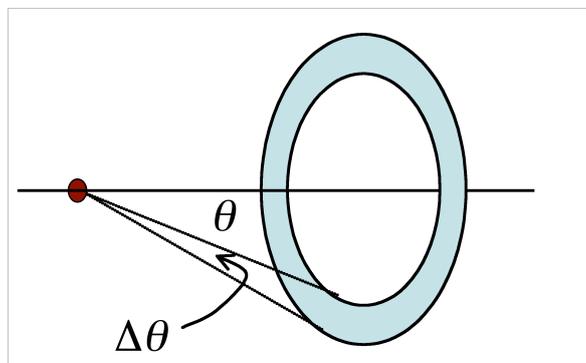


Figura 3.3: Sulla corona circolare cadranno tutte le particelle deflesse dal bersaglio ad un angolo compreso tra θ e $\theta + \Delta\theta$.

3.7 I modelli atomici e l'esperimento di Rutherford

Le prime osservazioni di Rutherford sulla deflessione dei raggi α in campi elettromagnetici mostravano che la deviazione prodotta da campi elettrici anche elevati era molto minore di quella che poteva essere prodotta dalla presenza accidentale di aria nei tubi a vuoto, il che suggeriva che all'interno degli atomi dovessero essere presenti intensi campi elettrici.

All'epoca, come abbiamo visto nel par. 2.3, J. J. Thomson aveva misurato il rapporto e/m dell'elettrone, mentre Millikan (1909) ne aveva determinata la carica, per cui era noto che la massa degli elettroni era molto piú piccola di quella totale degli atomi. Era dunque ragionevole assumere che tutta la massa dell'atomo fosse associata alla carica positiva. Il modello atomico di Thomson ipotizzava dunque un atomo neutro di forma sferica delle dimensioni di 10^{-10} m, in cui è distribuita con continuità la carica positiva Ze . In questa sfera sono immersi Z elettroni.

In un simile atomo, la diffusione di una particella carica incidente era quindi il risultato di una serie di molte interazioni con le diverse cariche positive e negative distribuite uniformemente all'interno dell'atomo. Questo schema rendeva la diffusione sostanzialmente indipendente dalla penetrazione della particella all'interno dell'atomo (la carica vista dalla particella era in media sempre nulla, come mostrato nella figura 3.4) e non poteva produrre

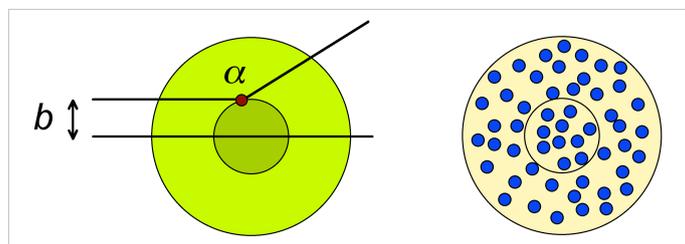


Figura 3.4: Particelle α diffuse dal nucleo atomico: a destra, per il teorema di Gauss, il campo visto dalla particella α è dato dalla carica contenuta in una sfera di raggio b ; a sinistra, nel modello di Thomson la carica positiva è distribuita in maniera uniforme all'interno del nucleo, così come gli elettroni. La carica di una sfera di raggio b è quindi in media nulla e non dipende da b .

deflessioni a grande angolo.

Nel 1910-11 Rutherford e i suoi collaboratori Geiger e Marsden decisero quindi di ricercare sistematicamente diffusioni a grande angolo delle particelle α da fogli sottili di materiale, trovando sistematicamente eventi di questo tipo, anche con spessori minimi di materiale.

Questi eventi potevano essere giustificati assumendo che la distribuzione delle cariche positive fosse concentrata in una regione di spazio molto più piccola all'interno dell'atomo, per cui man mano che la particella α si avvicinava a questo nucleo positivo, lo schermo dovuto alle cariche degli elettroni si riduceva sempre più, fino a rendere possibili interazioni coulombiane col campo elettrico dovuto ad una carica totale positiva Ze , concentrata nel nucleo.

3.8 La sezione d'urto di Rutherford

La interazione di una particella di massa m e carica ze con un nucleo di massa M e carica Ze può essere descritta facilmente in meccanica classica sotto le seguenti ipotesi:

- la velocità v del proiettile è piccola rispetto alla velocità della luce;
- la diffusione è elastica, per cui si deve conservare anche l'energia cinetica;

- la massa del nucleo è grande rispetto a quella del proiettile, per cui nell'urto il nucleo assorbe impulso ma non energia e quindi l'impulso del proiettile cambia in direzione ma non in modulo;
- l'interazione è dovuta alla forza di Coulomb $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2}$;
- l'energia totale del sistema è positiva, per cui il proiettile descriverà un'orbita iperbolica.

Dalla conservazione del modulo dell'impulso del proiettile, $p = mv$, segue che l'impulso trasferito dal bersaglio è dato da:

$$\Delta p = 2p \sin(\vartheta/2) \quad (3.20)$$

dove ϑ è l'angolo di diffusione. Dal teorema dell'impulso, Δp può essere messo in relazione con la forza coulombiana che si esercita tra proiettile e bersaglio:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} f dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \beta}{r^2} dt \quad (3.21)$$

dove β è l'angolo formato dal vettore \vec{r} che va dal bersaglio al proiettile con la bisettrice dell'angolo $\pi - \vartheta$, come mostrato in figura 3.5.

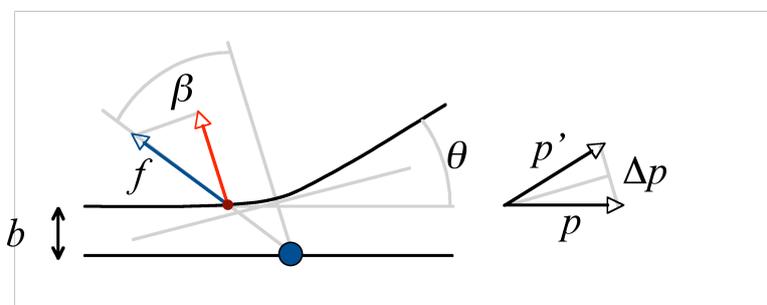


Figura 3.5: La variazione dell'impulso della particella α è dovuta alla componente $f \cos \beta = zZe^2/4\pi\epsilon_0 r^2 \cos \beta$ della forza coulombiana nella direzione della bisettrice dell'angolo $\pi - \vartheta$ (nella direzione ortogonale a questa, la variazione di impulso per β positivi e negativi si compensa per simmetria).

Se definiamo il parametro d'urto b come la distanza del nucleo dalla traiettoria rettilinea del proiettile prima dell'interazione, il momento angolare

del proiettile rispetto al bersaglio (che si deve conservare essendo la forza centrale) è dato in modulo da $L = pb$. D'altra parte, il modulo del momento angolare può essere anche espresso come

$$L = |\vec{r} \wedge m\vec{v}| = rmv_\beta = r^2 m \frac{d\beta}{dt} \quad (3.22)$$

dove $v_\beta = rd\beta/dt$ è la componente della velocità nella direzione ortogonale al raggio. Uguagliando le due espressioni di L si ottiene

$$dt = \frac{r^2 m}{pb} d\beta \quad (3.23)$$

che inserito nella (3.21) dà

$$\Delta p = \int_{-(\pi-\vartheta)/2}^{(\pi-\vartheta)/2} \frac{zZe^2 \cos \beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 m}{r^2} \frac{r^2 m}{pb} d\beta = \frac{zZe^2 m}{2\pi\epsilon_0 pb} \cos \frac{\vartheta}{2} \quad (3.24)$$

che combinata con la (3.20) fornisce una relazione tra il parametro d'urto e l'angolo di diffusione:

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0 p^2 b}. \quad (3.25)$$

Per $b = 0$ si ottiene $\vartheta = \pi$ il che significa che il proiettile ritorna indietro nella direzione iniziale.

Ricavando b dalla formula precedente, si ottiene:

$$b = -\frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0 p^2 \tan \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.26)$$

Differenziando ambo i membri possiamo scrivere:

$$db = -\frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0 p^2} \frac{d\vartheta}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (3.27)$$

Dalla relazione tra parametro d'urto e angolo di diffusione si ricava facilmente la sezione d'urto differenziale in funzione di quest'ultimo (figura 3.6). Infatti le particelle che vanno ad un angolo compreso tra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ sono quelle che cadono in una corona circolare compresa tra b e $b + db$ centrata intorno alla posizione del bersaglio. La superficie di questa corona circolare

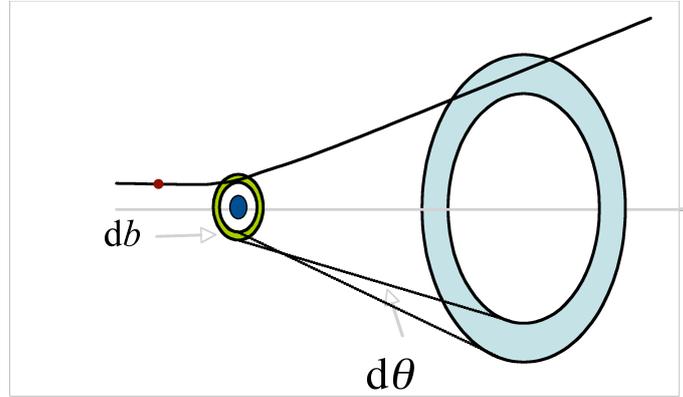


Figura 3.6: Le particelle con parametro d'urto compreso tra b e $b + db$ sono deviate di un angolo compreso tra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$.

può essere vista come la sezione d'urto geometrica efficace del bersaglio per le diffusioni a questi angoli:

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi \left(\frac{zZe^2m}{4\pi\epsilon_0 p^2} \right)^2 \frac{d\vartheta}{2 \tan \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (3.28)$$

Introducendo l'angolo solido $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ e utilizzando la formula $\sin \vartheta = 2 \sin \vartheta/2 \cos \vartheta/2$ possiamo scrivere infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2m}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{4p^4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = \left(\frac{zZe^2m}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4}{(\Delta p)^4} \quad (3.29)$$

che rappresenta la *sezione d'urto di Rutherford*. Vale la pena di notare (come vedremo nel paragrafo 5.2) che questa derivazione classica, che è quella sostanzialmente seguita da Rutherford, rimane valida anche in base ad una trattazione quantistica e relativistica.

Le misure di Geiger e Mardsen per la diffusione di particelle α su fogli sottili di diversi materiali (figura 3.7) confermano l'andamento $\sin^{-4} \vartheta/2$ della sezione d'urto, così come le altre dipendenze, previste dalla (3.29), dalla carica dei nuclei e dall'energia delle particelle incidenti.

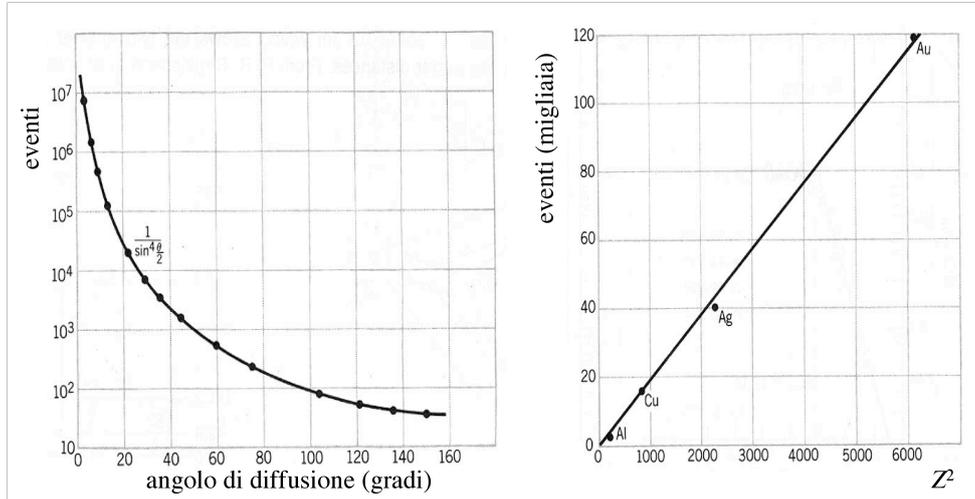


Figura 3.7: A sinistra: distribuzione del numero di eventi in funzione dell'angolo di diffusione per particelle α incidenti su un foglio d'oro; i dati seguono l'andamento $\sin^{-4} \vartheta/2$ previsto dalla formula di Rutherford. A destra: numero di eventi in funzione del quadrato del numero atomico del materiale, per alluminio, rame, argento ed oro.

3.9 Il protone e le trasmutazioni nucleari

La scoperta del protone come componente elementare dei nuclei è dovuta ancora a Rutherford, che nel 1918 osservò che bombardando con particelle α un bersaglio di azoto, si ottenevano delle particelle che avevano lo stesso comportamento dei nuclei di idrogeno, che dovevano quindi essere contenuti in quelli di azoto. In realtà aveva osservato la prima trasmutazione artificiale di un nucleo, secondo la reazione:



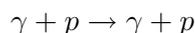
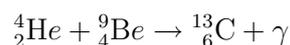
I “nuclei di idrogeno” osservati non sono altro che i protoni, costituenti dei nuclei assieme ai neutroni. Il nucleo dell'idrogeno è costituito da un solo protone. Le particelle α sono invece nuclei di elio, costituiti da due protoni e due neutroni.

3.10 La scoperta del neutrone

Già nel 1920, per superare alcune delle difficoltà create dalla ipotesi che il nucleo fosse costituito solo di elettroni e protoni, Rutherford suggerì che nel nucleo coppie di elettroni e protoni potessero essere combinate a “formare” una particella neutra a cui diede il nome di *neutrone*.

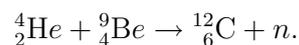
Nel 1928 Bothe e Becker osservarono che bombardando con particelle α di circa 5.4 MeV, emesse dal polonio, dei nuclei di berillio, si producevano atomi di carbonio insieme ad una radiazione non ionizzante, neutra e molto penetrante: pensarono si trattasse di raggi X.

Nel 1931 I. Curie e F. Joliot, studiando le stesse reazioni, mostrarono che questi processi erano capaci di espellere dei protoni di energia fino a 5.3 MeV da assorbitori ricchi di idrogeno come la paraffina. Spiegarono il fenomeno con la seguente reazione:



Nel 1931 Chadwick notò che un γ capace di causare questa reazione, dove si osservavano protoni di $\beta \simeq 0.1$, doveva avere un’energia di almeno 50 MeV, in palese contrasto con i γ osservati sperimentalmente, che arrivano al massimo ad energie di qualche MeV, e con il calcolo basato sul difetto di massa del ${}^{13}\text{C}$, che darebbe un’energia massima di 14 MeV. Chadwick utilizzò camere a ionizzazione nelle quali poteva misurare il numero di ioni prodotti da una particella carica e la lunghezza della traccia. Egli inoltre utilizzò diversi materiali (idrogeno, elio, berillio, carbonio, aria ed argon) come bersaglio per la radiazione sconosciuta prodotta dagli urti delle particelle α sul berillio. Le particelle espulse dall’idrogeno si comportavano come protoni con velocità che arrivavano fino a $3.2 \cdot 10^9$ cm/s, mentre le particelle espulse dai bersagli più pesanti avevano un potere di ionizzazione più grande e dovevano essere lo ione di rinculo dell’elemento, rendendo ancora più difficile l’interpretazione in termini di γ , mentre le difficoltà scomparivano se si assumeva che la particella neutra emessa dal berillio fosse pesante.

Chadwick mostrò anche che la nuova particella prodotta aveva una massa uguale a quella del protone entro il 10% e poteva quindi essere identificata col neutrone proposto da Rutherford. La reazione di partenza doveva quindi essere



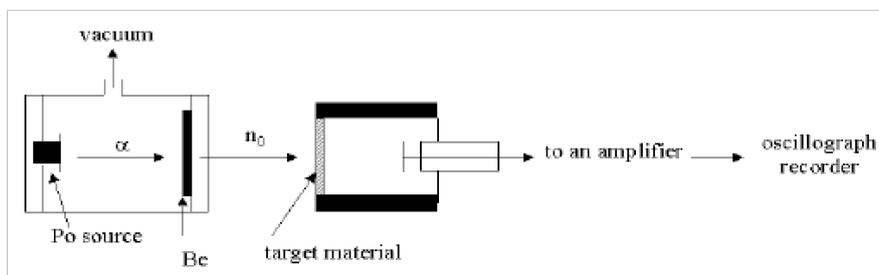


Figura 3.8: La scoperta del neutrone: le particelle α emesse da una sorgente di polonio raggiungono un bersaglio di berillio, da cui emerge una radiazione neutra che, colpendo successivamente un secondo bersaglio, produce particelle cariche, la cui ionizzazione sviluppa nella camera a destra una corrente che viene amplificata e osservata con un oscillografo.

La scoperta del neutrone permise anche di chiarire un certo numero di problemi che erano rimasti aperti sulla struttura dei nuclei. Per interpretare numero atomico e numero di massa senza ricorrere ai neutroni era necessario ipotizzare che il nucleo fosse costituito di A protoni e $A - Z$ elettroni. Il principio di indeterminazione metteva in seria difficoltà questo modello, perché per confinare l'elettrone nelle ridotte dimensioni del nucleo era necessario ipotizzarne un impulso molto elevato.

Era ormai anche chiaro almeno dal 1926 che le particelle potevano essere classificate a seconda del loro spin in *fermioni*, con uno spin pari ad un multiplo semintero di \hbar e in *bosoni*, con uno spin pari ad un multiplo intero di \hbar . La funzione d'onda di un sistema atomico deve essere simmetrica per lo scambio di due bosoni e antisimmetrica per quello di due fermioni, dando luogo a comportamenti diversi nei due casi. Protoni ed elettroni sono fermioni ed hanno quindi spin $\hbar/2$. Ora il nucleo di azoto risultava essere un bosone in base a due metodi di misura completamente indipendenti. D'altra parte, avendo numero atomico pari a 7 e numero di massa pari a 14 doveva essere costituito da 14 protoni e 7 elettroni e doveva essere pertanto un fermione. L'ipotesi del neutrone risolve anche questo problema: il nucleo di azoto è costituito da 7 protoni e 7 neutroni, ed è quindi un bosone.

La scoperta del neutrone è infine la chiave di volta per la interpretazione completa dei decadimenti β come reazioni del tipo $n \rightarrow pe\nu$, che saranno interpretate in maniera quantitativa dalla teoria di Fermi.