II Compito di esonero di Calcolo e Biostatistica con soluzione (24 gennaio 2017)

1. Da un mazzo composto da 26 carte rosse (tutte le carte di cuori e di quadri di un mazzo da poker), viene estratta una carta.

(a_1) Con quale probabilita' la carta e' di cuori o dispari?

(a_2) Con quale probabilita' e' di quadri ed ha un valore minore di 5?

(b_1) Con quale probabilta' la carta estratta è pari o maggiore di 7?

(b_2) Con quale probabilita' la carta è di cuori e ha un valore compreso tra 4 e 10?

(Il J e il K si devono considerare carte dispari la Q è una carta pari)

Soluzione. (a_1) L'evento E="estrarre una carta di cuori (indichiamolo con C) **oppure** dispari (indichiamolo con D)" è l'evento $E = C \cup D$ e la probabilità di E si calcola come $p(C) + p(D)$ se C è incompatibile con D.
Affinchè questa ipotesi sia verificata dobbiamo considerare quindi tutte le carte di cuori e le carte dispari di quadri.
Nel mazzo di carte rosse la metà è di cuori e l'altra metà di quadri, quindi si ha

$$p(C) = \frac{1}{2}.$$

Le carte dispari di quadri sono 7 su 26 quindi, in definitiva, si ha

$$p(E) = \frac{1}{2} + \frac{7}{26} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}.$$

(a_2) L'evento A="estrarre una carta di quadri (indichiamolo con Q) che abbia **anche** valore minore di 5 (indichiamolo con B)" è l'evento $A = Q \cap B$.
La probabilità di A si calcola come $p(A) = p(Q)p(B)$ quando Q è indipendente da B. Le carte di quadri sono la metà ($p(Q) = 1/2$), quelle minori di 5 tra quelle di quadri sono 4 su 13, quindi

$$p(Q)p(B) = \frac{1}{2}\frac{4}{13} = \frac{4}{26}$$

(effettivamente nel mazzo le carte di quadri minori di 5 sono 4 su 26).

(b_1) L'evento E'="estrarre una carta pari (indichiamolo con P) **oppure** maggiore di 7 (indichiamolo con S)" è l'evento $E' = P \cup S$ e la probabilità di E' si calcola come $p(P) + p(S)$ se P è incompatibile con S.
Affinchè questa ipotesi sia verificata dobbiamo considerare quindi tutte le carte pari minori di 7 (che sono 6 su 26) e tutte le carte maggiori di 7 (che sono 12 su 26). Quindi

$$p(E') = \frac{6}{26} + \frac{12}{26} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}.$$

(b_2) L'evento A'="estrarre una carta di cuori (indichiamolo con C) che abbia **anche** valore compreso tra 4 e 10 (indichiamolo con B^*)" è l'evento $A' = Q \cap B^*$ e la probabilità di A' si calcola come $p(A') = p(C)p(B^*)$ quando C è indipendente da B^*.
Le carte di cuori sono la metà ($p(C) = 1/2$), e quelle di cuori comprese tra 4 e 10 sono 5 su 13. Quindi

$$p(C)p(B^*) = \frac{1}{2}\frac{5}{13} = \frac{5}{26}$$

(effettivamente nel mazzo le carte di cuori comprese tra 4 e 10 sono 5 su 26).

2. Data funzione

$$(a)\ \ f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+2}} \qquad (b)\ \ f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2}} \qquad (c)\ \ f(x) = \sqrt{\frac{4x-x^2}{x^2}}$$

dire qual è il dominio e individuare l'insieme di valori del dominio in cui la funzione assume segno positivo o nullo. Scrivere le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali e le coordinate degli eventuali punti di massimo e/o minimo della funzione. Disegnare il grafico.
Scrivere l'equazione della retta tangente il grafico nel punto $P = (1, f(1))$.

Soluzione. (a) La funzione è definita per i valori di x che soddisfano le seguenti condizioni:
- $\frac{x^2}{x+2} \geq 0$
- $x + 2 \neq 0$.

Le condizioni sono entrambe soddisfatte se $x + 2 > 0$ cioè $x > -2$. Quindi il dominio è l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}, x > -2\}$.

Nel dominio la funzione è sempre positiva o nulla (è nulla se $x = 0$, è positiva per $x > -2$ e $x \neq 0$).

Se $x \to \infty$ si ha $f(x) \to \infty$ (il numeratore diverge più rapidamente del denominatore), quindi non ci sono asintoti orizzontali per il grafico della funzione.
Per $x \to -2$ si ha $f(x) \to \infty$ (il denominatore tende a zero), quindi la retta verticale di equazione $x = -2$ è un asintoto verticale per i grafico della funzione.

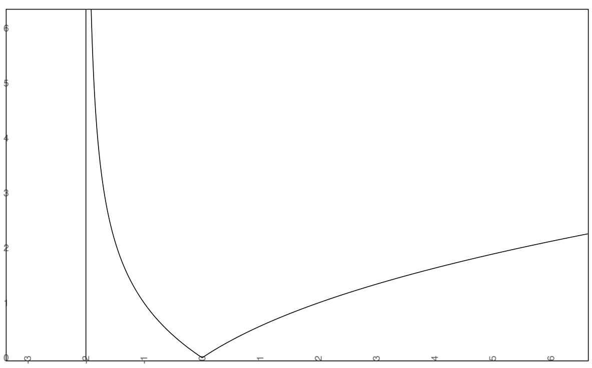
Per verificare se esistono massimi o minimi è necessario calcolare la derivata prima della funzione. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2[x^2/(x+2)]^{1/2}} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{1}{2[x^2/(x+2)]^{1/2}} \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

Gli eventuali punti di massimo o minimo si trovano in corrispondenza di valori di x per i quali risulta $f'(x) = 0$. In questo caso, i valori per cui il numeratore si annulla sono

$$x + 0 \quad x = -4.$$

Il valore $x = -4$ non appartiene al dominio; se $x = 0$ oltre al numeratore, si annulla anche il denominatore, quindi la derivata non e' definita: non ci sono punti del dominio in cui si ha $f'(x) = 0$. La derivata ha segno negativo per $x < 0$, mentre si ha $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Si conclude che la funzione $f(x)$ decresce per $-2 < x < 0$, e cresce per $x > 0$ quindi si riconosce che il punto A di coordinate $(0, f(0) = 0)$ deve essere un punto di minimo.
Il grafico della funzione è



Il punto $P = (1, f(1)) = (1, \sqrt{1/3})$; l'equazione della retta tangente il grafico in P è $y = f'(1)x + c$. Visto che $f'(1) = \frac{5}{18\sqrt{1/3}}$ si ha

$$y = \frac{5}{18\sqrt{1/3}}x + c$$

imponendo che la retta passi per il punto P l'equazione e'

$$y = \frac{5}{18\sqrt{1/3}}x + \frac{1}{18\sqrt{1/3}}.$$

(b) La funzione è definita per i valori di x che soddisfano le seguenti condizioni:
- $\frac{x+3}{x^2} \geq 0$
- $x \neq 0$.

Le condizioni sono soddisfatta se $x + 3 \geq 0$ cioè $x \geq -3$ e se $x \neq 0$. Quindi il dominio è l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}, x \geq -3, x \neq 0\}$.

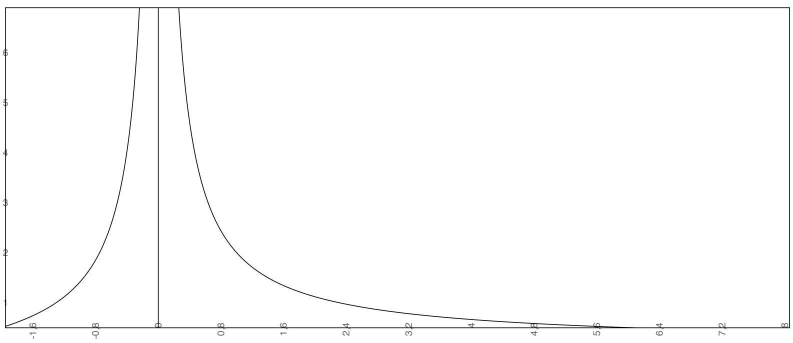
Nel dominio la funzione è sempre positiva o nulla (è nulla se $x = -3$, è positiva per gli altri valori di x nel dominio).

Se $x \to \infty$ si ha $f(x) \to 0$ (il numeratore diverge meno rapidamente del denominatore), quindi la retta orizzontale $y = 0$ è un asintoto orizzontale per il grafico della funzione.
Si ha $f(x) \to \infty$ per $x \to 0$, quindi la retta verticale $x = 0$ (l'asse y) è un asintoto verticale per il grafico della funzione.

Per verificare se esistono massimi o minimi è necessario calcolare la derivata prima della funzione. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2[(x+3)/(x^2)]^{1/2}} \frac{x^2 - (x+3)2x}{x^4} = \frac{1}{2[(x+3)/(x^2)]^{1/2}} \frac{-x-6}{x^3}$$

Gli eventuali punti di massimo o minimo si trovano in corrispondenza di valori di x per i quali risulta $f'(x) = 0$, che in questo caso, sono i valori per cui si ha $x = -6$.
Il valore $x = -6$ non appartiene al dominio quindi non esistono valori di x per cui si annulla la derivata.
La derivata ha segno positivo per $x < 0$, mentre si ha $f'(x) < 0$ per $x > 0$. Si conclude che la funzione $f(x)$ cresce per $x < 0$, e decresce per $x > 0$.
Visto che per $x = -3$ si ha $f(-3) = 0$ e visto che la funzione e' positiva per gli altri valori di x nel dominio, si conclude che il punto $A = (-3, 0)$ e' un minimo.
Il grafico della funzione è



Il punto $P = (1, f(1)) = (1, 2)$; l'equazione della retta tangente il grafico in P è $y = f'(1)x + c$. Visto che $f'(1) = -\frac{7}{4}$ e imponendo che la retta passi per il punto P si ha

$$y = -\frac{7}{4}x + c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{4}x + \frac{15}{4}.$$

(c) La funzione è definita per i valori di x che soddisfano le seguenti condizioni:
- $\frac{4x-x^2}{x^2} \geq 0$
- $x \neq 0$.

La prima condizione è soddisfatta se $4x - x^2 \geq 0$ cioè se $0 \leq x \leq 4$ (il denominatore è positivo o nullo). Tenendo conto della seconda condizione, il dominio è l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}, 0 < x \leq 4\}$.

Nel dominio la funzione è sempre positiva o nulla (è nulla se $x = 4$, è positiva per gli altri valori di x nel dominio).

Visto l'insieme di definizione, la x non può tendere ad infinito, quindi non ci possono essere asintoti orizzontali per il grafico della funzione.
Visto che la funzione si può riscrivere nella forma

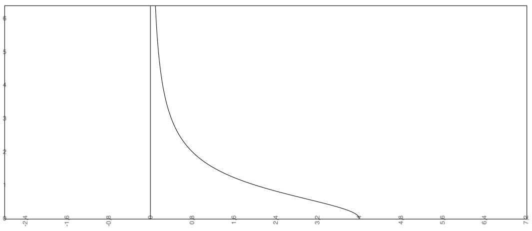
$$f(x) = \sqrt{\frac{4}{x} - 1}$$

si vede che per $x \to 0$ si ha $f(x) \to \infty$, quindi la retta verticale di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale per i grafico della funzione.

Per verificare se esistono massimi o minimi è necessario calcolare la derivata prima della funzione. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2[(4x - x^2)/(x^2)]^{1/2}} \frac{(4 - 2x)x^2 - (4x - x^2)2x}{(x)^4} = -\frac{1}{2[(4x - x^2)/(x^2)]^{1/2}} (\frac{4}{x^2})$$

Gli eventuali punti di massimo o minimo si possono trovare in corrispondenza di valori di x per i quali risulta $f'(x) = 0$. In questo caso la derivata non si annulla mai, quindi non esistono punti di massimo o di minimo che abbiano tangente orizzontale.
Nel dominio la derivata ha sempre segno negativo, si conclude che la funzione $f(x)$ decresce per ogni x, visto che la funzione e' positiva e che per $x = 4$ si ha $f(4) = 0$ il punto $B = (4, 0)$ e' di minimo (e in quel punto la tangente il grafico non e' orizzontale).
Il grafico della funzione è



Il punto $P = (1, f(1)) = (1, \sqrt{3})$; l'equazione della retta tangente il grafico in P è $y = f'(1)x + c$. Visto che $f'(1) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ e imponendo che la retta passi per il punto P si ha

$$y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x + c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

3. Dire per quale valore di $a > 1$ si realizza l'uguaglianza seguente

$$(a) \quad \int_1^a \frac{2(x+1)}{2x + x^2} dx = \ln 10 - \ln 3, \qquad (b) \quad \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 2} dx = \ln 8, \qquad (c) \quad \int_0^a \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = \ln 4$$

Soluzione. (a) Se si osserva che, data la funzione $f(x) = \ln(2x + x^2)$, la derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{2x + x^2}(2 + 2x) = \frac{2(1 + x)}{2x + x^2}$$

(che è l'argomento dell'intergrale) si può riscrivere l'integrale nella forma

$$\int_1^a \frac{2(x+1)}{2x + x^2} dx = \int_1^a f'(x) dx$$

Per il teorema di Torricelli-Barrow si ha quindi

$$\int_1^a \frac{2(x+1)}{2x+x^2}dx = \ln(x^2+2x)\Big|_1^a = \ln(a^2+2a) - \ln 3$$

Risulta $\ln(a^2+2a) - \ln 3 = \ln 10 - \ln 3$ se $a^2+2a = 10$ cioè $a^2+2a-10 = 0$ e quindi $a = \sqrt{11} - 1$.

(b) Se si osserva che data la funzione $f(x) = \ln(x^2+2)$ la derivata è $f'(x) = \frac{1}{x^2+2}(2x)$, si può riscrivere l'integrale nella forma

$$\int_0^a \frac{2x}{x^2+2}dx = \int_0^a f'(x)dx$$

Per il teorema di Torricelli-Barrow si ha quindi

$$\int_1^a \frac{2x}{x^2+2}dx = \ln(x^2+2)\Big|_1^a = \ln(a^2+2) - \ln 2$$

Risulta $\ln(a^2+2) - \ln 2 = \ln 8 = \ln 2^3$ se $\ln(a^2+2) = \ln 2 + \ln 8 = \ln 16$ quindi deve essere $a^2+2 = 16$ cioè $a^2 = 14$ e $a = \sqrt{14}$.

(c) Se si osserva che data la funzione $f(x) = \ln(e^x+1)$ la derivata è $f'(x) = \frac{1}{e^x+1}(e^x)$, si può riscrivere l'integrale nella forma

$$\int_0^a \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int_0^a f'(x)dx$$

Per il teorema di Torricelli-Barrow si ha quindi

$$\int_0^a \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\ln(e^x+1)\Big|_0^a = 2[\ln(e^a+1) - \ln(2)]$$

Risulta $2[\ln(e^a+1) - \ln(2)] = \ln 4$ se $2\ln(e^a+1) = 2\ln 4$ quindi deve essere $e^a+1 = 4$ cioè $e^a = 3$ e $a = \ln 3$.

4. Un dispositivo elettronico è formato da n componenti e ciascun componente funziona in modo indipendente dagli altri. Inoltre il dispositivo elettronico funziona correttamente se almeno il 75% dei componenti funziona correttamente.
Se la probabilità che ciascun componente funzioni correttamente è $p = 0.2$ (uguale per tutti i componenti),

i) calcolare la probabilità che il dispositivo funzioni correttamente nel caso che il numero dei componenti sia

(a) $n = 5$ (b) $n = 8$ (c) $n = 7$

ii) Nel caso considerato, quanti componenti del dispositivo funzionano in media?

Soluzione. (a) Se le componenti del dispositivo sono $n = 5$, affinchè il dispositivo funzioni devono funzionare correttamente almeno $k = (0.75)5 = 3.75$ componenti, quindi deve essere $k = 4$ oppure $k = 5$.
Lo spazio degli eventi che si possono realizzare è composto da $S = \{F, NF\}$, dove l'evento F indica che un componente funziona, l'evento NF che non funziona. F e NF sono incompatibili quindi se $p(F) = 0,2$, si ha $p(NF) = 0,8$.
La probabilità che funzionino $k = 4$ oppure $k = 5$ componenti è data da

$$p(k=4) + p(k=5) = \binom{5}{4} 0,2^4(0,8)^1 + \binom{5}{5} 0,2^5(0,8)^0 = 5(0,0016)(0,8) + 0,00032 \approx 0,0064$$

In media, su 5, funzionano $\langle k \rangle = 5(0,2) = 1$ componente.

(b) Se le componenti del dispositivo sono $n = 8$, affinchè il dispositivo funzioni devono funzionare correttamente almeno $k = (0.75)8 = 6$ componenti, quindi deve essere $k = 6$ oppure $k = 7$ oppure $k = 8$.
Ragionando come nel caso (a) si deve calcolare

$$p(k=6) + p(k=7) + p(k=8) = \binom{8}{6} 0,2^6(0,8)^2 + \binom{8}{7} 0,2^7(0,8)^1 + \binom{8}{8} 0,2^8(0,8)^0 \approx$$

$$\approx 28(0,000064)(0,64) + 8(0,000013)(0,8) + 0,000003 \approx 0,0011$$

In media su $n = 8$ componenti ne funzionano $\langle k \rangle = 8(0,2) = 1,6$.

(c) Se le componenti del dispositivo sono $n = 7$, affinchè il dispositivo funzioni devono funzionare correttamente almeno $k = (0.75)7 = 5,25$ componenti, quindi deve essere $k = 6$ oppure $k = 7$.
Ragionando come nel caso (a) si deve calcolare

$$p(k = 6) + p(k = 7) = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 6 \end{array} \right) 0,2^6 (0,8)^1 + \left(\begin{array}{c} 7 \\ 7 \end{array} \right) 0,2^7 (0,8)^0 \approx$$

$$\approx 7(0,000064)(0,8) + (0,000013) \approx 0,036$$

In media su $n = 7$ componenti ne funzionano $\langle k \rangle = 7(0,2) = 1,4$.