SC. BIOLOGICHE - MODULO di CALCOLO e BIOSTATISTICA

Esercizio 14 con soluzioni (Probabilità)

1. La probabilità che un cliente che entra in un negozio di elettrodomestici compri un computer è il 20%. Se nel negozio ci sono 7 clienti, quanti, in media non compreranno un computer? Con che probabilità almeno 1 dei 7 compra un computer? E' piu' probabile che un solo cliente compri un computer o che lo comprino piu' di tre clienti?

Soluzione: Sia C l'evento "*entrare nel negozio per comprare un computer*"; l'evento opposto "*entrare nel negozio per non comprare computer* " sia NC. Si ha $p(C) = 0.2 = p$ quindi $p(NC) = 1 - p = 0.8$. Se nel negozio ci sono $N = 7$ clienti, in media $N \cdot (1 - p) = (4/5)7 = 28/5 = 5.6$ clienti dei 7 non comprano un computer.

"*Almeno 1 dei 7 clienti compra un computer*" significa che 1 cliente, oppure 2, oppure 3 ..., oppure tutti e 7 comprano un computer. Detto X il numero di clienti che compra computer, la probabilita' di questo evento e'

$$p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + ... + p(X = 7) = 1 - p(X = 0)$$

Visto che

$$p(X = 0) = \binom{7}{0} (1/5)^0 (4/5)^7 = (4/5)^7 \approx 0.21$$

la probabilità che almeno un cliente compri un computer è circa 1-0.21=0.79 (circa il 79%).
La probabilita' che un cliente compri un computer vale

$$p(X = 1) = \binom{7}{1} (1/5)^1 (4/5)^6 \approx 7(0.2)(0.26) \approx 0.37$$

La probabilita' che piu' di tre clienti comprino un computer vale

$$p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)]$$

Visto che abbiamo gia' calcolato $p(X = 0) \approx 0.21$ e $p(X = 1) \approx 0.37$, conviene calcolare

$$p(X = 2) = \binom{7}{2} (1/5)^2 (4/5)^5 \approx 21(0.2)^2(0.8)^5 \approx 0.27$$

e

$$p(X = 3) = \binom{7}{3} (1/5)^3 (4/5)^4 \approx 35(0.2)^3(0.8)^4 \approx 0.11$$

Si conclude che la probabilita' che piu' di 3 clienti comprino un computer vale $p(X > 3) \approx 1 - [0.21 + 0.37 + 0.27 + 0.11] = 0.04$, quindi e' molto piu' probabile che un sol cliente compri un computer piuttosto che lo comprino piu' di 3 clienti.

2. (Mantenimento della biodiversita') La biodiversita' e' dovuta alla grandissima quantita' di organismi viventi che popolano la Terra. In particolare in ambito agro-alimentare, e' sempre piu' urgente, e di grande attualita', la regolamentazione e la tutela delle specie vegetali destinate all'alimentazione. Il primo passo di una pianificazione di tutela e' quello della conoscenza e della quantificazione.
Rilevata una zona in cui una specie rara (come ad esempio il melo selvatico) sopravvive, se ne misura l'estensione. Se, ad esempio, l'estensione e' di 5 chilometri quadrati, la zona viene divisa in 50 quadrati da 500 metri quadrati ciascuno. In ogni quadrato viene rilevato il numero di alberi presente. La tabella seguente riassume le osservazioni:

N. alberi di melo selvatico	0	1	2	3	4
Frequenza	21	18	7	3	1

(cioe' in 21 quadrati non si trova nessun albero, in 18 se ne trova 1 ecc.).
Calcolare il numero medio di alberi di melo selvatico per quadrato. Assumendo che questo valore non sia troppo distante dal valore atteso, scegliendo a caso un quadrato (o equivalentemente una zona) si

puo' prevedere con quale probabilità ci saranno 3 alberi di melo selvatico? (Motivare **ogni** passaggio della risposta).
Se la probabilita' di trovare alberi di melo selvatico e' quella trovata, quanti meli selvatici ci si devono aspettare teoricamente in media in una estensione di 5 chilometri quadrati? Confrontare il valore teorico trovato con il valore della tabella e commentare il risultato.

Soluzione: Dalla tabella si ottiene che il numero medio M di alberi di melo selvatico per quadrato e'

$$M = \frac{21 \cdot 0 + 18 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4}{50} = 0.9.$$

Se assumiamo che questo sia anche il valore medio (atteso) del numero di alberi ($M = \langle M \rangle$), osservando che il numero totale di alberi di questo tipo in 5 chilometri quadrati e' $N = 18 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 4 = 45$, possiamo concludere che la probabilita' di trovare alberi e' $p = 0.9/45 = 0.02$ (un valore piuttosto piccolo). Questo implica che per calcolare con quale probabilita' troviamo 3 alberi in un quadrato possiamo usare la distribuzione di Poisson.
Quindi detto X il numero di alberi che si trovano in un quadrato, si che ha la probabilita' si trovarne 3 e' data da

$$p(X = 3) = \frac{0.9^3}{3!} e^{-0.9} \approx 0.05.$$

Dalla tabella iniziale si puo' vedere si trovano 3 alberi in 3 dei 50 quadrati: la frequenza relativa con cui si trovano 3 alberi vale $f_3 = 3/50 = 0.06$ e questo valore non e' molto diverso dal valore teorico che abbiamo ricavato (0.05). La distribuzione di Poisson descrive piuttosto accuratamente quello che accade in realta'.
(Come ulteriore verifica si puo', ad esempio, calcolare $p(X = 0)$ (la probabilita' che non ci siano alberi in un quadrato scelto a caso), che risulta circa uguale a 0.41; dalla tabella la frequenza relativa dell'evento non trovare nessun albero e' 21/50=0.42, e anche in questo caso il valore teorico (0.41) non e' molto diverso dal valore osservato.)

Visto che la probabilita' di trovare alberi in un quadrato vale 0.02, e quindi la probabilita' di non trovarne vale 0.098, visto anche il numero totale di alberi e' $N = 45$, verificare, per esercizio, che con la distribuzione binomiale $p(X = 3)$ risulta circa 0.0488, in ottimo accordo con il valore ricavato con la distribuzione di Poisson.

3. Un'azienda che produce e vende elettricita' ha un centralino reclami e segnalazione guasti che e' operativo dalle 9 alle 21. In media il centralino riceve una chiamata ogni due minuti. Con che probabilita' in un minuto il centralino riceve piu' di 2 chiamate di reclamo? Con che probabilita' in 5 minuti il centralino riceve 4 reclami? (Motivare a parole tutte le risposte)

Soluzione: Se il centralino riceve 1 chiamata ogni 2 minuti, questo vuol dire che in un minuto riceve, in media 0.5 chiamate (se X e' in numero delle chiamate al minuto, $\langle X \rangle = 0.5$).
Visto che il centralino lavora per 12 ore di 60 minuti, cioe' per 720 minuti, il numero medio di chiamate al giorno e' $N = 720 \cdot 0.5 = 360$ e la probabilita' di ricevere una chiamata vale $p(C) = 0.5/360 \approx 10^{-3}$. Quindi la probabilita' di ricevere piu' di 2 chiamate in un minuto puo' essere calcolata con la distribuzione di Poisson.
Si ha

$$p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$$

e

$$p(X = 0) = \frac{0.5^0}{0!} e^{-0.5} \approx 0.61$$

$$p(X = 1) = \frac{0.5}{1!} e^{-0.5} \approx 0.3$$

Quindi $p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) \approx 0.09$.
Visto che $5 \cdot 0.5 = 2.5$: il numero medio di chiamate in 5 minuti e' 2.5. Quindi

$$p(X = 4) = \frac{2.5^4}{4!} e^{-2.5} \approx 0.13$$

4. Un tassista che lavora di notte riceve, in media, in una settimana 82 chiamate notturne. Se una sera ne riceve 6, si tratta di un evento eccezionale?

Soluzione: Le chiamate notturne sono distribuite casualmente lungo le sere della settimana e, in media ogni sera l'uomo riceve circa $82/7 \approx 11.7$ chiamate.
Si puo' assumere uno schema di Poisson per il calcolo della probabilitá. La probabilitá di ricevere 6 chiamate in una sera é quindi

$$P(X=6) = e^{-11.7}\frac{11.7^6}{6!} \approx 0.03$$

si tratta quindi di un evento di probabilitá piccola, quindi piuttosto eccezionale.

5. Una industria farmaceutica produce anche prodotti di bellezza. In particolare una crema per le rughe e' reclamizzata con la frase "*se la crema non e' efficace la potete restituire e vi verranno ridati i soldi*".
Un test effettuato su moltissimi clienti ha mostrato che la crema non ha nessuna efficacia contro le rughe nell'1,5% dei casi. Se la crema viene inviata ai rivenditori in confezioni da 8 vasetti, che percentuale di vasetti tornera' all'azienda? Su 1000 confezioni da 8 vasetti, quante vengono restituite in media? Con che probabilita' su 50 confezioni non ne viene restituita nessuna?

Soluzione: La confezione da 8 vasetti torna all'azienda, che deve restituire i soldi, se in una confezione c'e' al piu' un vasetto che non e' efficace.
Se X $(0 \leq X \leq 8)$ e' il numero di vasetti di crema non efficaci in una confezione da $N = 8$, e se $p = 0.015$ e' la probabilita' con cui il prodotto non e' efficace, (e quindi la probabilita' che un vasetto sia efficace e' $1 - p = 0.985$), bisogna calcolare $p(X \geq 1)$ con la distribuzione binomiale.
Ma $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$, quindi visto che

$$P(X=0) = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \end{array}\right)(0.015)^0(0.985)^8 \approx 0.89,$$

si ha $p(X \geq 1) \approx 1 - 0.89 = 0.11$: ogni confezione viene resa con probabilita' dell'11%.

Il numero medio di vasetti restituiti su 1000 confezioni da 8 vasetti e' $\langle R \rangle = 8000(0.11) = 880$, cioe' 110 confezioni.
La probabilita' che su 50 confezioni (cioe' 400 vasetti) non ne venga restituita nessuna e' data da

$$P(X=0) = \left(\begin{array}{c} 400 \\ 0 \end{array}\right)(0.015)^0(0.985)^{400} \approx 0.002.$$

6. Data la funzione $f(x) = 6x(1-x)$ con $0 \leq x \leq 1$, dire se $f(x)$ può essere una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X. Se la risposta è affermativa, calcolare $p(2/3 < X < 1)$ e il valore atteso della variabile X nell'intervallo $[0,1]$.

Soluzione. La funzione $f(x) = 6x(1-x)$ è una densità di probabilità su $[0,1]$ se la funzione e' positiva in [0,1] e se si ha

$$\int_0^1 f(x)dx = 1.$$

La prima condizione e' verificata visto che sia x che $1-x$ sono positivi in $[0,1]$.
L'integrale vale

$$6\int_0^1 (x-x^2)dx = 6[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]|_0^1 = 6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1:$$

quindi $f(x)$ è una densità di probabilità in $[0,1]$. Si ha allora

$$p(2/3 < X < 1) = 6\int_{2/3}^1 (x-x^2)dx = 6[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]|_{2/3}^1 = 6[(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{2}{9} - \frac{8}{81})] = \frac{7}{27} \approx 0.26.$$

e

$$\langle X \rangle = 6\int_0^1 x(x-x^2)dx = 6\int_0^1 (x^2-x^3)dx = 6[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]|_0^1 = 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.$$

7. Trovate per la strada una scheda telefonica da 10 euro e non sapete se sia mai stata usata, quindi non siete in grado di dire quanti euro siano ancora disponibili. Se indicate con X l'ammontare disponibile nella scheda, spiegare a parole perche' e' ragionevole assumere che X sia una variabile aleatoria continua distribuita con legge uniforme.
Se volete fare una telefonata da 2 euro, con quale probabilita' la scheda vi permettera' di fare la telefonata?
Quanti soldi sono disponibili in media in quella scheda?

Soluzione: La variabile aleatoria X e' continua perche' l'ammontare disponibile e' un qualunque numero reale tra 0 e 10. Possiamo supporre che sia distribuita con legge uniforme (quindi la densita' di probabilita' e' $f(x) = c$) visto che, in mancanza di informazioni, ogni cifra e' disponibile con la stessa probabilita'.
Per calcolare c bisogna ricordare che deve essere

$$p(0 \leq X \leq 10) = \int_0^{10} c dx = c \int_0^{10} dx = 10c = 1$$

e quindi $c = 1/10$.
La probabilita' da calcolare e' quella dell'evento "*l'ammontare disponibile e' almeno di 2 euro*"? Quindi

$$p(X \geq 2) = \int_2^{10} (1/10) dx = 8/10 = 0.8.$$

Il valore atteso della cifra disponibile e'

$$\langle X \rangle = \int_0^{10} (1/10) x dx = (1/10) \frac{x^2}{2} |_0^{10} = 5$$

(com e' ragionevole).