SC. BIOLOGICHE - MODULO di CALCOLO e BIOSTATISTICA

Esercizio probabilità (distribuzione binomiale) con soluzione

1. La probabilità che un cliente che entra in un negozio di elettrodomestici compri un computer è il 20%. Se nel negozio ci sono 7 clienti, quanti, in media non compreranno un computer? Con che probabilità almeno 1 dei 7 compra un computer? E' piu' probabile che un solo cliente compri un computer o che lo comprino piu' di tre clienti?

Soluzione. Sia C l'evento "*entrare nel negozio per comprare un computer*"; l'evento opposto "*entrare nel negozio per comprare un altro elettrodomestico*" sia NC. Si ha $p(C) = 0.2 = p$ quindi $p(NC) = 1 - p = 0.8$.
Se nel negozio ci sono $N = 7$ clienti, in media $N \cdot (1 - p) = (4/5)7 = 28/5 = 5.6$ clienti dei 7 non comprano un computer.
"*Almeno 1 dei 7 clienti compra un computer*" significa che 1 cliente, oppure 2, oppure 3 ..., oppure tutti e 7 comprano un computer. Detto X il numero di clienti che compra computer, la probabilita' di questo evento e'

$$p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + ... + p(X = 7) = 1 - p(X = 0)$$

Visto che

$$p(X = 0) = \binom{7}{0} (1/5)^0(4/5)^7 = (4/5)^7 \approx 0.21$$

la probabilità che almeno un cliente compri un computer è circa 1-0.21=0.79 (circa il 79%).
La probabilita' che un cliente compri un computer vale

$$p(X = 1) = \binom{7}{1} (1/5)^1(4/5)^6 \approx 7(0.2)(0.26) \approx 0.37$$

La probabilita' che piu' di tre clienti comprino un computer vale

$$p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)]$$

Visto che $p(X = 0) \approx 0.21$ e $p(X = 1) \approx 0.37$ conviene calcolare

$$p(X = 2) = \binom{7}{2} (1/5)^2(4/5)^5 \approx 21(0.2)^2(0.8)^5 \approx 0.27$$

e

$$p(X = 3) = \binom{7}{3} (1/5)^3(4/5)^4 \approx 35(0.2)^3(0.8)^4 \approx 0.11$$

Si conclude che la probabilita' che piu' di 3 clienti comprino un computer vale $p(X > 3) \approx 1 - [0.21 + 0.37 + 0.27 + 0.11] = 0.04$, quindi e' molto piu' probabile che un solo cliente compri un computer piuttosto che lo comprino piu' di 3 clienti.

2. Una industria farmaceutica produce anche prodotti di bellezza. In particolare una crema per le rughe e' reclamizzata con la frase "*se la crema non e' efficace la potete restituire e vi verranno ridati i soldi*".
Un test effettuato su moltissimi clienti ha mostrato che la crema non ha nessuna efficacia contro le rughe nell'1,5% dei casi. Se la crema viene inviata ai rivenditori in confezioni da 8 vasetti, che percentuale di vasetti tornera' all'azienda? Su 1000 confezioni da 8 vasetti, quante vengono restituite in media? Con che probabilita' su 50 confezioni non ne viene restituita nessuna?

Soluzione. La confezione da 8 vasetti torna all'azienda, che deve restituire i soldi, se in una confezione c'e' al piu' un vasetto che non e' efficace. Se X $(0 \leq X \leq 8)$ e' il numero di vasetti di crema non efficaci in una confezione da $N = 8$, e se $p = 0.015$ e' la probabilita' con cui il prodotto non e' efficace, e quindi la probabilita' che un vasetto sia efficace e' $1 - p = 0.985$, bisogna calcolare $p(X \geq 1)$ con la distribuzione binomiale.
Ma $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$, quindi visto che

$$P(X=0) = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \end{array}\right) (0.015)^0 (0.985)^8 \approx 0.89,$$

si ha $p(X \geq 1) \approx 1 - 0.89 = 0.11$: ogni confezione viene resa con probabilita' dell'11%.

Su 1000 confezioni il numero di confezioni restituite e' $\langle R \rangle = 1000(0.11) = 110$.
La probabilita' che su 50 confezioni non ne venga restituita nessuna e' data da

$$P(X=0) = \left(\begin{array}{c} 50 \\ 0 \end{array}\right) (0.015)^0 (0.985)^8 \approx 0.89,$$

3. (Esame del 3. 2. 2016) Le lepri presenti in una riserva naturale appartengono per il 60% alla sottospecie A e per il 40% alla sottospecie B. Con una trappola si effettuano catture successive, si registra la sottospecie e si rimette l'animale nell'ambiente. (Ogni lepre può indifferentemente cadere nella trappola.) Calcolare con quale probabilità

(i) si cattura un individuo della specie A dopo aver catturato un individuo B;
(ii) si cattura un individuo della specie B dopo aver catturato due individui A.

Si calcoli il valor medio del numero di esemplari A tra quattro catturati. Si calcoli la probabilità che in quattro catture successive:

(iii) vi sia un egual numero di individui A e B;

(iv) i quattro esemplari siano della stessa sottospecie.

Soluzione. La probabilita' di catturare una lepre della specie A e' $p(A) = 0.6$, quella di catturarne una della specie B e' $p(B) = 0.4 = 1 - 0.6$.
(i) Visto che il risultato di ogni cattura non influenza quello delle catture successive gli eventi "*si cattura una lepre* A" e "*si cattura una lepre* B, sono indipendenti. Quindi per l'assioma del prodotto

$$p(B \cap A) = p(B)p(A) = 0.4(0.6) = 0.24$$

(ii) Analogamente al caso precedente

$$p(A \cap A \cap B) = (0.6)^2(0.4) = 0.144$$

Su 4 esemplari catturati il numero medio di A e' dato da

$$\langle X \rangle = 4 \cdot 0.6 = 0.24$$

(iii) Se su 4 catturati quelli della specie A devono essere in numero uguale a quelli della specie B, i 4 catturati devono essere 2 della specie A (e quindi 2 della B). Se contiamo con X il numero dei catturati della specie A si ha

$$p(X=2) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right) (0.6)^2 (1-0.6)^2 \approx 0.34$$

(iv) Se i 4 esemplari devono essere della stessa sottospecie o sono tutti della specie A oppure sono della specie B. La probabilita' che siano tutti della specie A e' data da $p(A)^4 = 0.1296$, quella che siano tutti della specie B e' data da $p(B)^4 = 0.0256$ e quindi gli esemplari sono tutti della stessa specie con probabilita' $0.1296 + 0.0256 \approx 0.2$

4. (Esame del 16.2 .2014) In un allevamento di trote uno dei bacini contiene un grande numero di pesci che sono per 1/4 di sesso maschile . Catturando un campione di quattro trote a caso, qual'é la probabilitá che si prendano piú individui di sesso maschile che femminile?
Qual'é il numero minimo m di esemplari da catturare in un campione casuale affinché la probabilitá che nel campione vi siano pesci di entrambi i sessi superi il 50%?

Soluzione. Se definiamo con M l'evento "pesce maschio" e con F l'evento "pesce femmina", si ha $p(M) = 0.25$ e $p(F) = 1 - 0.25 = 0.75$.

Se il campione è formato da $N = 4$ pesci e se contiamo con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ il numero dei pesci maschi catturati nel campione, l'evento "piú individui di sesso maschile che femminile" significa che k prende valore 3 oppure 4 e la probabilità da calcolare è $p(M = 3) + p(M = 4)$.
I due valori di probabilità si calcolano con la formula di Bernoulli e si ha

$$p(M = 3) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) (0.25)^3 (0.75) \approx 4(0.016)(0.75) \approx 0.05$$

$$p(M = 4) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right) (0.25)^4 \approx 0.004$$

quindi $p(M = 3) + p(M = 4) \approx 0.054$.

L'evento "prendere pesci di entrambi i sessi" vuol dire "prendo a maschi, con $a \geq 1$ e b femmine, con $b \geq 1$". Questo evento si rappresenta con $M \cap M \cap .... \cap M \cap F \cap F \cap ..... \cap F$ (a volte l'intersezione di M e b quella di F).
Per l'assioma del prodotto la probabilità di questo evento è

$$p(M \cap M \cap .... \cap M \cap F \cap F \cap ..... \cap F) = [p(M)]^a p[(F)]^b = (\frac{1}{4})^a (\frac{3}{4})^b$$

e bisogna trovare a e b tali che

$$(\frac{1}{4})^a (\frac{3}{4})^b > \frac{1}{2}$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{4})^{a-1}(\frac{3}{4})^b > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{4})^{a-1}(\frac{3}{4})^b > 2.$$

Ma per qualunque $a \geq 1$ si ha che $(\frac{1}{4})^{a-1} < 1$ e, per qualunque $b \geq 1$ si ha $(\frac{3}{4})^b < 1$, quindi non è possibile catturare $m = a + b$ pesci in modo che la probabilitá che nel campione vi siano pesci di entrambi i sessi superi il 50%.

5. Una grande popolazione di uccelli è composta di una specie di tipo α e una di tipo β. La probabilità che un uccello scelto a caso sia di tipo α è del 20%. Durante una battuta di caccia vengono catturati 5 uccelli in successione.
i) Calcolare la probabilità che esattamente tre uccelli siano di tipo α.
ii) Calcolare la probabilità che almeno due uccelli siano di tipo β.
iii) Calcolare la probabilità che i primi due uccelli siano di tipo β e i secondi due di tipo α.

Soluzione. Indichiamo con $p(\alpha)$ e con $p(\beta)$ la probabilità che un uccello sia di tipo α o β. Si ha $p = p(\alpha) = 0.2$ e $1 - p = p(\beta) = 0.8$. Sia inoltre $N = 5$ il numero degli uccelli catturati e indichiamo con k il numero di quelli di tipo α tra quelli catturati. Bisogna calcolare, con la distribuzione binomiale, $p(k = 3)$:

$$p(k = 3) = (\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}) p^3 (1 - p)^2 = 10(0.2)^3 (0.8)^3 \approx 0.04.$$

ii) Se indichiamo con n il numero di quelli di tipo β tra quelli catturati, bisogna calcolare $p(n \geq 2)$. Si ha

$$p(n \geq 2) = 1 - p(n = 0) - p(n = 1) = 1 - (\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array})(1 - p)^0 p^5 - (\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array})(1 - p)p^4$$

Visto che $(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array})(1 - p)^0 p^5 = 0.00032$ e $(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array})(1 - p)p^4 = 0.0064$ si ha $p(n \geq 2) \approx 0.99$.

iii) Indicati con A e B gli eventi "catturare un uccello di tipo α" e "catturare un uccello di tipo β", l'evento di cui si deve calcolare la probabilità è $E = E_1 + E_2 = (B \cap B \cap A \cap A \cap A) \cup (B \cap B \cap A \cap A \cap B)$, visto che l'ultimo uccello catturato può essere di tipo α oppure di tipo β.
Tenendo conto del fatto che A è incompatibile con B e che E_1 è indipendente da E_2 , si ha

$$p(E) = (0.8^2 \cdot 0.2^3) + (0.8^3 \cdot 0.2^2) \approx 0.026.$$