Es. 16 con soluzioni (Compito d'esame del 14.07.14)

Es.1) Al variare del parametro k dire quante soluzioni ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} (3+k)x - y = 1 \\ (k-5)x + ky = 2 \end{cases}$$

Soluzione: La matrice dei coefficienti del sistema e'

$$A = \begin{pmatrix} 3+k & -1 \\ k-5 & k \end{pmatrix}.$$

e il determinante di A vale $\det A = k(3+k) + (k-5) = k^2 + 4k - 5$. Si ha $\det A = 0$ se $k = 1$, $k = -5$. Quindi se $k \neq -5$, $k \neq 1$ il sistema ha una sola soluzione data da

$$x(k) = \frac{2+k}{k^2+4k-5} \qquad y(k) = -\frac{11+k}{k^2+4k-5}.$$

Se $k = -5$ il sistema si riscrive come

$$\begin{cases} -2x - y = 1 \\ -10x - 5y = 5(-2x-y) = 2 \end{cases}$$

cioe'

$$\begin{cases} -2x - y = 1 \\ -2x - y = 2/5 \end{cases}$$

I primi membri sono uguali, mentre i secondi non lo sono: il sistema non ha soluzioni.
Se invece $k = 1$ si ha

$$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ -4x + y = -(4x-y) = 2 \end{cases}$$

cioe'

$$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$$

e, anche in questo caso, il sistema non ha soluzione.

Es.2) Studiare il grafico della funzione

$$y = f(x) = \frac{e^{3x}}{x-3}$$

indicando in particolare: il dominio di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo ed assoluto. Si scriva inoltre l'equazione della retta tangente il grafico della funzione nel punto $P = (4, f(4))$.

Soluzione: la funzione è definita se $x \neq 3$. Per verificare l'esistenza di asintoti per il grafico studiamo i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

quindi la retta orizzontale $y = 0$ è un asintoto per il grafico. Si ha anche

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$$

quindi la retta verticale $x = 3$ è un asintoto per il grafico.
Si può inoltre osservare che se $x < 3$ la funzione è negativa, mentre se $x > 3$ è positiva.

Per studiare l'andamento della funzione è utile calcolare la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{3e^{3x}(x-3) - e^{3x}}{(x-3)^2} = e^{3x}\frac{3x-9-1}{(x-3)^2} = e^{3x}\frac{3x-10}{(x-3)^2}$$

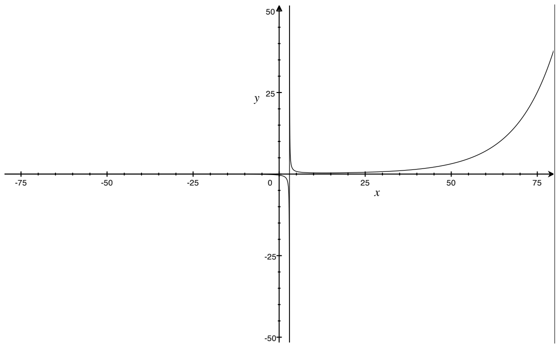
Tenendo conto del fatto che $e^{3x} > 0$ sempre e che il denominatore è sempre positivo, il segno della derivata dipende da quello del numeratore $3x - 10$. Si ha

- $f'(x) > 0$, e quindi la funzione cresce, se $3x - 10 > 0$ cioè se $x > 10/3$

- $f'(x) = 0$, e quindi la funzione non cresce nè decresce, se $x = 10/3$

- $f'(x) < 0$, e quindi la funzione decresce, se $x < 10/3$.

Se $x = 10/3$, si ha $f(10/3) = e^{10}/7$; visto l'andamento della funzione, possiamo concludere che il punto $P = (10/3, e^{10}/7)$ è un minimo relativo. Il grafico è



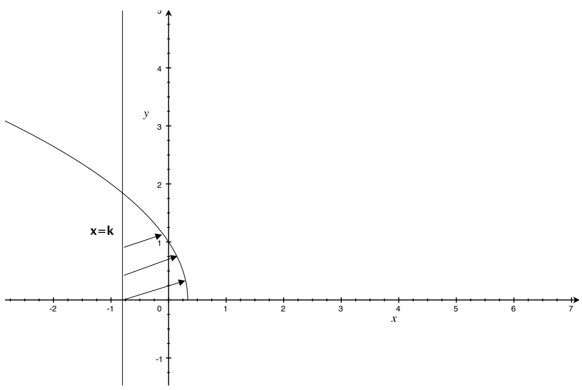
Visto che $f(4) = e^{12}$ e che $f'(4) = 2e^{12}$, l'equazione della retta tangente il grafico in $P = (4, e^{12})$ è $y = 2e^{12}x + c$ dove c si calcola imponendo il passaggio per P. Si ha in definitiva $y = e^{12}(2x - 7)$.

Es.3) Determinare il valore del parametro k tale che l'area della regione limitata del piano cartesiano individuata dall'asse x, dalla retta di equazione $x = k$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - 3x}$$

sia uguale a 2.

Svolgimento: la funzione è definita per $x < 1/3$ e l'area da calcolare è quella indicata in figura



Si ha

$$2 = \int_k^{1/3} (1 - 3x)^{1/2} dx = -(2/9)(1 - 3x)^{3/2}|_k^{1/3} = (2/9)(1 - 3k)^{3/2}.$$

Per ricavare k bisogna risolvere l'equazione $(2/9)(1 - 3k)^{3/2} = 2$ che, equivalentemente, si scrive $9 = (1 - 3k)^{3/2}$. Elevando ambo i membri alla potenza $2/3$ e ricavando k si ha $k = 1/3 - \sqrt[3]{3}$.

Es.4) In laboratorio si studia la sopravvivenza di una colonia di *Drosophile* (moscerini della frutta). Un individuo della colonia ha una probabilità 1/3 di vivere più di 20 giorni e 1/4 di vivere più di 35 giorni.
Su un campione di 8 individui, con quale probabilità dopo 35 giorni ne sopravvivono al più 2? Quanti individui del campione, in media, sopravvivono dopo 20 giorni?

Soluzione: se S_1 è l'evento "sopravvivere più di 20 giorni", si ha $p_1 = p(S_1) = 1/3$; se S_2 è l'evento "sopravvivere più di 35 giorni", si ha $p_2 = p(S_2) = 1/4$. Gli eventi "sopravvivere meno di 20 giorni" e "sopravvivere meno di 35 giorni" hanno probabilità $q_1 = 1 - p_1 = 2/3$ e $q - 2 = 1 - p_2 = 3/4$.

Su un campione di $N = 8$ individui, dopo 35 giorni, ne sopravvivono al più 2 se non ne sopravvive nessuno ($k = 0$), oppure uno ($k = 1$), oppure due ($k = 2$). Bisogna quindi calcolare

$$p(k=2) + p(k=1) + p(k=0) = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array}\right)(0.25)^2(0.75)^6 + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 1 \end{array}\right)(0.25)(0.75)^7 + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \end{array}\right)(0.75)^8 \approx$$

$$\approx 28(0.0625)(0.18) + 8(0.033) + 0.1 \approx 0.31 + 0.27 + 0.1 = 0.68.$$

Il numero medio di sopravvissuti dopo 20 giorni è $\langle S_1 \rangle = 8 \cdot (1/3) = 8/3 \approx 3$.